6. přednáška, 29. 10. 2020

4. Soustavy lineárních rovnic

V různých oborech (ve fyzice, v chemii, v ekonomii, samozřejmě v matematice, ale i v běžném životě) existuje spousta úloh, které můžeme vyřešit tak, že sestavíme vhodnou soustavu lineárních rovnic a najdeme její řešení.

4.1. Soustavy lineárních rovnic a jejich řešení

Buďte n přirozené číslo, P pole, $a_1, a_2, \dots, a_n, b \in P$. Potom

$$a_1x^1 + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = b$$

je *lineární rovnice* o n neznámých $x^1, x^2, \dots, x^n$ (nejsou to mocniny, jen horní indexy).

Uvedenou lineární rovnici můžeme zapsat

$$\sum_{j=1}^{n} a_jx^j = b.$$

Tvrzení 4.1.1. *Mějme rovnici $ax = b$ o jedné neznámé x. Je-li $a \neq 0$, pak existuje jediný prvek $\xi \in P$ takový, že*

$$a\xi = b,$$

a sice $\xi = ba^{-1}$ (nazývá se řešení rovnice $ax = b$).

Důkaz. Dosadíme-li $\xi = ba^{-1}$ za x, dostaneme $a\xi = aba^{-1} = b$. Je to tedy řešení.

Na druhou stranu, je-li ξ řešení, tedy $a\xi = b$, pak $\xi = \xi \cdot 1 = \xi(aa^{-1}) = (\xi a)a^{-1} = (a\xi)a^{-1} = ba^{-1}$. Tím je dokázána jednoznačnost řešení (každé řešení je rovno ba^{-1}). $\square$

Buďte $m, n, i, j \in \mathbb{N}$, $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, P pole, pro každé i, j nechť $a^i_j, b^i \in P$, $x^1, x^2, \dots, x^n \notin P$. Potom

$$\begin{aligned} a^1_1x^1 + a^1_2x^2 + \cdots + a^1_nx^n &= b^1 \\ a^2_1x^1 + a^2_2x^2 + \cdots + a^2_nx^n &= b^2 \\ &\vdots \\ a^m_1x^1 + a^m_2x^2 + \cdots + a^m_nx^n &= b^m \end{aligned}$$

je *soustava m lineárních rovnic* o n neznámých $x^1, \dots, x^n$.

Uvedenou soustavu lineárních rovnic můžeme zapsat

$$\sum_{j=1}^{n} a^i_jx^j = b^i, \quad 1 \leq i \leq m.$$

Označíme-li

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \vdots & & & \\ a_1^m & a_2^m & \dots & a_n^m \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ \vdots \\ b^m \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix},$$

můžeme soustavu lineárních rovnic psát jako rovnici

$$Ax = b.$$

Matice $A = (a_j^i)_{m\times n}$ je *matice soustavy*, $b = (b^i)_{m\times 1}$ je *sloupec pravých stran*, $x = (x^i)_{n\times 1}$ je *sloupec neznámých*. Matice

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_n^1 & b^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 & b^2 \\ \vdots & & & & \\ a_1^m & a_2^m & \dots & a_n^m & b^m \end{pmatrix}$$

je *rozšířená matice soustavy*.

Řešení soustavy lineárních rovnic je každá uspořádaná n-tice $\xi = (\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^n)$ prvků pole P taková, že pro každé $i \in \{1, \dots, m\}$ platí rovnost

$$a_1^i\xi^1 + a_2^i\xi^2 + \dots + a_n^i\xi^n = b^i,$$

nebo při maticovém zápisu je to sloupcová matice $\xi = \begin{pmatrix} \xi^1 & \xi^2 & \dots & \xi^n \end{pmatrix}^\mathsf{T}$ taková, že platí rovnost

$$A\xi = b.$$

Součin Ax si můžeme rozepsat

$$\begin{aligned} Ax &= \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \vdots & & & \\ a_1^m & a_2^m & \dots & a_n^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^1x^1 + a_2^1x^2 + \dots + a_n^1x^n \\ a_1^2x^1 + a_2^2x^2 + \dots + a_n^2x^n \\ \vdots \\ a_1^mx^1 + a_2^mx^2 + \dots + a_n^mx^n \end{pmatrix} \\ &= x^1 \begin{pmatrix} a_1^1 \\ a_1^2 \\ \vdots \\ a_1^m \end{pmatrix} + x^2 \begin{pmatrix} a_2^1 \\ a_2^2 \\ \vdots \\ a_2^m \end{pmatrix} + \dots + x^n \begin{pmatrix} a_n^1 \\ a_n^2 \\ \vdots \\ a_n^m \end{pmatrix} \\ &= x^1A_1^\bullet + x^2A_2^\bullet + \dots + x^nA_n^\bullet \end{aligned}$$

a soustavu $Ax = b$ pak můžeme přepsat

$$x^1A_1^\bullet + x^2A_2^\bullet + \dots + x^nA_n^\bullet = b.$$

Tedy, soustava lineárních rovnic $Ax = b$ má řešení právě tehdy, když existuje lineární kombinace sloupců matice A, která je rovna sloupci pravých stran b. Koeficienty takových lineárních kombinací tvoří jednotlivá řešení soustavy.

Jestliže soustava lineárních rovnic má nějaké řešení, tj. sloupec pravých stran je nějakou lineární kombinací sloupců matice soustavy, potom hodnost rozšířené matice soustavy je rovna hodnosti matice soustavy. Jestliže soustava nemá řešení, tj. sloupec pravých stran není lineární kombinací sloupců matice soustavy, potom hodnost rozšířené matice soustavy je o 1 větší než hodnost matice soustavy.

Množina všech řešení soustavy lineárních rovnic je průnik množin všech řešení jednotlivých rovnic soustavy.

Příklad. (1) Řešení lineární rovnice

$$a_1x^1 + a_2x^2 = b$$

s reálnými koeficienty o dvou neznámých x^1, x^2 jsou uspořádané dvojice (ξ^1, ξ^2) reálných čísel takové, že po jejich dosazení do rovnice za neznámé dostaneme rovnost. Množina všech řešení takové rovnice je tedy

$$\{(\xi^1, \xi^2) \in \mathbb{R}^2 \mid a_1\xi^1 + a_2\xi^2 = b\}$$

a bereme-li uspořádané dvojice jako body v rovině, tato množina je

- prázdná, tj. rovnice nemá řešení — pokud $a_1 = a_2 = 0$ a $b \neq 0$;
- přímka, tj. rovnice má nekonečně mnoho řešení — pokud aspoň jeden z koeficientů a_1, a_2 je nenulový;
- celá rovina, tj. rovnice má nekonečně mnoho řešení — pokud $a_1 = a_2 = b = 0$.

Je-li to přímka procházející dvěma body $u = (u_1, u_2), v = (v_1, v_2)$ a označíme-li $w = u - v$, můžeme ji zapsat také parametricky

$$\begin{aligned}\{u + tw \mid t \in \mathbb{R}\} &= \{(u_1, u_2) + t(w_1, w_2) \mid t \in \mathbb{R}\}\\ &= \{(u_1 + tw_1, u_2 + tw_2) \mid t \in \mathbb{R}\}.\end{aligned}$$

(2) Množina všech řešení soustavy lineárních rovnic o dvou neznámých je průnik množin všech řešení jednotlivých rovnic. Taková množina je tedy

- prázdná — pokud buď aspoň jedna rovnice nemá řešení, nebo množiny všech řešení dvou rovnic jsou rovnoběžné přímky, nebo množiny všech řešení tří rovnic jsou přímky s prázdným průnikem;
- jednoprvková — pokud množiny všech řešení dvou rovnic jsou přímky s jednoprvkovým průnikem, jehož prvek je řešením i všech ostatních rovnic sousatvy;
- přímka — pokud to není celá rovina a všechny množiny všech řešení jednotlivých rovnic různé od celé roviny jsou tatáž přímka, tedy všechny rovnice jsou násobky jedné z nich;
- celá rovina — pokud všechny rovnice mají všechny koeficienty i pravé strany nulové, tedy $a^i_1 = a^i_2 = b^i = 0$ pro každé i.

(3) Řešení lineární rovnice o třech neznámých jsou uspořádané trojice, po jejichž dosazení do rovnice dostaneme rovnost, a bereme-li uspořádané trojice jako body v trojrozměrném prostoru, množina všech řešení je

- prázdná — pokud $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ a $b \neq 0$;
- rovina — pokud aspoň jeden z koeficientů a_1, a_2, a_3 je nenulový;
- celý trojozměrný prostor — pokud $a_1 = a_2 = a_3 = b = 0$.

A také rovinu v prostoru můžeme vyjádřit parametricky.

(4) Množina všech řešení soustavy lineárních rovnic o třech neznámých může být

- prázdná;
- jednoprvková;
- přímka;
- rovina;
- celý trojozměrný prostor.

(5) Řešení lineární rovnice o n neznámých jsou uspořádané n-tice a množina všech řešení je

- prázdná;

- „$(n-1)$-rozměrná rovina“, nazývá se *nadrovina* v n-rozměrném prostoru;
- celý n-rozměrný prostor.

Množina všech řešení soustavy lineárních rovnic o n neznámých je tedy případně průnik nadrovin v n-rozměrném prostoru. ■

Příklad. (1) Soustava

$$\begin{aligned} 4x^1 + 3x^2 + \phantom{0{,}5}x^3 &= 81 \\ 5x^1 + 2x^2 + 0{,}5x^3 &= 55 \\ 2x^1 + 3x^2 + \phantom{0{,}5}x^3 &= 76 \end{aligned}$$

má právě jedno řešení, $(2{,}5, 14, 29)$, tj. $\xi^1 = 2{,}5$, $\xi^2 = 14$ a $\xi^3 = 29$. Množina všech řešení je $\{(2{,}5, 14, 29)\}$.

(2) Mějme soustavu

$$x - y = 1,$$

tedy jednu rovnici o dvou neznámých. Každá uspořádaná dvojice $(\xi, \xi - 1)$, kde ξ je libovolné reálné číslo, je řešení soustavy, tj. $x = \xi$, $y = \xi - 1$ pro libovolné $\xi \in \mathbb{R}$. Soustava má tedy nekonečně mnoho řešení a množina všech řešení je $\{(\xi, \xi - 1) \mid \xi \in \mathbb{R}\}$.

(3) Soustava

$$\begin{aligned} x &= 0 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

nemá žádné řešení, množina všech řešení je tedy prázdná množina $\emptyset$. ■

4.2. Gaussova eliminační metoda a obecné řešení

Řešit soustavu lineárních rovnic, tj. hledat množinu všech jejích řešení, je možné tak, že soustavu upravíme na takový tvar, ze kterého všechna řešení vyčteme. Je ovšem nutné používat pouze takové úpravy, které nemění množinu všech řešení soustavy. Takové úpravy se nazývají *ekvivalentní.* A soustavy lineárních rovnic, jejichž množiny všech řešení se vzájemně rovnají, se nazývají *ekvivalentní.*

Elementární úpravy soustavy lineárních rovnic jsou

(i) přičtení nějakého násobku jedné rovnice k jiné rovnici,
(ii) vynásobení některé rovnice nenulovým číslem,
(iii) vzájemná výměna dvou rovnic.

Ke každé elementární úpravě soustavy existuje elementární úprava (stejného typu), která soustavu převede do původního stavu.

Je zřejmé, že provedení řádkové elementární úpravy rozšířené matice soustavy je totéž co provedení obdobné elementární úpravy soustavy.

Tvrzení 4.2.1. *Elementární úpravy soustavy lineárních rovnic nemění množinu všech řešení soustavy.*

Důkaz. Mějme soustavu lineárních rovnic o n neznámých $x^1, x^2, \dots, x^n$ a buď $\xi = (\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^n)$ její řešení, tj. pro každé i platí rovnost

$$a^i_1\xi^1 + a^i_2\xi^2 + \dots + a^i_n\xi^n = b^i.$$

Zvolme si jednu elementární úpravu, přičtení c-násobku j-té rovnice k i-té rovnici, kde $i \neq j$ (pro zbylé dvě úpravy je důkaz analogický). Po této úpravě dostaneme novou soustavu, která se od té původní liší jen v i-té rovnici, ta v nové soustavě je

$$(a^i_1 + ca^j_1)x^1 + \cdots + (a^i_n + ca^j_n)x^n = b^i + cb^j.$$

Je zřejmé, že ξ je řešením i této nové soustavy, protože je řešením nové i-té rovnice

$$\begin{aligned}&(a^i_1 + ca^j_1)\xi^1 + \cdots + (a^i_n + ca^j_n)\xi^n\\ &\quad = (a^i_1\xi^1 + \cdots + a^i_n\xi^n) + c(a^j_1\xi^1 + \cdots + a^j_n\xi^n)\\ &\quad = b^i + cb^j\end{aligned}$$

i všech ostatních, nezměněných rovnic soustavy. To znamená, že každé řešení původní soustavy je řešením i upravené soustavy.

Při maticovém zápisu můžeme tvrzení dokázat s využitím toho, že řádková elementární úprava matice je totéž co násobení elementární maticí zleva. Úpravou soustavy $Ax = b$ dostaneme soustavu $UAx = Ub$. Jestliže ξ je řešením původní soustavy, tedy $A\xi = b$, potom $UA\xi = Ub$ a ξ je řešením i upravené soustavy.

Vzhledem k tomu, že upravenou soustavu můžeme převést na tu původní opět pomocí jedné z elementárních úprav, každé řešení upravené soustavy je také řešením původní soustavy. Celkově tedy množina všech řešení upravené soustavy je rovna množině všech řešení původní soustavy. $\square$

Tvary soustavy lineárních rovnic, ze kterých lze snadno vyčíst všechna řešení soustavy, jsou ty, jejichž rozšířené matice jsou ve schodovitém a ještě lépe v Gaussově–Jordanově tvaru.

Pomocí řádkových elementárních úprav upravme rozšířenou matici soustavy na Gaussův–Jordanův tvar (stačil by i schodovitý). Jestliže upravená rozšířená matice soustavy má více (o jeden) nenulových řádků než příslušná matice soustavy, soustava (upravená i původní) nemá řešení. Jestliže počty nenulových řádků upravené rozšířené matice soustavy i příslušné matice soustavy se rovnají r, tj. rozšířená matice soustavy a matice soustavy mají stejné hodnosti, příslušná soustava rovnic (uvádíme jen ty nenulové) je

$$\begin{aligned}
x^1 + \cdots + \ 0 \ + \cdots + \ 0 \ + c^1_{k_r+1}x^{k_r+1} + \cdots + \ c^1_n x^n &= d^1\\
&\ \vdots\\
x^{k_{r-1}} + \cdots + \ 0 \ + c^{r-1}_{k_r+1}x^{k_r+1} + \cdots + c^{r-1}_n x^n &= d^{r-1}\\
x^{k_r} + c^r_{k_r+1}x^{k_r+1} + \cdots + \ c^r_n x^n &= d^r.
\end{aligned}$$

Z poslední rovnice můžeme pomocí $x^{k_r+1}, \ldots, x^n$ vyjádřit

$$x^{k_r} = d^r - c^r_{k_r+1}x^{k_r+1} - \cdots - c^r_n x^n.$$

Z předposlední rovnice můžeme pomocí $x^{k_{r-1}+1}, \ldots, x^{k_r-1}, x^{k_r+1}, \ldots, x^n$ vyjádřit

$$x^{k_{r-1}} = d^{r-1} - c^{r-1}_{k_{r-1}+1}x^{k_{r-1}+1} - \cdots - c^{r-1}_{k_r-1}x^{k_r-1} - c^{r-1}_{k_r+1}x^{k_r+1} - \cdots - c^{r-1}_n x^n.$$

Takto můžeme postupovat až k první rovnici, ze které vyjádříme x^1 ($k_1 = 1$) pomocí všech ostatních neznámých kromě $x^{k_2}, \ldots, x^{k_r}$.

Získáme tak vyjádření r neznámých $x^{k_1}, x^{k_2}, \ldots, x^{k_r}$ pomocí $n-r$ neznámých x^i s $i \in \{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{k_1, k_2, \ldots, k_r\}$. Když zvolíme za neznámé x^i, $i \in \{1, 2, \ldots, n\} \setminus$

$\{k_1, k_2, \ldots, k_r\}$, libovolné prvky pole P, které pak dosadíme do získaných vztahů pro neznámé $x^{k_1}, x^{k_2}, \ldots, x^{k_r}$ a tyto hodnoty dopočítáme, dostaneme řešení soustavy $Ax = b$. Neznámým x^i, $i \in \{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{k_1, k_2, \ldots, k_r\}$, se říká *parametry* a označujeme je po řadě $t^1, \ldots, t^{n-r}$.

Mějme soustavu lineárních rovnic o n neznámých s hodností r rozšířené matice soustavy. Její řešení zapsané pomocí $n - r$ parametrů se nazývá *obecné řešení.* Libovolnou volbou parametrů získáme jedno řešení soustavy, to se nazývá *partikulární řešení.*

Je zřejmé, že každé řešení soustavy lineárních rovnic lze získat z obecného řešení vhodnou volbou parametrů. Takže množina všech řešení získaných z obecného řešení všemi možnými volbami parametrů je rovna množině všech řešení soustavy.

4.3. Frobeniova věta

Z předchozích pozorování a tvrzení vyplývá následující věta.

Tvrzení 4.3.1 (Frobeniova věta). *Soustava lineárních rovnic má aspoň jedno řešení právě tehdy, když hodnost matice soustavy se rovná hodnosti rozšířené matice soustavy.*

Důkaz. Jestliže soustava $Ax = b$ má nějaké řešení, pak sloupec b pravých stran je lineární kombinací sloupců matice A a rozšířením matice A o takový sloupec se hodnost nezmění. Takže matice A a $\bar{A}$ mají stejné hodnosti.

Jestliže se hodnosti matic A a $\bar{A}$ rovnají, a rovnají se tedy i hodnosti příslušných matic v Gaussově–Jordanově tvaru, pak použitím postupu z předchozí podkapitoly a libovolnou volbou parametrů získáme řešení soustavy. □

4.4. Cramerovo pravidlo

Podle Frobeniovy věty soustava s regulární maticí má řešení. Podle následující věty má právě jedno řešení.

Tvrzení 4.4.1. *Soustava $Ax = b$ s regulární maticí A má právě jedno řešení*

$$\xi = A^{-1}b.$$

Důkaz. Buď A regulární matice, tedy čtvercová, invertibilní, s maximální hodností. Potom podle Frobeniovy věty soustava $Ax = b$ má řešení. A pro každé řešení ξ platí $A\xi = b$, tedy $\xi = A^{-1}A\xi = A^{-1}b$. □

Tvrzení 4.4.2 (Cramerovo pravidlo). *Buď $Ax = b$ soustava s regulární maticí A a řešením $\xi = \begin{pmatrix} \xi^1 & \xi^2 & \ldots & \xi^n \end{pmatrix}$. Pak pro každé $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$*

$$\xi^i = \frac{\det A_i}{\det A},$$

kde A_i je matice vzniklá z matice A výměnou i-tého sloupce za sloupec pravých stran b:

$$A_i = \begin{pmatrix} a^1_1 & \ldots a^1_{i-1} & b^1 & a^1_{i+1} & \ldots & a^1_n \\ \vdots & & & & & \\ a^n_1 & \ldots a^n_{i-1} & b^n & a^n_{i+1} & \ldots & a^n_n \end{pmatrix}$$

Důkaz. Při rozvoji podle i-tého sloupce dostáváme $\det A_i = \sum_j \hat{A}_i^j b^j$. Dále

$$\xi = A^{-1}b = \frac{\operatorname{adj} A}{\det A} b = \frac{\hat{A}^\intercal}{\det A} b = \frac{\hat{A}^\intercal b}{\det A}$$

a tedy

$$\xi^i = \frac{\sum_j (\hat{A}^\intercal)^i_j b^j}{\det A} = \frac{\sum_j \hat{A}^j_i b^j}{\det A} = \frac{\sum_j (\hat{A}_i)^j_i b^j}{\det A} = \frac{\det A_i}{\det A}.$$

Tvrzení můžeme dokázat také takto: Je-li ξ řešení soustavy $Ax = b$, pak b je lineární kombinací sloupců $A_i^\bullet$ s koeficienty $\xi^1, \dots, \xi^n$, tedy

$$b = \xi^1 A_1^\bullet + \xi^2 A_2^\bullet + \dots + \xi^n A_n^\bullet = \sum_j \xi^j A_j^\bullet$$

a matice A_i má v i-tém sloupci tuto lineární kombinaci všech sloupců matice A. Potom

$$\begin{aligned}
\det A_i &= \det \begin{pmatrix} A_1^\bullet & \dots & A_{i-1}^\bullet & b & A_{i+1}^\bullet & \dots & A_n^\bullet \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} A_1^\bullet & \dots & A_{i-1}^\bullet & \sum_j \xi^j A_j^\bullet & A_{i+1}^\bullet & \dots & A_n^\bullet \end{pmatrix} \\
&= \sum_j \det \begin{pmatrix} A_1^\bullet & \dots & A_{i-1}^\bullet & \xi^j A_j^\bullet & A_{i+1}^\bullet & \dots & A_n^\bullet \end{pmatrix} \\
&= \sum_j \xi^j \det \begin{pmatrix} A_1^\bullet & \dots & A_{i-1}^\bullet & A_j^\bullet & A_{i+1}^\bullet & \dots & A_n^\bullet \end{pmatrix} \\
&= \xi^i \det \begin{pmatrix} A_1^\bullet & \dots & A_{i-1}^\bullet & A_i^\bullet & A_{i+1}^\bullet & \dots & A_n^\bullet \end{pmatrix} \\
&= \xi^i \det A,
\end{aligned}$$

z čehož dostaneme požadovaný vztah. □

4.5. Homogenní soustavy lineárních rovnic

Soustava s nulovou pravou stranou, $b = 0$, se nazývá *homogenní.*

Tvrzení 4.5.1. *Každá homogenní soustava má řešení — nulové.*

Důkaz. Zřejmé. □

Tvrzení 4.5.2. *Lineární kombinace řešení homogenní soustavy je také řešení té soustavy. Speciálně, nulový sloupec je řešení, součet řešení je řešení a c-násobek řešení je řešení.*

Důkaz. Nechť ξ_1, ξ_2 jsou řešení, $\alpha_1, \alpha_2 \in P$. Tedy, $A\xi_1 = 0$ a $A\xi_2 = 0$. Potom $A(\alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2) = \alpha_1 A\xi_1 + \alpha_2 A\xi_2 = 0$ a lineární kombinace řešení je tedy také řešením soustavy. □

Fundamentální systém řešení homogenní soustavy je taková množina řešení homogenní soustavy, která je lineárně nezávislá a každé řešení lze vyjádřit jako lineární kombinaci řešení z této množiny.

Tvrzení 4.5.3. *Fundamentální systém řešení soustavy rovnic $Ax = 0$ o n neznámých má $n - \operatorname{rank} A$ prvků.*

Důkaz. Obecné řešení je vyjádřeno pomocí $n - \operatorname{rank} A$ parametrů $t^1, \dots, t^{n-\operatorname{rank} A}$. Provedeme-li $n - \operatorname{rank} A$ voleb parametrů $(t^1, \dots, t^{n-\operatorname{rank} A}) = (1, 0, \dots, 0), \dots, (t^1, \dots, t^{n-\operatorname{rank} A}) = (0, \dots, 0, 1)$, dostaneme množinu řešení s požadovanými vlastnostmi. $\square$

4.6. Nehomogenní soustavy lineárních rovnic

Soustava s nenulovou pravou stranou se nazývá *nehomogenní.* Je-li $Ax = b$ nehomogenní soustava, potom $Ax = 0$ se nazývá *homogenizovaná soustava.*

Tvrzení 4.6.1. *Nechť ξ_p je nějaké řešení soustavy $Ax = b$. Potom pro každé řešení ξ této soustavy existuje jediné řešení ξ_0 homogenizované soustavy takové, že $\xi = \xi_p + \xi_0$.*

Na druhou stranu, pro libovolné řešení ξ_0 homogenizované soustavy je $\xi = \xi_p + \xi_0$ řešení soustavy $Ax = b$.

Důkaz. Buďte ξ_p a ξ řešení soustavy. Položme $\xi_0 = \xi - \xi_p$. Potom $A\xi_0 = A(\xi - \xi_p) = A\xi - A\xi_p = b - b = 0$. Tedy, ξ_0 je řešení homogenizované soustavy a $\xi = \xi_0 + \xi_p$. Jednoznačnost ξ_0 je zřejmá.

Je-li $A\xi_0 = 0$, pak $A\xi = A(\xi_p + \xi_0) = A\xi_p + A\xi_0 = b + 0 = b$. $\square$

Z předchozího tvrzení vyplývá, že je-li ξ_p nějaké řešení soustavy $Ax = b$, potom množina všech řešení této soustavy je

$$\{\xi_p + \xi_0 \mid \xi_0 \text{ je řešení homogenizované soustavy } Ax = 0\}\,.$$