5. přednáška, 22. 10. 2020

Tvrzení 3.2.1. *Determinant matice s nulovým řádkem nebo nulovým sloupcem je roven nule.*

Důkaz. Buď A matice typu $n \times n$ s nulovým řádkem nebo nulovým sloupcem. Pro každé $\sigma \in S_n$ je v součinu $A^1_{\sigma_1} A^2_{\sigma_2} \cdots A^n_{\sigma_n}$ právě jeden prvek z každého, tedy i nulového řádku a právě jeden prvek z každého, tedy i nulového sloupce. Proto je každý takový součin roven nule. □

Čtvercová matice je (*horní* resp. *dolní*) *trojúhelníková* (nebo v (*horním* resp. *dolním*) *trojúhelníkovém tvaru*), jestliže je čtvercová a pod resp. nad diagonálou má jen nuly, tedy $A^i_j = 0$ pro $i > j$ resp. pro $i < j$.

Každá matice ve schodovitém tvaru je také v (horním) trojúhelníkovém tvaru a tedy každou čtvercovou matici lze pomocí řádkových elementárních úprav převést na trojúhelníkový tvar.

Tvrzení 3.2.2. *Determinant trojúhelníkové matice je roven součinu prvků na diagonále.*

Důkaz. Buď A horní trojúhelníková matice typu $n \times n$. Pro každou permutaci σ na množině I_n různou od identity existuje $i \in I_n$ takové, že $\sigma_i < i$, tedy $A^i_{\sigma_i} = 0$ a také $\operatorname{sgn}\sigma \cdot A^1_{\sigma_1} \cdots A^i_{\sigma_i} \cdots A^n_{\sigma_n} = 0$. Jelikož $\operatorname{sgn}\mathrm{id} = 1$, $\det A = A^1_1 A^2_2 \cdots A^n_n$.

Pro dolní trojúhelníkové matice je důkaz analogický. □

Důsledek. *(1) Determinant matice ve schodovitém tvaru je roven součinu prvků na diagonále.*

(2) Determinant diagonální matice je roven součinu prvků na diagonále.

(3) Determinant jednotkové matice je roven 1.

Determinanty elementárních matic jsou nenulové.

Příklad. (1) $\det E^{i,j}(c) = 1$, protože $E^{i,j}(c)$ je trojúhelníková matice a na diagonále má jen jedničky.

(2) $\det E^i(c) = c$, protože $E^i(c)$ je diagonální matice a na diagonále má jedno c a jinak jen jedničky.

(3) $\det E^{i,j} = -1$. Jelikož každý řádek a každý sloupec matice $E^{i,j}$ obsahují právě jednu jedničku a ostatní prvky jsou nuly, existuje jediná permutace (a je to transpozice) τ, pro kterou jsou všechny $(E^{i,j})^1_{\tau_1}, \dots, (E^{i,j})^n_{\tau_n}$ rovny jedné. Pro ostatní permutace je aspoň jeden činitel v příslušném součinu nulový. Jelikož $\sin\tau = -1$, $\det E^{i,j} = (-1) \cdot (E^{i,j})^1_{\tau_1} \cdots (E^{i,j})^n_{\tau_n} = -1$. ■

Tvrzení 3.2.3. *Determinant matice s dvěmi stejnými řádky je roven nule.*

Důkaz. Buď A čtvercová matice typu $n \times n$, která má i-tý řádek stejný jako j-tý ($i \neq j$), tedy $A^i_k = A^j_k$ pro každé k. Nutně tedy $n \geq 2$.

Buď τ_{ij} transpozice vyměňující $i, j \in I_n$, tedy $\operatorname{sgn}\tau_{ij} = -1$. Pro každou permutaci $\sigma \in S_n$ buď $\sigma' = \sigma \circ \tau_{ij}$. Pak $\operatorname{sgn}\sigma' = \operatorname{sgn}\sigma \cdot \operatorname{sgn}\tau_{ij} = -\operatorname{sgn}\sigma$ a člen determinantu odpovídající permutaci σ' je

$$
\begin{aligned}
\operatorname{sgn}\sigma' \cdot A^1_{\sigma'_1} \cdots A^i_{\sigma'_i} \cdots A^j_{\sigma'_j} \cdots A^n_{\sigma'_n} \\
&= -\operatorname{sgn}\sigma \cdot A^1_{\sigma_1} \cdots A^i_{\sigma_j} \cdots A^j_{\sigma_i} \cdots A^n_{\sigma_n} \\
&= -\operatorname{sgn}\sigma \cdot A^1_{\sigma_1} \cdots A^i_{\sigma_i} \cdots A^j_{\sigma_j} \cdots A^n_{\sigma_n},
\end{aligned}
$$

a je tedy opačný k členu odpovídajícímu permutaci σ. Společný příspěvek permutací σ a σ' k determinantu je tedy roven nule.

Jelikož $\sigma' \neq \sigma$ a $\sigma'' = \sigma$ (ověřte), množinu S_n (má sudý počet prvků) můžeme rozložit na dvouprvkové podmnožiny $\{\sigma, \sigma'\}$, z nichž každá přispívá k determinantu nulou, takže $\det A = 0$. □

Tvrzení 3.2.4. $\det A^{\mathsf{T}} = \det A$.

Důkaz.

$$\begin{aligned}
\det A^{\mathsf{T}} &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \cdot (A^{\mathsf{T}})^1_{\sigma_1} \dots (A^{\mathsf{T}})^i_{\sigma_i} \dots (A^{\mathsf{T}})^n_{\sigma_n} \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \cdot A_1^{\sigma_1} \dots A_i^{\sigma_i} \dots A_n^{\sigma_n} \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \cdot A^1_{\sigma_1^{-1}} \dots A^i_{\sigma_i^{-1}} \dots A^n_{\sigma_n^{-1}} \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma^{-1} \cdot A^1_{\sigma_1^{-1}} \dots A^i_{\sigma_i^{-1}} \dots A^n_{\sigma_n^{-1}} \\
&= \det A.
\end{aligned}$$

Třetí rovnost dostaneme uspořádáním činitelů $A_i^{\sigma_i}$ podle vzrůstajícího řádkového indexu. □

3.2.2. Elementární úpravy

Tvrzení 3.2.5. *(1) Přičtením násobku jednoho řádku, resp. sloupce k jinému řádku, resp. sloupci se determinant nezmění.*

$$\begin{vmatrix}
A_1^1 & A_2^1 & \dots & A_n^1 \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
A_1^i + cA_1^j & A_2^i + cA_2^j & \dots & A_n^i + cA_n^j \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
A_1^n & A_2^n & \dots & A_n^n
\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}
A_1^1 & A_2^1 & \dots & A_n^1 \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
A_1^i & A_2^i & \dots & A_n^i \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
A_1^n & A_2^n & \dots & A_n^n
\end{vmatrix}.$$

(2) Vynásobením jednoho řádku, nebo sloupce prvkem c se determinant vynásobí prvkem c.

$$\begin{vmatrix}
A_1^1 & A_2^1 & \dots & A_n^1 \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
cA_1^i & cA_2^i & \dots & cA_n^i \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
A_1^n & A_2^n & \dots & A_n^n
\end{vmatrix} = c \begin{vmatrix}
A_1^1 & A_2^1 & \dots & A_n^1 \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
A_1^i & A_2^i & \dots & A_n^i \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
A_1^n & A_2^n & \dots & A_n^n
\end{vmatrix}.$$

(3) Výměnou dvou řádků, nebo dvou sloupců determinant změní znaménko.

$$\begin{vmatrix} A_1^1 & A_2^1 & \dots & A_n^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_1^j & A_2^j & \dots & A_n^j \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_1^i & A_2^i & \dots & A_n^i \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_1^n & A_2^n & \dots & A_n^n \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} A_1^1 & A_2^1 & \dots & A_n^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_1^i & A_2^i & \dots & A_n^i \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_1^j & A_2^j & \dots & A_n^j \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_1^n & A_2^n & \dots & A_n^n \end{vmatrix}.$$

Důkaz. Uvedeme pouze důkaz pro řádkové úpravy, pro sloupcové je analogický.

Buďte A čtvercová matice a B upravená matice.

(1) Vznikne-li B z A přičtením c-násobku j-tého řádku k i-tému řádku, pak $B_k^i = A_k^i + cA_k^j$ pro každé k a ostatní řádky matice B jsou stejné jako v matici A, načež

$$\begin{aligned} \det B &= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}\sigma \cdot B_{\sigma_1}^1 \dots B_{\sigma_i}^i \dots B_{\sigma_j}^j \dots B_{\sigma_n}^n \\ &= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}\sigma \cdot A_{\sigma_1}^1 \dots (A_{\sigma_i}^i + cA_{\sigma_i}^j) \dots A_{\sigma_j}^j \dots A_{\sigma_n}^n \\ &= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}\sigma \cdot A_{\sigma_1}^1 \dots A_{\sigma_i}^i \dots A_{\sigma_j}^j \dots A_{\sigma_n}^n \\ &\quad + c\sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}\sigma \cdot A_{\sigma_1}^1 \dots A_{\sigma_i}^j \dots A_{\sigma_j}^j \dots A_{\sigma_n}^n \\ &= \det A + c\cdot 0 = \det A. \end{aligned}$$

Zde $\sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}\sigma \cdot A_{\sigma_1}^1 \dots A_{\sigma_i}^j \dots A_{\sigma_j}^j \dots A_{\sigma_n}^n = 0$, protože je to determinant matice, která má i-tý řádek stejný jako j-tý.

(2) Vznikne-li B z A vynásobením i-tého řádku prvkem c, pak $B_k^i = cA_k^i$ pro každé k a ostatní řádky matice B jsou stejné jako v matici A, načež

$$\begin{aligned} \det B &= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}\sigma \cdot B_{\sigma_1}^1 \dots B_{\sigma_i}^i \dots B_{\sigma_n}^n \\ &= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}\sigma \cdot A_{\sigma_1}^1 \dots cA_{\sigma_i}^i \dots A_{\sigma_n}^n \\ &= c\sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}\sigma \cdot A_{\sigma_1}^1 \dots A_{\sigma_i}^i \dots A_{\sigma_n}^n \\ &= c\det A. \end{aligned}$$

(3) Nechť $i < j$. Vznikne-li B z A vzájemnou výměnou i-tého a j-tého řádku, pak $B_k^i = A_k^j$ a $B_k^j = A_k^i$ pro každé k a ostatní řádky matice B jsou stejné jako v matici A. Označme σ' permutaci $\sigma \circ \tau_{ij}$. Pak $\sigma'_i = \sigma_j$, $\sigma'_j = \sigma_i$ a $\sigma'_k = \sigma_k$ pro

$k \neq i, j$ a máme

$$\begin{aligned}
\det B &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \cdot B^1_{\sigma_1} \dots B^i_{\sigma_i} \dots B^j_{\sigma_j} \dots B^n_{\sigma_n} \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \cdot A^1_{\sigma_1} \dots A^j_{\sigma_i} \dots A^i_{\sigma_j} \dots A^n_{\sigma_n} \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \cdot A^1_{\sigma_1} \dots A^i_{\sigma_j} \dots A^j_{\sigma_i} \dots A^n_{\sigma_n} \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \cdot A^1_{\sigma'_1} \dots A^i_{\sigma'_i} \dots A^j_{\sigma'_j} \dots A^n_{\sigma'_n} \\
&= -\sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma' \cdot A^1_{\sigma'_1} \dots A^i_{\sigma'_i} \dots A^j_{\sigma'_j} \dots A^n_{\sigma'_n} \\
&= -\det A.
\end{aligned}$$

Třetí rovnost plyne z komutativního zákona pro násobení, pátá plyne z rovnosti $\operatorname{sgn} \sigma' = -\operatorname{sgn} \sigma$ a poslední plyne z toho, že přiřazení $\sigma \mapsto \sigma'$ je bijekce $S_n \to S_n$, a proto σ' probíhá celou množinu S_n, pokud σ probíhá celou množinu S_n. □

Cvičení. Odvoďte vztah mezi $\det(cA)$ a $\det A$. ▷

Cvičení. Nechť A je matice typu $n \times n$ taková, že $A^\mathsf{T} = -A$ (taková matice se nazývá *antisymetrická*). Ukažte, že je-li n liché číslo, pak $\det A = 0$. ▷

Důsledek. *Buďte Q elementární matice a A matice stejného typu. Pak*

$$\det QA = \det Q \cdot \det A.$$

Důkaz. (1) $\det(E^{i,j}(c)A) = \det A = 1 \cdot \det A = \det E^{i,j}(c) \cdot \det A$.
(2) $\det(E^i(c)A) = c \det A = \det E^i(c) \cdot \det A$.
(3) $\det(E^{i,j}A) = (-1) \cdot \det A = \det E^{i,j} \cdot \det A$. □

Cvičení. Dokažte, že $\det E^{i,j} = -1$ s využitím předchozího důsledku a toho, že vzájemná výměna dvou řádků je složením konečně mnoha řádkových elementárních úprav ostatních druhů. ▷

Tvrzení 3.2.6. *Matice je regulární právě tehdy, když má nenulový determinant.*

Důkaz. Buď A regulární matice, tedy $A = Q_1 \cdots Q_k$, kde $Q_1, \dots, Q_k$ jsou elementární matice. Potom $\det A = \det(Q_1 \cdots Q_k) = \det Q_1 \cdot \det(Q_2 \cdots Q_k) = \cdots = \det Q_1 \cdot \det Q_2 \cdots \det Q_k$, což není rovno nule, protože determinanty elementárních matic jsou nenulové.

Nechť $\det A \neq 0$. Pomocí řádkových elementárních úprav převedeme A na schodovitý tvar B, tedy $B = Q_k \cdots Q_1 A$, kde $Q_1, \dots, Q_k$ jsou příslušné elementární matice. Potom $\det B = \det(Q_k \cdots Q_1 A) = \det Q_k \det(Q_{k-1} \cdots Q_1 A) = \cdots = \det Q_k \det Q_{k-1} \cdots \det Q_1 \det A \neq 0$. Jelikož B je ve schodovitém tvaru a její determinant je tedy součinem prvků na diagonále, na diagonále není žádná nula. To znamená, že B nemá nulový řádek, je tedy regulární a A také. □

Důsledek. *Matice je regulární právě tehdy, když má nenulový determinant, a to má právě tehdy, když je invertibilní, a to je právě tehdy, když je ekvivalentní jednotkové matici.*

Tvrzení 3.2.7 (Cauchyho věta)**.** *Buďte A, B čtvercové matice stejného typu. Pak*

$$\det AB = \det A \cdot \det B.$$

Důkaz. (1) Je-li A regulární, tedy součin $Q_1 Q_2 \cdots Q_k$ elementárních matic, pak

$$\begin{aligned}\det AB &= \det(Q_1 \cdots Q_k B) = \det Q_1 \cdot \det(Q_2 \cdots Q_k B) = \dots \\ &= \det Q_1 \det Q_2 \cdots \det Q_k \det B = \det(Q_1 Q_2 \cdots Q_k) \det B \\ &= \det A \det B.\end{aligned}$$

(2) Je-li A singulární, podle Tvrzení 2.5.5 je AB také singulární a tedy

$$\det AB = 0 = \det A = \det A \cdot \det B.$$ □

Cvičení. $\det A^{-1} = 1/\det A$. ▷

Cvičení. Dokažte, že pro determinanty lišící se pouze v jednom řádku platí

$$\begin{vmatrix} A^1_1 & \dots & A^1_n \\ & \dots & \\ A^i_1 & \dots & A^i_n \\ & \dots & \\ A^n_1 & \dots & A^n_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A^1_1 & \dots & A^1_n \\ & \dots & \\ B^i_1 & \dots & B^i_n \\ & \dots & \\ A^n_1 & \dots & A^n_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A^1_1 & \dots & A^1_n \\ & \dots & \\ A^i_1 + B^i_1 & \dots & A^i_n + B^i_n \\ & \dots & \\ A^n_1 & \dots & A^n_n \end{vmatrix}.$$ ▷

Lemma.

$$\begin{vmatrix} A^1_1 & \dots & A^1_k & A^1_{k+1} & \dots & A^1_n \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ A^k_1 & \dots & A^k_k & A^k_{k+1} & \dots & A^k_n \\ 0 & \dots & 0 & A^{k+1}_{k+1} & \dots & A^{k+1}_n \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & A^n_{k+1} & \dots & A^n_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A^1_1 & \dots & A^1_k \\ \vdots & & \vdots \\ A^k_1 & \dots & A^k_k \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A^{k+1}_{k+1} & \dots & A^{k+1}_n \\ \vdots & & \vdots \\ A^n_{k+1} & \dots & A^n_n \end{vmatrix}.$$

Říkáme, že determinant matice A se *rozpadl na subdeterminanty*: subdeterminant A' řádu k a subdeterminant A'' řádu $n-k$. Stručně ale výstižně pak toto tvrzení vyjadřujeme zápisem

$$\begin{vmatrix} A' & X \\ 0 & A'' \end{vmatrix} = |A'| \cdot |A''|.$$

3.2.3. Laplaceův rozvoj

Determinant řádu n lze převést na součet n determinantů řádu $n-1$.

Buď A matice typu $n \times n$. Determinant řádu $n-1$ matice vzniklé z A vynecháním i-tého řádku a j-tého sloupce se nazývá *minor* a značí se

$$\bar{A}^i_j.$$

Kofaktor (nebo také *algebraický doplněk*) prvku A^i_j je

$$\hat{A}^i_j = (-1)^{i+j} \bar{A}^i_j.$$

Tedy, kofaktor (algebraický doplněk) prvku A^i_j je $(-1)^{i+j}$-násobek determinantu matice, která vznikne z matice A vynecháním i-tého řádku a j-tého sloupce.

Tvrzení 3.2.8 (Laplaceova věta o rozvoji determinantu)**.** *Pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ platí*

$$\begin{aligned}\det A &= A^i_1 \hat{A}^i_1 + A^i_2 \hat{A}^i_2 + \dots + A^i_n \hat{A}^i_n = \sum_{j=1}^{n} A^i_j \hat{A}^i_j \\ &= A^1_i \hat{A}^1_i + A^2_i \hat{A}^2_i + \dots + A^n_i \hat{A}^n_i = \sum_{j=1}^{n} A^j_i \hat{A}^j_i.\end{aligned}$$

Uvedený vztah se nazývá *Laplaceův rozvoj podle i-tého řádku* resp. *podle i-tého sloupce.*

Důkaz.

$$\begin{aligned}\det A &= \begin{vmatrix} A^1_1 & \dots & A^1_{j-1} & A^1_j & A^1_{j+1} & \dots & A^1_n \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ A^i_1 & \dots & A^i_{j-1} & A^i_j & A^i_{j+1} & \dots & A^i_n \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ A^n_1 & \dots & A^n_{j-1} & A^n_j & A^n_{j+1} & \dots & A^n_n \end{vmatrix} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \begin{vmatrix} A^1_1 & \dots & A^1_{j-1} & A^1_j & A^1_{j+1} & \dots & A^1_n \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & A^i_j & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ A^n_1 & \dots & A^n_{j-1} & A^n_j & A^n_{j+1} & \dots & A^n_n \end{vmatrix} \\ &= \sum_{j=1}^{n} A^i_j \begin{vmatrix} A^1_1 & \dots & A^1_{j-1} & A^1_j & A^1_{j+1} & \dots & A^1_n \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ A^n_1 & \dots & A^n_{j-1} & A^n_j & A^n_{j+1} & \dots & A^n_n \end{vmatrix}.\end{aligned}$$

Ukažme, že

$$\begin{vmatrix} A^1_1 & \dots & A^1_{j-1} & A^1_j & A^1_{j+1} & \dots & A^1_n \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ A^n_1 & \dots & A^n_{j-1} & A^n_j & A^n_{j+1} & \dots & A^n_n \end{vmatrix} = \hat{A}^i_j.$$

Vyměňujme i-tý řádek $\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ s předchozími řádky tak dlouho, až bude prvním řádkem; k tomu je potřeba $i-1$ výměn. Poté vyměňujme j-tý sloupec $\begin{pmatrix} 1 & A^1_j & \dots & A^{i-1}_j & A^{i+1}_j & \dots & A^n_j \end{pmatrix}$ s předchozími sloupci tak dlouho, až bude prvním sloupcem; k tomu je potřeba $j-1$ výměn. Takto vzniklý determinant se rozpadne na subdeterminanty rovné $\det(1)$ a $\bar{A}^i_j$ a je tedy roven $\det(1) \cdot \bar{A}^i_j = \bar{A}^i_j$. Kvůli provedeným výměnám řádků a sloupců je nutné hodnotu determinantu vynásobit číslem $(-1)^{i-1}(-1)^{j-1} = (-1)^{i-1+j-1} = (-1)^{i+j}$. Celkem tedy $\det A = \sum_{j=1}^{n} A^i_j \cdot (-1)^{i+j} \bar{A}^i_j = \sum_{j=1}^{n} A^i_j \hat{A}^i_j$ a máme rozvoj podle i-tého řádku.

Rozvoj podle i-tého sloupce získáme analogicky. □

3.3. Adjungovaná matice

Buď A čtvercová matice. Označme $\hat{A}$ matici kofaktorů $\hat{A}^i_j$. Matice $\hat{A}^\mathsf{T}$ je matice *adjungovaná* k matici A a značí se $\operatorname{adj} A$. Tedy,

$$\operatorname{adj} A = \hat{A}^\mathsf{T}.$$

Tvrzení 3.3.1. *Buď A regulární matice (s nenulovým determinantem). Pak*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A, \qquad \textit{tedy} \quad \det A \cdot E = A \cdot \operatorname{adj} A = \operatorname{adj} A \cdot A.$$

Důkaz. Násobme $A \cdot \operatorname{adj} A$:

$$(A \cdot \operatorname{adj} A)^i_j = \sum_k A^i_k (\hat{A}^\mathsf{T})^k_j = \sum_k A^i_k \hat{A}^j_k.$$

Je-li $i = j$, dostáváme $(A \cdot \operatorname{adj} A)^i_i = \sum_k A^i_k \hat{A}^i_k = \det A$ podle Laplaceovy věty. Je-li $i \neq j$, dostáváme nulu. Skutečně, utvořme matici B, která se od A liší tím, že j-tý řádek je kopií i-tého, takže $\det B = 0$ (proč?). Podle Laplaceovy věty zase

$$\sum_k A^i_k \hat{A}^j_k = \sum_k B^i_k \hat{B}^j_k = \sum_k B^j_k \hat{B}^j_k = \det B = 0.$$

Vidíme, že matice $A \cdot \operatorname{adj} A$ je diagonální, přičemž na hlavní diagonále se stále opakuje prvek $\det A$. Tudíž,

$$A \cdot \operatorname{adj} A = \det A \cdot E.$$

Nyní stačí na obou stranách násobit zleva maticí A^{-1} a dělit nenulovým determinantem $\det A$. $\square$