

4. přednáška, 15. 10. 2020

Podle následujícího tvrzení řádkové ani sloupcové elementární úpravy nemění lineární závislost a nezávislost řádků.

Tvrzení 2.5.2. *Budte $A_{\bullet}^1, A_{\bullet}^2, \dots, A_{\bullet}^m$ řádky. Necht' $B_{\bullet}^1, B_{\bullet}^2, \dots, B_{\bullet}^m$ jsou řádky, které z řádků $A_{\bullet}^1, A_{\bullet}^2, \dots, A_{\bullet}^m$ vzniknou provedením jedné řádkové nebo sloupcové elementární úpravy. Potom řádky $A_{\bullet}^1, A_{\bullet}^2, \dots, A_{\bullet}^m$ jsou lineárně nezávislé právě tehdy, když řádky $B_{\bullet}^1, B_{\bullet}^2, \dots, B_{\bullet}^m$ jsou lineárně nezávislé.*

Důkaz. (1) Necht' došlo k přičtení c -násobku j -tého řádku k i -tému řádku, kde $i \neq j$. Tedy, $B_{\bullet}^i = A_{\bullet}^i + cA_{\bullet}^j$ a $B_{\bullet}^k = A_{\bullet}^k$ pro $k \neq i$.

Předpokládejme, že $A_{\bullet}^1, A_{\bullet}^2, \dots, A_{\bullet}^m$ jsou lineárně nezávislé. Budte $c_1, \dots, c_m \in P$ takové, že $c_1 B_{\bullet}^1 + \dots + c_m B_{\bullet}^m = 0_{\bullet}$. Pak

$$\begin{aligned} 0_{\bullet} &= c_1 B_{\bullet}^1 + \dots + c_m B_{\bullet}^m \\ &= c_1 A_{\bullet}^1 + \dots + c_i (A_{\bullet}^i + cA_{\bullet}^j) + \dots + c_j A_{\bullet}^j + \dots + c_m A_{\bullet}^m \\ &= c_1 A_{\bullet}^1 + \dots + c_i A_{\bullet}^i + \dots + (c_j + cc_i) A_{\bullet}^j + \dots + c_m A_{\bullet}^m. \end{aligned}$$

Z lineární nezávislosti řádků $A_{\bullet}^1, A_{\bullet}^2, \dots, A_{\bullet}^m$ vyplývá, že všechny koeficienty poslední lineární kombinace jsou nulové, tj. $c_1 = \dots = c_i = \dots = cc_i + c_j = \dots = c_m = 0$. Z toho dostaneme, že i $c_j = 0$, a řádky $B_{\bullet}^1, B_{\bullet}^2, \dots, B_{\bullet}^m$ jsou lineárně nezávislé.

Opačná implikace vyplývá z právě dokázané, neboť řádky $A_{\bullet}^1, A_{\bullet}^2, \dots, A_{\bullet}^m$ vzniknou z řádků $B_{\bullet}^1, B_{\bullet}^2, \dots, B_{\bullet}^m$ inverzní úpravou, která je stejného typu.

(2) Necht' došlo k přičtení c -násobku j -tého sloupce k i -tému sloupci, kde $i \neq j$. Pak pro každé $k \in \{1, \dots, m\}$ je $B_i^k = A_i^k + cA_j^k$ a $B_l^k = A_l^k$ pro $l \neq i$. Tedy $B_{\bullet}^k = (A_1^k \ \dots \ A_i^k + cA_j^k \ \dots \ A_j^k \ \dots \ A_n^k)$.

Předpokládejme, že $A_{\bullet}^1, A_{\bullet}^2, \dots, A_{\bullet}^m$ jsou lineárně nezávislé. Budte $c_1, \dots, c_m \in P$ takové, že $c_1 B_{\bullet}^1 + \dots + c_m B_{\bullet}^m = 0_{\bullet}$. Takže

$$\begin{aligned} c_1 B_{\bullet}^1 + \dots + c_m B_{\bullet}^m &= (\sum_k c_k A_1^k \ \dots \ \sum_k c_k (A_i^k + cA_j^k) \ \dots \ \sum_k c_k A_j^k \ \dots \ \sum_k c_k A_n^k) \\ &= (\sum_k c_k A_1^k \ \dots \ \sum_k c_k A_i^k + c \sum_k c_k A_j^k \ \dots \ \sum_k c_k A_j^k \ \dots \ \sum_k c_k A_n^k) \\ &= (0 \ \dots \ 0 \ \dots \ 0 \ \dots \ 0) \end{aligned}$$

a z toho dostaneme

$$\sum_k c_k A_1^k = \dots = \sum_k c_k A_i^k = \dots = \sum_k c_k A_j^k = \dots = \sum_k c_k A_n^k = 0.$$

Pak

$$\begin{aligned} (\sum_k c_k A_1^k \ \sum_k c_k A_2^k \ \dots \ \sum_k c_k A_n^k) &= \sum_k c_k (A_1^k \ A_2^k \ \dots \ A_n^k) \\ &= \sum_k c_k A_{\bullet}^k = c_1 A_{\bullet}^1 + \dots + c_m A_{\bullet}^m = 0_{\bullet}. \end{aligned}$$

a z lineární nezávislosti řádků $A_{\bullet}^1, A_{\bullet}^2, \dots, A_{\bullet}^m$ dostaneme $c_1 = c_2 = \dots = c_m = 0$. Řádky $B_{\bullet}^1, B_{\bullet}^2, \dots, B_{\bullet}^m$ jsou tedy lineárně nezávislé.

Opačná implikace vyplývá z právě dokázané, neboť řádky $A_{\bullet}^1, A_{\bullet}^2, \dots, A_{\bullet}^m$ vzniknou z řádků $B_{\bullet}^1, B_{\bullet}^2, \dots, B_{\bullet}^m$ inverzní úpravou, která je stejného typu.

Pro ostatní úpravy je důkaz obdobný a ponecháme ho jako cvičení. \square

Důsledek. (1) *Elementární úpravy nemění hodnotu.*

(2) *Vynásobení konečně mnoha elementárními maticemi zleva nemění hodnotu.*

(3) *Vynásobení konečně mnoha elementárními maticemi zprava nemění hodnotu.*

(4) *Ekvivalentní matice mají stejnou hodnotu.*

(5) *Hodnota matice je rovna počtu nenulových řádků (sloupců) ekvivalentní matice v Gaussově kanonickém tvaru.*

(6) *Maximální počet lineárně nezávislých sloupců matice je roven maximálnímu počtu jejích lineárně nezávislých řádků, tj. hodnotě matice.*

(7) $\text{rank } A = \text{rank } A^T$.

Tvrzení 2.5.3. *Hodnota matice ve schodovitém tvaru je rovna počtu jejích nenulových řádků.*

Důkaz. Nenulové řádky matice ve schodovitém tvaru jsou lineárně nezávislé (cvičení, např. převod na Gaussův–Jordanův tvar) a přidáme-li k nim další, nulový řádek, budou lineárně závislé. \square

Důsledek. *Hodnota matice je rovna počtu nenulových řádků ekvivalentní matice ve schodovitém tvaru.*

Příklad. Najděme hodnotu matice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Takže $\text{rank } A = 3$. ■

Příklad. Najděme hodnotu matice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Takže $\text{rank } A = 2$. ■

Čtvercová matice je *regulární*, jestliže její hodnota je rovna počtu jejích řádků (tedy její řádky jsou lineárně nezávislé). Čtvercová matice je *singulární*, jestliže není regulární.

Příklad. (1) Všechny jednotkové matice jsou regulární.

(2) Všechny elementární matice jsou regulární.

Tvrzení 2.5.4. *Matice je regulární právě tehdy, když je řádkově ekvivalentní s jednotkovou maticí.*

Důkaz. Cvičení. □

Důsledek. (1) *Matice je invertibilní právě tehdy, když je regulární.*

(2) *Regulární matice je součinem konečně mnoha elementárních matic.*

(3) *Součin regulárních matic je regulární matice.*

(4) *Vynásobení regulární maticí zleva nemění hodnotu.*

(5) *Vynásobení regulární maticí zprava nemění hodnotu.*

Tvrzení 2.5.5. *Budte A, B čtvercové matice stejného typu, aspoň jedna z nich singulární. Potom AB je singulární matice.*

Důkaz. Nechť A je singulární. Její schodovitý tvar $S = Q_k \cdots Q_1 A$, kde $Q_1 \cdots Q_k$ jsou elementární matice, má nulový řádek. Potom matice SB má také nulový řádek, je tedy singulární a řádkově ekvivalentní matice $AB = Q_1^{-1} \cdots Q_k^{-1} SB$, která má stejnou hodnotu, je také singulární.

Pro B singulární je důkaz analogický a ponecháme ho jako cvičení. □

Tvrzení 2.5.6. *Budte A matice typu $m \times n$ a B matice typu $n \times p$. Potom $\text{rank } AB \leq \min\{\text{rank } A, \text{rank } B\}$.*

Důkaz. Matici A převedeme pomocí řádkových elementárních úprav na schodovitý tvar $S_A = Q_k \cdots Q_1 A$ a matici B převedeme pomocí sloupcových elementárních úprav na tvar $S_B = B P_1 \cdots P_l$ takový, že S_B^T je ve schodovitém tvaru.

Potom $\text{rank } AB = \text{rank } Q_1^{-1} \cdots Q_k^{-1} S_A S_B P_l^{-1} \cdots P_1^{-1} = \text{rank } S_A S_B$, přičemž matice $S_A S_B$ má minimálně tolik nulových řádků, kolik jich má matice S_A , a minimálně tolik nulových sloupců, kolik jich má matice S_B . Tedy $\text{rank } S_A S_B \leq \text{rank } S_A = \text{rank } A$ a $\text{rank } S_A S_B \leq \text{rank } S_B = \text{rank } B$. □

Cvičení. Co se dá říct o $\text{rank}(A + B)$? ▷

3. DETERMINANT

3.1. Permutace

Bud' M konečná množina. *Permutace* na množině M je bijekce $M \rightarrow M$.

Bud' σ permutace na množině M a $m \in M$. Obraz $\sigma(m)$ prvku m při permutaci σ se často značí σ_m .

Transpozice je permutace, při níž se vzájemně vymění dva prvky a ostatní se nezmění.

Tvrzení 3.1.1. *Každá permutace je složením konečně mnoha transpozic.*

Nechť $I_n = \{1, 2, \dots, n\}$. Množinu všech permutací na množině I_n značíme S_n . Permutaci $\sigma \in S_n$ můžeme zapisovat jako uspořádanou n -tici obrazů prvků množiny I_n , tedy $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$.

Bud' $\sigma \in S_n$. Nechť $i, j \in I_n$ jsou takové, že $i < j$ a $\sigma_i > \sigma_j$. Pak dvojice (σ_i, σ_j) tvoří *inverzi* permutace σ .

Počet inverzí permutace σ značíme $\text{inv } \sigma$. Je zřejmé, že $\text{inv } \sigma = \text{inv } \sigma^{-1}$.

Signum (znaménko) permutace $\sigma \in S_n$ je $\text{sgn } \sigma = (-1)^{\text{inv } \sigma}$. Permutace s $\text{sgn } \sigma = 1$ je *sudá*, permutace s $\text{sgn } \sigma = -1$ je *lichá*.

Jelikož $\text{inv } \sigma = \text{inv } \sigma^{-1}$, $\text{sgn } \sigma = \text{sgn } \sigma^{-1}$.

Tvrzení 3.1.2. *Bud' $\rho, \sigma \in S_n$. Pak $\text{sgn}(\pi \circ \rho) = \text{sgn } \pi \cdot \text{sgn } \rho$.*

Cvičení. Uka'zte, že každá transpozice je lichá permutace. ▷

Více o permutacích lze najít například v [Marvan, 4. Permutace].

3.2. Determinant

3.2.1. Definice a determinanty některých typů matic

Bud' A matice typu $n \times n$ nad polem P . *Determinant* matice A je

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn } \sigma \cdot A_{\sigma_1}^1 A_{\sigma_2}^2 \cdots A_{\sigma_n}^n.$$

Tedy $\det A \in P$. Číslo n je *řád* determinantu.

Pro determinant matice A se používá značení

$$\det A = |A| = \det \begin{pmatrix} A_1^1 & A_2^1 & \cdots & A_n^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & \cdots & A_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_1^n & A_2^n & \cdots & A_n^n \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} A_1^1 & A_2^1 & \cdots & A_n^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & \cdots & A_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_1^n & A_2^n & \cdots & A_n^n \end{vmatrix}.$$

Díky tomu, že σ je permutace (bijektivní zobrazení) na množině I_n , můžeme ji chápat jako zobrazení z množiny všech řádkových indexů do množiny všech sloupcových indexů matice A . Ke každému řádku je tedy vzájemně jednoznačně přiřazen sloupec a v každém součinu $A_{\sigma_1}^1 \cdot A_{\sigma_2}^2 \cdots A_{\sigma_n}^n$ je tedy právě jeden prvek z každého řádku a právě jeden prvek z každého sloupce. Determinant matice A je tedy součet přes všechny permutace σ na množině I_n takovýchto součinů opatřených znaménkem $+$, jde-li o sudou, a znaménkem $-$, jde-li o lichou permutaci.

Příklad. (1) Nechť $n = 1$. Tedy, $I_1 = \{1\}$, $S_1 = \{\text{id}: \{1\} \rightarrow \{1\}\}$ a $\text{sgn id} = 1$. Pro matici $A = (a)$ je $\det A = \text{sgn id} \cdot A_{\text{id}_1}^1 = 1 \cdot A_1^1 = a$.

(2) Nechť $n = 2$. Tedy, $I_2 = \{1, 2\}$, $S_2 = \{\text{id}, \tau\}$, kde $\text{id} = (1, 2)$ a $\tau = (2, 1)$ (viz zápis permutace na I_n), $\text{sgn id} = 1$ a $\text{sgn } \tau = -1$. Pro matici

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

je $\det A = \text{sgn id} \cdot A_{\text{id}_1}^1 A_{\text{id}_2}^2 + \text{sgn } \tau \cdot A_{\tau_1}^1 A_{\tau_2}^2 = 1 \cdot A_1^1 A_2^2 + (-1) \cdot A_2^1 A_1^2 = ad - bc$. Vzorec pro výpočet determinantu matice druhého řádu je možno odvodit z následujícího obrázku:

$$\begin{array}{c} \oplus \quad \ominus \\ \swarrow \quad \searrow \\ \begin{vmatrix} A_1^1 & A_2^1 \\ A_1^2 & A_2^2 \end{vmatrix} \\ \swarrow \quad \searrow \\ \ominus \quad \oplus \end{array} = A_1^1 A_2^2 - A_2^1 A_1^2$$

(3) Nechť $n = 3$. Tedy, $I_3 = \{1, 2, 3\}$, $S_3 = \{\text{id}, \sigma_1, \sigma_2, \tau_1, \tau_2, \tau_3\}$, kde $\text{id} = (1, 2, 3)$, $\sigma_1 = (2, 3, 1)$, $\sigma_2 = (3, 1, 2)$, $\tau_1 = (1, 3, 2)$, $\tau_2 = (3, 2, 1)$, $\tau_3 = (2, 1, 3)$ (viz zápis permutace na I_n), $\text{sgn id} = \text{sgn } \sigma_1 = \text{sgn } \sigma_2 = 1$ a $\text{sgn } \tau_1 = \text{sgn } \tau_2 = \text{sgn } \tau_3 = -1$. Pro matici

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

je

$$\begin{aligned} \det A &= \text{sgn id} \cdot A_{\text{id}_1}^1 A_{\text{id}_2}^2 A_{\text{id}_3}^3 + \text{sgn } \sigma_1 \cdot A_{\sigma_1(1)}^1 A_{\sigma_1(2)}^2 A_{\sigma_1(3)}^3 \\ &\quad + \text{sgn } \sigma_2 \cdot A_{\sigma_2(1)}^1 A_{\sigma_2(2)}^2 A_{\sigma_2(3)}^3 + \text{sgn } \tau_1 \cdot A_{\tau_1(1)}^1 A_{\tau_1(2)}^2 A_{\tau_1(3)}^3 \\ &\quad + \text{sgn } \tau_2 \cdot A_{\tau_2(1)}^1 A_{\tau_2(2)}^2 A_{\tau_2(3)}^3 + \text{sgn } \tau_3 \cdot A_{\tau_3(1)}^1 A_{\tau_3(2)}^2 A_{\tau_3(3)}^3 \\ &= 1 \cdot A_1^1 A_2^2 A_3^3 + 1 \cdot A_2^1 A_3^2 A_1^3 + 1 \cdot A_3^1 A_1^2 A_2^3 \\ &\quad + (-1) \cdot A_1^1 A_3^2 A_2^3 + (-1) \cdot A_3^1 A_2^2 A_1^3 + (-1) \cdot A_2^1 A_1^2 A_3^3 \\ &= aei + bfg + cdh - afh - ceg - bdi. \end{aligned}$$

Vzorec pro výpočet determinantu matice třetího řádu lze odvodit z následujícího obrázku pomocí *Sarrusova pravidla* (pro matice vyššího řádu žádné takové pravidlo neexistuje):

$$\begin{aligned} &= A_1^1 A_2^2 A_3^3 + A_2^1 A_3^2 A_1^3 + A_3^1 A_1^2 A_2^3 \\ &\quad - A_1^1 A_3^2 A_2^3 - A_3^1 A_2^2 A_1^3 - A_2^1 A_1^2 A_3^3 \end{aligned}$$

(4) Nechť $n = 4$. Na čtyřprvkové množině existují 24 permutace, takže při výpočtu determinantu podle definice dostaneme 24 sčítance. Uvedeme si i jiné způsoby výpočtu determinantu.

LITERATURA

[Marvan] M. Marvan, Algebra I a II, Učební texty Matematického ústavu v Opavě, Slezská univerzita v Opavě, dostupné na <https://www.slu.cz/math/cz/knihovnaucbenitextymu>.