3. přednáška, 8. 10. 2020

Tvrzení 2.4.2. *Nechť $A, A_1, \dots, A_n$ jsou invertibilní matice stejného typu. Potom*

(1) $A_1 \cdot \ldots \cdot A_n$ je invertibilní a $(A_1 \cdot \ldots \cdot A_n)^{-1} = A_n^{-1} \cdot \ldots \cdot A_1^{-1}$;
(2) A^{-1} je invertibilní a $(A^{-1})^{-1} = A$;
(3) A^T je invertibilní a $(A^\mathsf{T})^{-1} = (A^{-1})^\mathsf{T}$.

Důkaz. (1) $(A_1 \cdot \ldots \cdot A_n) \cdot (A_n^{-1} \cdot \ldots \cdot A_1^{-1}) = E = (A_n^{-1} \cdot \ldots \cdot A_1^{-1}) \cdot (A_1 \cdot \ldots \cdot A_n)$ a podle definice inverzní matice tedy $(A_1 \cdot \ldots \cdot A_n)^{-1} = A_n^{-1} \cdot \ldots \cdot A_1^{-1}$.

(2) $AA^{-1} = A^{-1}A = E$ a podle definice inverzní matice tedy $(A^{-1})^{-1} = A$.

(3) $AA^{-1} = A^{-1}A = E$, tedy $E = E^\mathsf{T} = (A^{-1}A)^\mathsf{T} = A^\mathsf{T}(A^{-1})^\mathsf{T}$ a $E = (AA^{-1})^\mathsf{T} = (A^{-1})^\mathsf{T}A^\mathsf{T}$ a podle definice inverzní matice $(A^\mathsf{T})^{-1} = (A^{-1})^\mathsf{T}$. □

Tvrzení 2.4.3. *Nechť A, B jsou čtvercové matice takové, že $AB = E$. Pak také $BA = E$, obě matice A, B jsou invertibilní a jsou vzájemně inverzní ($A = B^{-1}$ a $B = A^{-1}$).*

Důkaz. Matici A upravíme na Gaussův–Jordanův tvar G, tedy $G = Q_k \dots Q_1 A$, kde $Q_1, \dots, Q_k$ jsou elementární matice příslušné provedeným řádkovým elementárním úpravám. Pak $A = Q_1^{-1} \dots Q_k^{-1} G$ a $AB = Q_1^{-1} \dots Q_k^{-1} GB = E$. Kdyby matice G měla nulový řádek, matice GB by také měla nulový řádek a takovou matici nelze pomocí řádkových elementárních úprav (v tomto případě reprezentovaných maticemi $Q_1^{-1}, \dots, Q_k^{-1}$) převést na jednotkovou matici (cvičení). Jelikož G je v Gaussově–Jordanově tvaru a nemá nunový řádek, $G = E$. Pak $A = Q_1^{-1} \dots Q_k^{-1}$ je invertibilní matice jakožto součin invertibilních matic a existuje tedy A^{-1}.

Potom $BA = EBA = A^{-1}ABA = A^{-1}EA = A^{-1}A = E$. Jelikož $AB = BA = E$, jsou obě matice A, B invertibilní a jsou vzájemně inverzní. □

Nyní zformulujeme důležité kriterium invertibility.

Tvrzení 2.4.4. *Matice je invertibilní právě tehdy, když je řádkově ekvivalentní s jednotkovou maticí.*

Důkaz. „$\Rightarrow$“ Předpokládejme, že matice A typu $n \times n$ je invertibilní. Pomocí řádkových ekvivalentních úprav (Algoritmu 2) ji převeďme na Gaussův–Jordanův tvar B, $A \sim B$. Existují tedy elementární matice $Q_1, \dots, Q_k$ odpovídající jednotlivým úpravám takové, že $Q_k \dots Q_1 A = B$. Označme $Q = Q_k \dots Q_1$. Každá z matic $Q_1, \dots, Q_k, A$ je invertibilní a jejich součin B je tedy také invertibilní. Invertibilní matice nemá žádný řádek nulový, jinak by její součin s jakoukoliv (i svou inverzní) maticí byla opět matice s nulovým řádkem, což jednotková matice není. Takže v matici B je právě n hlavních prvků a $B = E$, jelikož B je v Gaussově–Jordanově tvaru. Matice A je tedy řádkově ekvivalentní s jednotkovou maticí.

„$\Leftarrow$“ Nyní předpokládejme, že matice A je řádkově ekvivalentní s jednotkovou maticí E, tedy že ji lze pomocí konečně mnoha, k, řádkových elementárních úprav převést na E. K těmto úpravám existují elementární matice $Q_1, Q_2, \dots, Q_k$ takové, že $Q_k \dots Q_2 Q_1 A = E$. Označme si $Q = Q_k \dots Q_2 Q_1$, tedy $QA = E$. Matice Q je invertibilní jako součin invertibilních matic a $Q^{-1} = Q^{-1}E = Q^{-1}QA = EA = A$. Podle Tvrzení 2.4.2(2) je A také invertibilní a $A^{-1} = (Q^{-1})^{-1} = Q$. □

Předchozí tvrzení nám nabízí postup pro výpočet inverzní matice. Podle důkazu totiž $A^{-1} = Q = Q_k \dots Q_2 Q_1 = Q_k \dots Q_2 Q_1 E$, což je matice, která vznikne z jednotkové matice provedením řádkových elementárních úprav odpovídajících násobení elementárními maticemi $Q_1, Q_2, \ldots, Q_k$. To jsou stejné úpravy (resp. matice), které převedly A na E.

Algoritmus (výpočet inverzní matice) Buď A matice typu $n \times n$. Sestavme matici typu $n \times 2n$ tak, že k matici A připojíme zprava jednotkovou matici vhodného typu

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} A_1^1 & A_2^1 & \ldots & A_n^1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ A_1^2 & A_2^2 & \ldots & A_n^2 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_1^m & A_2^m & \ldots & A_n^m & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{array}\right).$$

Řádkovými elementárními úpravami ji převedeme na matici, která v levé části má matici B v Gaussově–Jordanově tvaru. Mohou nastat dvě možnosti.

(1) $B = E$, pak A je invertibilní a v pravé části matice vyjde A^{-1}.
(2) $B \neq E$ (B má nulový řádek), pak A není invertibilní.

Příklad. Najděme inverzní matici k matici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned}
(A|E) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \\
&\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \\
&\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \sim \\
&\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right).
\end{aligned}$$

Takže A je invertibilní a

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{(ověřte).}$$

■

Příklad. Hledejme inverzní matici k matici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$
\begin{aligned}
(A|E) = &\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \\
\sim &\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \\
\sim &\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 2 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right).
\end{aligned}
$$

Matice A tedy není řádkově ekvivalentní s jednotkovou maticí a není invertibilní. ■

2.5. Hodnost matice

2.5.1. Lineární nezávislost

Definice a tvrzení formulujeme pouze pro řádky matice, ale vše lze obdobně formulovat pro sloupce a uspořádané n-tice.

Buďte $c_1, c_2, \dots, c_k \in P$. *Lineární kombinace* řádků $A_\bullet^{i_1}, A_\bullet^{i_2}, \dots, A_\bullet^{i_k}$ s *koeficienty* $c_1, c_2, \dots, c_k$ je

$$c_1 A_\bullet^{i_1} + c_2 A_\bullet^{i_2} + \dots + c_k A_\bullet^{i_k} = \sum_{j=1}^{k} c_j A_\bullet^{i_j}.$$

Řádky $A_\bullet^{i_1}, A_\bullet^{i_2}, \dots, A_\bullet^{i_k}$ jsou *lineárně nezávislé*, jestliže z rovnosti

$$c_1 A_\bullet^{i_1} + c_2 A_\bullet^{i_2} + \dots + c_k A_\bullet^{i_k} = 0_\bullet$$

vyplývá $c_1 = c_2 = \dots = c_k = 0$, tj. nulový řádek získáme jedině takovou lineární kombinací daných řádků, ve které jsou všechny koeficienty rovny nule.

Řádky $A_\bullet^{i_1}, A_\bullet^{i_2}, \dots, A_\bullet^{i_k}$ jsou *lineárně závislé*, jestliže nejsou lineárně nezávislé. Tedy, existují $c_1, c_2, \dots, c_k \in P$ taková, že aspoň jedno z nich je nenulové a přitom

$$c_1 A_\bullet^{i_1} + c_2 A_\bullet^{i_2} + \dots + c_k A_\bullet^{i_k} = 0_\bullet.$$

Tvrzení 2.5.1. *Řádky jsou lineárně závislé právě tehdy, když aspoň jeden z nich je lineární kombinací ostatních.*

Důkaz. Předpokládejme, že řádky $A_\bullet^{i_1}, A_\bullet^{i_2}, \dots, A_\bullet^{i_k}$ jsou lineárně závislé. Existují tedy koeficienty $c_1, c_2, \dots, c_k \in P$ takové, že aspoň jeden z nich je nenulový (například c_j) a $c_1 A_\bullet^{i_1} + \dots + c_j A_\bullet^{i_j} + \dots + c_k A_\bullet^{i_k} = 0_\bullet$. Potom

$$
\begin{aligned}
c_j A_\bullet^{i_j} &= -c_1 A_\bullet^{i_1} - \dots - c_{j-1} A_\bullet^{i_{j-1}} - c_{j+1} A_\bullet^{i_{j+1}} - \dots - c_k A_\bullet^{i_k}, \\
A_\bullet^{i_j} &= -\frac{c_1}{c_j} A_\bullet^{i_1} - \dots - \frac{c_{j-1}}{c_j} A_\bullet^{i_{j-1}} - \frac{c_{j+1}}{c_j} A_\bullet^{i_{j+1}} - \dots - \frac{c_k}{c_j} A_\bullet^{i_k}
\end{aligned}
$$

a řádek $A_\bullet^{i_j}$ je tedy lineární kombinací ostatních řádků.

Předpokládejme, že například řádek $A^{i_j}_\bullet$ je lineární kombinací ostatních řádků, tedy

$$A^{i_j}_\bullet = c_1 A^{i_1}_\bullet + \cdots + c_{j-1} A^{i_{j-1}}_\bullet + c_{j+1} A^{i_{j+1}}_\bullet + \cdots + c_k A^{i_k}_\bullet .$$

Potom

$$c_1 A^{i_1}_\bullet + \cdots + c_{j-1} A^{i_{j-1}}_\bullet - A^{i_j}_\bullet + c_{j+1} A^{i_{j+1}}_\bullet + \cdots + c_k A^{i_k}_\bullet = 0_\bullet$$

a zároveň $c_j = -1$. Takže řádky $A^{i_1}_\bullet, A^{i_2}_\bullet, \ldots, A^{i_k}_\bullet$ jsou lineárně závislé. □

Příklad. Mějme

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nechť

$$\begin{aligned} & c_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ & \quad = \begin{pmatrix} c_2 + c_3 & c_1 + 2c_2 & 2c_1 + 3c_2 + c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Takže

$$\begin{aligned} c_2 + c_3 &= 0 \\ c_1 + 2c_2 \phantom{{}+ c_3} &= 0 \\ 2c_1 + 3c_2 + c_3 &= 0 \end{aligned}$$

a to je možné jedině v případě, že $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ (vyřešíme soustavu tří rovnic o třech neznámých c_1, c_2, c_3 a získáme jediné, nulové řešení).

Řádky matice A jsou tedy lineárně nezávislé. ■

Příklad. Mějme

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nechť

$$\begin{aligned} & c_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \\ & \quad = \begin{pmatrix} c_2 + 2c_3 & c_1 + 2c_2 + c_3 & 2c_1 + 3c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Soustava

$$\begin{aligned} c_2 + 2c_3 &= 0 \\ c_1 + 2c_2 + c_3 &= 0 \\ 2c_1 + 3c_2 \phantom{{}+ c_3} &= 0 \end{aligned}$$

má kromě nulového i nenulová řešení (například $c_1 = 3$, $c_2 = -2$, $c_3 = 1$). Řádky matice A jsou tedy lineárně závislé. ■

Příklad. (1) Řádky jednotkové matice jsou lineárně nezávislé. Ověřte.

(2) Řádky, z nichž aspoň jeden je nulový, jsou lineárně závislé. Ověřte.

(3) Jeden řádek $A^i_\bullet$ je lineárně nezávislý, jestliže z $cA^i_\bullet = 0_\bullet$ plyne $c = 0$. Tedy, jeden řádek je lineárně nezávislý, jestliže je nenulový, a je lineárně závislý, jestliže je nulový.

(4) Dva řádky $A^{i_1}_{\bullet}, A^{i_2}_{\bullet}$ jsou lineárně závislé právě tehdy, když jeden z nich je násobkem druhého (existuje $c \in P$ takové, že $A^{i_1}_{\bullet} = cA^{i_2}_{\bullet}$). ■

2.5.2. Hodnost matice

Hodnost matice je maximální počet jejích lineárně nezávislých řádků. Hodnost matice A značíme $\operatorname{rank} A$.

Příklad. (1) Hodnost matice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

je rovna 3. Ověřte.

(2) Hodnost matice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

je rovna 2. Ověřte.

(3) Hodnost nulové matice je rovna 0, hodnost nenulové matice je kladná.

(4) Hodnost diagonální matice je rovna počtu jejích nenulových řádků. ■