2. přednáška, 1. 10. 2020

### 2.2.2. Součin

Buďte $A = (A^i_j)_{m\times n}$, $B = (B^i_j)_{n\times p}$ matice nad polem $P$. Matice $B$ má tedy tolik řádků, kolik má matice $A$ sloupků. *Součin* matic $A, B$ (v tomto pořadí) je matice $A \cdot B = AB$ typu $m \times p$ daná předpisem: pro všechna $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, $j \in \{1, 2, \dots, p\}$

$$(AB)^i_j = A^i_1 B^1_j + A^i_2 B^2_j + \cdots + A^i_n B^n_j = \sum_{k=1}^{n} A^i_k B^k_j .$$

Prvek matice $AB$ v $i$-tém řádku a $j$-tém sloupci získáme tedy tak, že sečteme součiny prvků v $i$-tém řádku matice $A$ s odpovídajícími prvky v $j$-tém sloupci matice $B$.

Nejsou-li typy matic v uvedeném vztahu (druhá má tolik řádků, kolik má první sloupků), příslušný součin neexistuje.

**Příklad.** (1)

$$\text{Pro } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ je } AB = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 8 \end{pmatrix},\ BA = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 7 & 10 \end{pmatrix}.$$

(2)

$$\text{Pro } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ je } AB = \begin{pmatrix} 11 \end{pmatrix},\ BA = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

(3)

$$\text{Pro } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ je } AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix},\ BA \text{ neexistuje.}$$ ■

Předcházející příklady ukazují, že násobení matic není komutativní, tedy nemusí platit $AB = BA$.

**Tvrzení 2.2.2.** *Nechť $A, B, C$ jsou matice nad polem $P$ takové, že níže uvedené operace jsou definovány, a $c \in P$. Pak platí*

*(1)* $A(BC) = (AB)C$,
*(2)* $AE = EA = A$,
*(3)* $A(B + C) = AB + AC$,
*(4)* $(A + B)C = AC + BC$,
*(5)* $c(AB) = (cA)B = A(cB)$.

*Důkaz.* Uvedeme jen důkaz bodu (3), ostatní ponecháme jako cvičení.

(3) Předpokládejme, že $A$ je matice typu $m \times n$ a $B, C$ jsou matice typu $n \times p$. Potom $A(B+C)$ a $AB+AC$ jsou matice typu $m\times p$ a pro každé $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ a $j \in \{1, 2, \dots, p\}$ platí

$$\begin{aligned}
(A(B + C))^i_j &= \sum_{k=1}^{n} A^i_k (B + C)^k_j = \sum_{k=1}^{n} A^i_k (B^k_j + C^k_j) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (A^i_k B^k_j + A^i_k C^k_j) = \sum_{k=1}^{n} A^i_k B^k_j + \sum_{k=1}^{n} A^i_k C^k_j \\
&= (AB)^i_j + (AC)^i_j = (AB + AC)^i_j .
\end{aligned}$$ □

### 2.2.3. Transponování

*Transponovaná* matice k matici $A = (A^i_j)_{m\times n}$ je matice $A^\mathsf{T} = ((A^\mathsf{T})^i_j)_{n\times m}$, kde $(A^\mathsf{T})^i_j = A^j_i$ pro všechna $i, j$.

**Příklad.**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^\mathsf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$ ■

**Tvrzení 2.2.3.** *Nechť $A, B$ jsou matice nad polem $P$ takové, že níže uvedené operace jsou definovány, a $c \in P$. Pak platí*

*(1)* $A = (A^\mathsf{T})^\mathsf{T}$,
*(2)* $(A+B)^\mathsf{T} = A^\mathsf{T} + B^\mathsf{T}$,
*(3)* $(cA)^\mathsf{T} = cA^\mathsf{T}$,
*(4)* $(AB)^\mathsf{T} = B^\mathsf{T} A^\mathsf{T}$.

*Důkaz.* (1) Je-li $A$ typu $m \times n$, potom $A^\mathsf{T}$ je typu $n \times m$ a $(A^\mathsf{T})^\mathsf{T}$ je typu $m \times n$. Navíc pro každé $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ a $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ platí

$$((A^\mathsf{T})^\mathsf{T})^i_j = (A^\mathsf{T})^j_i = A^i_j.$$

(4) Buďte $A$ matice typu $m \times n$ a $B$ matice typu $n \times p$. Pak $A^\mathsf{T}$ je typu $n \times m$, $B^\mathsf{T}$ je typu $p \times n$, $AB$ je typu $m \times p$ a tedy $(AB)^\mathsf{T}$ i $B^T A^\mathsf{T}$ jsou typu $p \times m$. Pro každé $i \in \{1, 2, \ldots, p\}$ a $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ platí

$$\begin{aligned} ((AB)^\mathsf{T})^i_j = (AB)^j_i = \sum_{k=1}^{n} A^j_k B^k_i = \sum_{k=1}^{n} B^k_i A^j_k = \sum_{k=1}^{n} (B^\mathsf{T})^i_k (A^\mathsf{T})^k_j \\ = (B^\mathsf{T} A^\mathsf{T})^i_j. \end{aligned}$$

Ostatní body jsou ponechány jako cvičení. □

***Cvičení.*** Bod (4) v předcházejícím tvrzení lze zobecnit na případ $k$ matic: $(A_1 \cdots A_k)^\mathsf{T} = A_k^\mathsf{T} \cdots A_1^\mathsf{T}$. ▷

## 2.3. Elementární úpravy

### 2.3.1. Elementární úpravy

*Řádkové elementární úpravy* matice jsou

(1) přičtení $c$-násobku $j$-tého řádku k $i$-tému řádku, kde $i \neq j$,
(2) vynásobení $i$-tého řádku nenulovým prvkem $c \in P$,
(3) výměna $i$-tého a $j$-tého řádku.

*Sloupcové elementární úpravy* matice definujeme analogicky.

***Cvičení.*** Proveďte vzájemnou výměnu dvou řádků pomocí konečně mnoha úprav typů (1) a (2). ▷

Mějme matici $A$. Řádkovou elementární úpravou typu (1) změníme $i$-tý řádek na $\begin{pmatrix} A^i_1 + cA^j_1 & A^i_2 + cA^j_2 & \ldots & A^i_n + cA^j_n \end{pmatrix}$ a ostatní řádky zůstanou beze změny. Řádkovou úpravou typu (2) změníme $i$-tý řádek na $\begin{pmatrix} cA^i_1 & cA^i_2 & \ldots & cA^i_n \end{pmatrix}$ a ostatní řádky zůstanou beze změny.

Řádkovou úpravou typu (3) vzájemně vyměníme $i$-tý řádek s $j$-tým, tedy $i$-tý řádek bude $\begin{pmatrix} A_1^j & A_2^j & \dots & A_n^j \end{pmatrix}$, $j$-tý řádek bude $\begin{pmatrix} A_1^i & A_2^i & \dots & A_n^i \end{pmatrix}$ a ostatní řádky zůstanou beze změny.

Sloupcové úpravy fungují analogicky pro sloupce.

**Příklad.** (1) Přičtením $-2$-násobku prvního řádku k druhému řádku upravíme matici

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{na matici} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(2) Vzájemnou výměnou prvního a třetího sloupce upravíme matici

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{na matici} \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$ ■

Ke každé elementární úpravě existuje úprava inverzní, která je také elementární a upravenou matici převede zpět na původní matici. Inverzní úpravy k řádkovým úpravám jsou

(1) přičtení $-c$-násobku $j$-tého řádku k $i$-tému řádku,
(2) vynásobení $i$-tého řádku prvkem $c^{-1}$,
(3) výměna $i$-tého a $j$-tého řádku.

Inverzní úpravy ke sloupcovým úpravám jsou obdobné.

**Příklad.** (1) Přičtením 2-násobku prvního řádku k druhému řádku upravíme matici

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{na matici} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

(2) Vzájemnou výměnou prvního a třetího sloupce upravíme matici

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{na matici} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$ ■

Matice $A, B$ jsou *ekvivalentní*, jestliže $B$ může vzniknout z $A$ konečnou posloupností elementárních úprav. Je-li možné toho dosáhnout pomocí pouze řádkových, resp. sloupcových úprav, říkáme také, že matice jsou *řádkově*, resp. *sloupcově ekvivalentní.* V každém případě značíme $A \sim B$.

**Příklad.**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$ ■

**Tvrzení 2.3.1.** *Ekvivalence matic je relace ekvivalence na množině všech matic stejného typu nad stejným polem.*

*Důkaz.* Cvičení. □

### 2.3.2. Schodovitý, Gaussův–Jordanův a Gaussův kanonický tvary matic

Matice je ve *schodovitém tvaru*, jestliže každý nenulový řádek, kromě prvního, začíná zleva více nulami než řádek předchozí. To znamená, že za nulovým řádkem následují jen nulové řádky.

*Hlavní prvek* nenulového řádku matice je první (zleva) nenulový prvek tohoto řádku.

Matice je v *Gaussově–Jordanově tvaru*, jestliže

(i) je ve schodovitém tvaru,
(ii) všechny hlavní prvky jsou 1,
(iii) ve sloupci nad (a nejen pod) každým hlavním prvkem jsou jen 0.

*Gaussův kanonický tvar* matice je

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

kde $E$ je jednotková matice a 0 označuje nulové matice příslušných typů.

**Příklad.** Nechť

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Matice $A$ není ve schodovitém tvaru. Matice $B$ je ve schodovitém tvaru, ale není v Gaussově–Jordanově tvaru. Matice $C$ je v Gaussově–Jordanově tvaru. ■

Převod matice na schodovitý, resp. Gaussův–Jordanův, resp. Gaussův kanonický tvar pomocí elementárních úprav se nazývá *Gaussova eliminace*. Uvedeme si dva algoritmy, které převádějí matici na schodovitý, resp. Gaussův–Jordanův tvar. Použijeme formulaci z [Marvan, 5. Matice. Elementární úpravy].

*Hlavní pozice* je místo v matici, schopné pojmout hlavní prvek. *Hlavní řádek (sloupec)* matice je řádek (sloupec) obsahující hlavní pozici. Indexy $k, l$ vždy označují hlavní pozici.

**Algoritmus 1** (transformace na schodovitý tvar) Vstupem je matice $A$.

(1) Počáteční hlavní pozice budiž $(1, 1)$ (tj. $k := 1, l := 1$).
(2) Je-li na hlavní pozici nenulový prvek, bude hlavním prvkem a pokračujeme krokem (5).
(3) Je-li v hlavním sloupci pod hlavní pozicí aspoň jeden nenulový prvek, vybereme jeden z nich a zaměníme jeho řádek s hlavním řádkem. Vybraný prvek se tak stane hlavním prvkem. Pokračujeme krokem (5).
(4) Jsou-li všechny prvky ležící v hlavním sloupci na hlavní pozici a pod ní nulové, pak nynější hlavní pozice nedovoluje obsadit hlavní prvek. Posuneme hlavní pozici o jedno místo vpravo ($l := l + 1$) a vracíme se ke kroku (2).
(5) V tomto okamžiku je již nalezen nenulový hlavní prvek $A^k_l$. Hlavní řádek vydělíme hlavním prvkem. Poté je hlavní prvek roven jedné: $A^k_l = 1$.
(6) Pro všechna $i > k$, k $i$-tému řádku matice přičteme $-A^i_l$-násobek hlavního řádku. Poté již $A^i_l = 0$ pro všechna $i > k$ (anulují se všechny prvky pod hlavní pozicí).
(7) Skončil vnější cyklus algoritmu; během něho byl nalezen jeden hlavní prvek. Zvolíme novou hlavní pozici o jeden krok vpravo dole od stávající hlavní pozice ($k := k + 1$, $l := l + 1$). Vracíme se ke kroku (2), hledáme další hlavní prvek.

Algoritmus končí, padne-li hlavní pozice mimo matici. Výstupem je upravená matice.

**Tvrzení 2.3.2.** *Každá matice je řádkově ekvivalentní matici ve schodovitém tvaru.*

*Důkaz.* Algoritmus 1 převádí libovolnou matici na řádkově ekvivalentní matici ve schodovitém tvaru. Je nutno ověřit, že všechny manipulace s řádky byly elementárními úpravami. Přitom se vlevo od hlavních prvků po celý průběh algoritmu vyskytují pouze nulové prvky. Cvičení. □

Algoritmem 1 dosahujeme i toho, že platí podmínka (ii) z definice Gaussova–Jordanova tvaru. Ke splnění podmínky (iii) stačí nepatrně změnit krok (6).

**Algoritmus 2** (transformace na Gaussův–Jordanův tvar) Probíhá stejně jako Algoritmus 1, ale šestý krok je nahrazen následujícím:

(6′) Pro všechna $i \neq k$, k $i$-tému řádku matice přičteme $-A^i_l$-násobek hlavního řádku. Poté již $A^i_l = 0$ pro všechna $i \neq k$ (anulují se všechny prvky nad a pod hlavní pozicí).

**Tvrzení 2.3.3.** *Každá matice je řádkově ekvivalentní matici v Gaussově–Jordanově tvaru.*

*Důkaz.* Algoritmus 2 převádí libovolnou matici na řádkově ekvivalentní matici v Gaussově–Jordanově tvaru. Cvičení. □

**Tvrzení 2.3.4.** *Každá matice je ekvivalentní matici v Gaussově kanonickém tvaru.*

*Důkaz.* Úpravou Algoritmu 2 a s použitím sloupcových elementárních úprav získáme algoritmus, který převádí libovolnou matici na ekvivalentní matici v Gaussově kanonickém tvaru. Cvičení. □

### 2.3.3. Elementární matice

*Elementární matice* jsou čtvercové matice jednoho z následujících tvarů:

(1)

$$E^{i,j}(c) = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ & \dots & & \dots & & \dots & \\ 0 & \dots & 1 & \dots & c & \dots & 0 \\ & \dots & & \dots & & \dots & \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ & \dots & & \dots & & \dots & \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{matrix} \end{array}$$

kde $i \neq j$. Matice $E^{i,j}(c)$ se od jednotkové matice $E$ liší jen tím, že prvek $(E^{i,j}(c))^i_j$ je roven $c$, zatímco $E^i_j = 0$.

(2)

$$E^i(c) = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ & \dots & & \dots & \\ 0 & \dots & c & \dots & 0 \\ & \dots & & \dots & \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ i \\ \\ \\ \end{matrix} \end{array}$$

kde $c \neq 0$. Matice $E^i(c)$ se od jednotkové matice $E$ liší jen tím, že prvek $(E^i(c))^i_i$ je roven $c$, zatímco $E^i_i = 1$.

(3)

$$
E^{i,j} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ & \dots & & \dots & & \dots & \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ & \dots & & \dots & & \dots & \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ & \dots & & \dots & & \dots & \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array}
$$

kde $i \neq j$. Matice $E^{i,j}$ se od jednotkové matice liší jen tím, že $i$-tý a $j$-tý řádky jsou vyměněny.

Každá z elementárních matic vzniká z jednotkové matice provedením jedné ze tří řádkových nebo sloupcových elementárních úprav.

**Lemma.** *Provedení řádkové elementární úpravy matice $A$ je to samé jako vynásobení $QA$ vhodnou elementární maticí $Q$ zleva.*

*Provedení sloupcové elementární úpravy matice $A$ je to samé jako vynásobení $AQ$ vhodnou elementární maticí $Q$ zprava.*

*Důkaz.* Násobení elementárními maticemi zleva odpovídají po řadě řádkovým elementárním úpravám (i) přičtení $c$-násobku $j$-tého řádku k $i$-tému; (ii) vynásobení $i$-tého řádku nenulovým prvkem $c \in P$; (iii) výměna $i$-tého a $j$-tého řádku. Analogicky pro násobení zprava a sloupcové úpravy. Důkaz se ve všech případech provede přímým výpočtem. Cvičení. □

**Lemma.** *Transponované matice k elementárním maticím jsou elementární matice.*

*Důkaz.* Cvičení. □

## 2.4. Inverzní matice

Buď $A$ matice typu $n \times n$. Matice $X$ je *inverzní* k matici $A$, je-li stejného typu a platí

$$AX = XA = E.$$

Inverzní matice k matici $A$ je tedy také typu $n \times n$ a značí se $A^{-1}$. Matice je *invertibilní*, existuje-li matice k ní inverzní.

**Příklad.** (1) Každá jednotková matice je invertibilní a platí $E^{-1} = E$.

(2) Žádná nulová matice není invertibilní.

(3)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ nejsou invertibilní.}$$

Kdyby existovala $A^{-1}$, pak $B = BE = B(AA^{-1}) = (BA)A^{-1} = 0A^{-1} = 0$, což je spor. Podobně pro $B$.

(4) Elementární matice jsou invertibilní a přímým výpočtem lze ověřit (cvičení), že

$$(E^{i,j}(c))^{-1} = E^{i,j}(-c), \qquad (E^{i}(c))^{-1} = E^{i}(c^{-1}), \qquad (E^{i,j})^{-1} = E^{i,j}. \qquad \blacksquare$$

**Tvrzení 2.4.1.** *Ke každé matici existuje nejvýše jedna inverzní matice.*

*Důkaz.* Předpokládejme, že $B', B''$ jsou inverzní matice k matici $A$. Tedy $AB' = B'A = AB'' = B''A = E$. Potom $B' = EB' = B''AB' = B''E = B''$. □

# Literatura

[Marvan] M. Marvan, Algebra I a II, Učební texty Matematického ústavu v Opavě, Slezská univerzita v Opavě, dostupné na https://www.slu.cz/math/cz/knihovnaucebnitextymu.