

8. USPOŘÁDÁNÍ A SVAZY

8.1. Uspořádané množiny

Relace ρ na množině X je *uspořádání*, jestliže je

- (1) reflexivní, tj. $x \rho x$ pro každé $x \in X$,
- (2) antisymetrická, tj. $x \rho y, y \rho x$ implikuje $x = y$,
- (3) tranzitivní, tj. $x \rho y, y \rho z$ implikuje $x \rho z$.

Potom dvojice (X, ρ) je *uspořádaná množina*.

Příklad. (1) Pro libovolnou množinu X relace $=$ je uspořádání.

(2) $(\mathbb{N}, \leq), (\mathbb{Z}, \leq), (\mathbb{R}, \leq)$, kde \leq je obvyklé uspořádání podle velikosti, jsou uspořádané množiny.

(3) Buďte X množina a $\mathcal{P}(X)$ množina všech podmnožin množiny X . Inkluze \subseteq je uspořádání na $\mathcal{P}(X)$.

(4) Relace $|$ (dělí) na množině \mathbb{N} (tj. $x | y$ právě tehdy, když existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $x \cdot n = y$) je uspořádání, nazývá se *relace dělitelnosti*. Je zřejmé, že tato relace je reflexivní a tranzitivní.

Ukážeme, že $|$ je i antisymetrická relace. Předpokládejme, že $x | y$ a $y | x$, tedy existují $m, n \in \mathbb{N}$ taková, že $xm = y$ a $yn = x$. Potom $xmn = x$ a jelikož $x \neq 0, mn = 1$. V přirozených číslech to lze jedinečně tak, že $m = 1$ a $n = 1$. Tedy $x = x \cdot 1 = y$.

Upozorníme, že obdobně definovaná relace dělitelnosti na \mathbb{Z} není antisymetrická, protože $1 \neq -1$, přestože $1 | -1$ a $-1 | 1$ (rovnice $mn = 1$ má v celých číslech další řešení $m = -1$ a $n = -1$). ■

Buď ρ uspořádání na množině X . Inverzní (opačná) relace ρ^{-1} (tj. relace definovaná předpisem „ $x \rho^{-1} y$ právě tehdy, když $y \rho x$ “) je také uspořádání. Nazývá se *duální uspořádání*. Máme-li uspořádání \leq , potom duální uspořádání \leq^{-1} se označuje symbolem \geq . Podobně je to se symboly \subseteq atp.

Buď (X, \leq) uspořádaná množina, $Y \subseteq X$. Relace \leq_Y na množině Y zadaná předpisem $x \leq_Y y \Leftrightarrow x \leq y$ je uspořádání na množině Y . Nazývá se *indukované uspořádání* a značí se rovněž \leq .

Prvky x, y uspořádané množiny jsou *srovnatelné*, platí-li $x \leq y$ nebo $y \leq x$. Uspořádaná množina je *řetězec*, jsou-li každé dva její prvky srovnatelné.

Příklad. $(\mathbb{R}, \leq), (\mathbb{Z}, \leq), (\mathbb{N}, \leq)$ jsou řetězce. ■

Buď \leq uspořádání na X . Označme $x < y$, jestliže $x \leq y$ a zároveň $x \neq y$. Dále zavedme označení $x \triangleleft y$, jestliže $x < y$ a neexistuje $z \in X$ takové, že $x < z, z < y$. Je-li $x \triangleleft y$, pak říkáme, že x je *bezprostředním předchůdcem* y , nebo y *pokrývá* x .

Příklad. (1) V množině \mathbb{N} s přirozeným uspořádáním podle velikosti platí $1 < 2$ a $1 \triangleleft 2, 1 < 3$, ale neplatí $1 \triangleleft 3$.

(2) V množině \mathbb{N} s relací dělitelnosti 6 pokrývá 2 a 3.

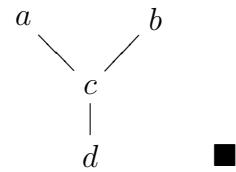
(3) V množině \mathbb{Q} všech racionálních čísel s přirozeným uspořádáním podle velikosti neplatí $x \triangleleft y$ pro žádnou dvojici $x, y \in \mathbb{Q}$. Pro libovolné $x, y \in \mathbb{Q}$ takové, že $x < y$, platí $z = \frac{1}{2}(x + y) \in \mathbb{Q}$ a $x < z, z < y$. ■

Konečnou uspořádanou množinu (X, \leq) můžeme znázornit diagramem. Prvky množiny X znázorníme jako body v rovině. Prvky x, y splňující $x \triangleleft y$ vyznačíme tak, že x leží níže než y a spojíme je úsečkou.

Z diagramu pak můžeme určit uspořádání množiny X : $x \leq y$ právě tehdy, když x leží níže než y a existuje zdola nahoru směřující konečná posloupnost na sebe navazujících úseček z bodu x do bodu y .

Příklad. V uspořádané množině $Y = \{a, b, c, d\}$ s diagramem vpravo platí:

- $d \triangleleft c, c \triangleleft a, c \triangleleft b$,
- $d < a$, ale nikoliv $d \triangleleft a$,
- prvky a, b nejsou srovnatelné.



Buď (X, \leq) uspořádaná množina. Prvek $x \in X$ je

- *nejmenší*, je-li $x \leq y$ pro každé $y \in X$;
- *největší*, je-li $x \geq y$ pro každé $y \in X$;
- *minimální*, neexistuje-li $y \in X$ takové, že $y < x$;
- *maximální*, neexistuje-li $y \in X$ takové, že $x < y$.

Příklad. V uspořádané množině Y z předchozího příkladu platí:

- d je nejmenší prvek a zároveň jediný minimální prvek,
- a, b jsou maximální prvky, ale největší prvek neexistuje. ■

Buď (X, \leq) uspořádaná množina, $Y \subseteq X$. Prvek $x \in X$ je

- *dolní závora* množiny Y , je-li $x \leq y$ pro každé $y \in Y$,
- *horní závora* množiny Y , je-li $y \leq x$ pro každé $y \in Y$,
- *infimum* množiny Y , je-li x největší prvek množiny všech dolních závor množiny Y ; píšeme $x = \inf Y$,
- *supremum* množiny Y , je-li x nejmenší prvek množiny všech horních závor množiny Y ; píšeme $x = \sup Y$.

Příklad. V uspořádané množině Y z předchozího příkladu platí:

- podmnožina $\{a, b\}$ má dolní závory c, d , z nich největší je c , a proto $\inf\{a, b\} = c$,
- podmnožina a, b nemá žádnou horní závoru, a proto $\sup\{a, b\}$ neexistuje (množina horních závor je prázdná, a proto nemá největší prvek). ■

Cvičení. (1) Každá podmnožina má nejvýše jedno supremum a nejvýše jedno infimum.

(2) Jestliže $x \leq y$, pak $\inf\{x, y\} = x$ a $\sup\{x, y\} = y$.

(3) Jestliže $\inf\{x, y\} = x$, pak $x \leq y$.

(4) Jestliže $\sup\{x, y\} = y$, pak $x \leq y$. ▷

Cvičení. Buď (X, \leq) uspořádaná množina. Supremum prázdné množiny je největší prvek množiny X (pokud existuje) a infimum prázdné množiny je největší prvek množiny X (pokud existuje). ▷

8.2. Svazy

Bud' (X, \leq) uspořádaná množina. Necht' pro každé $x, y \in X$ existují infimum $\inf\{x, y\}$ a supremum $\sup\{x, y\}$. Pak X je *svazově uspořádaná množina*.

Příklad. (1) Pro libovolnou množinu X je $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ svazově uspořádaná množina, přičemž pro libovolné $Y, Z \in \mathcal{P}(X)$ $\inf\{Y, Z\} = Y \cap Z$ a $\sup\{Y, Z\} = Y \cup Z$.

(2) $(\mathbb{N}, |)$ je svazově uspořádaná množina, přičemž $\inf\{x, y\}$ je největší společný dělitel čísel x, y , $\sup\{x, y\}$ je nejmenší společný násobek čísel x, y .

(3) Každý řetězec je svazově uspořádaná množina, přičemž $\inf\{x, y\} = \min\{x, y\}$ je menší z prvků x, y , $\sup\{x, y\} = \max\{x, y\}$ je větší z prvků x, y . ■

Jelikož ve svazově uspořádané množině X pro každé x, y existují $\inf\{x, y\}$ a $\sup\{x, y\}$ a jsou jednoznačně určena, můžeme na X definovat binární operace \wedge a \vee :

$$x \wedge y := \inf\{x, y\}, \quad x \vee y := \sup\{x, y\}.$$

Tvrzení 8.2.1. Bud' (X, \leq) svazově uspořádaná množina. Pro libovolná $x, y, z \in X$ platí

$$\begin{aligned} x \wedge x &= x, & x \vee x &= x, \\ x \wedge y &= y \wedge x, & x \vee y &= y \vee x, \\ x \wedge (y \wedge z) &= (x \wedge y) \wedge z, & x \vee (y \vee z) &= (x \vee y) \vee z, \\ x \wedge (y \vee x) &= x, & x \vee (y \wedge x) &= x. \end{aligned} \tag{4}$$

Důkaz. Cvičení.

Asociativita \vee : Návod: Ukažte, že $x \vee (y \vee z) = \sup\{x, y, z\} = (x \vee y) \vee z$. □

Cvičení. Dokažte, že $x_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_n = \sup\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. (Vlevo nezáleží na uzávkování). ▷

Množina X (bez jakéhokoliv uvažovaného uspořádání) se dvěma binárními operacemi \wedge a \vee s vlastnostmi (4) se nazývá *svaz*. Binární operace \wedge se nazývá *průsek*, binární operace \vee se nazývá *spojení*.

Podle předcházejícího tvrzení tedy každá svazově uspořádaná množina je svaz. Podle následujícího cvičení platí však i obráceně, že každý svaz je svazově uspořádaná množina.

Cvičení. (1) Bud' (X, \wedge, \vee) svaz. Pak platí:

(a) Položme $x \leq_{\wedge} y$ právě tehdy, když $x \wedge y = x$. Pak \leq_{\wedge} je uspořádání na množině X .

(b) Položme $x \leq_{\vee} y$ právě tehdy, když $x \vee y = y$. Pak \leq_{\vee} je uspořádání na množině X .

(c) Uspořádání \leq_{\wedge} je shodné s uspořádáním \leq_{\vee} a je svazové, přičemž

$$\inf\{x, y\} = x \wedge y, \quad \sup\{x, y\} = x \vee y.$$

(2) Bud' (X, \wedge, \vee) svaz. Ukažte, že (X, \vee, \wedge) je také svaz (identity (4) definující svaz jsou symetrické vzhledem k vzájemné záměně \wedge a \vee). Nazývá se *duální svaz* a značí se X^* . Ověřte, že duální svaz má duální uspořádání. ▷

Budeme používat termín svaz i pro svazově uspořádané množiny. Svazy budeme chápat i jako algebraické struktury i jako uspořádané množiny současně. Uspořádání totiž jednoznačně určuje algebraickou strukturu a algebraická struktura zase jednoznačně určuje uspořádání.

Tvrzení 8.2.2. *Bud' X svaz. Pro každé $x, a, b \in X$ platí*

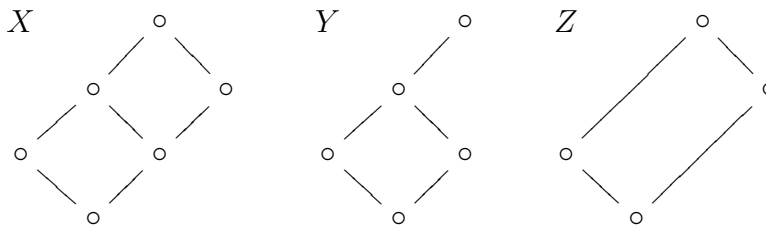
- (i) *jestliže $a \leq b$, pak $a \wedge x \leq b \wedge x$;*
- (ii) *jestliže $a \leq b$, pak $a \vee x \leq b \vee x$;*
- (iii) *jestliže $x \leq a$, $x \leq b$, pak $x \leq a \wedge b$;*
- (iv) *jestliže $x \geq a$, $x \geq b$, pak $x \geq a \vee b$.*

Důkaz. (i) Nechť $a \leq b$, pak $a \wedge b = a$, načtež $(a \wedge x) \wedge (b \wedge x) = a \wedge b \wedge x = a \wedge x$; odtud tvrzení. (ii) Cvičení. (iii) a (iv) plynou ihned z definice infima a suprema (cvičení). □

Obsahuje-li podmnožina svazu všechna infima a suprema všech dvojic svých prvků, je také svaz.

Podsvaz svazu (X, \wedge, \vee) je podmnožina $Y \subseteq X$ taková, že pro každé $x, y \in Y$ platí $x \wedge y \in Y$ a $x \vee y \in Y$.

Příklad. Svaz X a jeho podsvazy Y a Z :



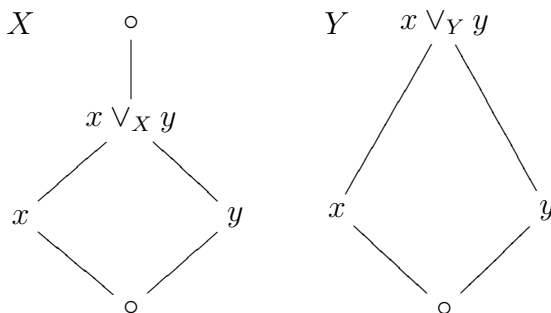
■

Cvičení. (1) Každá podmnožina řetězce je podsvaz.

(2) Každá podmnožina svazu, která je řetězcem, je podsvaz. ▷

Podmnožina svazu může být svazem vzhledem k indukovanému uspořádání, aniž by byla podsvazem.

Příklad. Svaz X a jeho podmnožina Y , která je svazem, ale není podsvazem.



Supremum $x \vee_Y y$ v Y je různé od suprema $x \vee_X y$ v X . ■

8.3. Úplné svazy

Svaz je *úplný*, má-li každá jeho podmnožina supremum i infimum.

Příklad. (1) Každý konečný svaz je úplný a platí $\inf\{x_1, x_2, \dots, x_n\} = x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_n$, $\sup\{x_1, x_2, \dots, x_n\} = x_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_n$.

(2) Svaz $(\mathcal{P}(M), \subseteq)$ je úplný. Infima jsou průniky, suprema jsou sjednocení.

(3) Svaz (\mathbb{N}, \leq) není úplný. Schází například supremum celé množiny \mathbb{N} . ■

Každý úplný svaz má největší prvek, je to jeho supremum, i nejmenší prvek, je to jeho infimum.

Tvrzení 8.3.1. *Buď (X, \leq) uspořádaná množina, jejíž každá podmnožina má infimum. Pak X je úplný svaz.*

Důkaz. Stačí ukázat, že každá podmnožina má supremum. Buď $Y \subseteq X$. Označme Z množinu všech horních závor množiny Y a položme $s = \inf Z$ (tj. největší dolní závora). Dokažme, že $s = \sup Y$.

Jelikož každý prvek množiny Y je dolní závora množiny Z a s je největší z nich, máme $y \leq s$ pro každé $y \in Y$. Tedy, s je horní závora množiny Y , $s \in Z$. A protože s je také (největší) dolní závora množiny Z , je to nejmenší prvek množiny Z , čili nejmenší horní závora množiny Y . □

Příklad. Předpoklad, že každá (i prázdná) podmnožina množiny X má infimum, znamená, že X má největší prvek. Například (\mathbb{N}, \leq) není úplný svaz, přestože každá *neprázdná* podmnožina má infimum. ■

Příklad. Buď G grupa. Označme $P(G)$ množinu všech podgrup grupy G . Pak $(P(G), \subseteq)$ je úplný svaz.

Buď $\{A_\iota \mid \iota \in I\} \subseteq P(G)$, tedy nějaký systém podgrup grupy G . Potom $\bigcap_{\iota \in I} A_\iota$ je také podgrupa (cvičení), která je zároveň $\inf\{A_\iota \mid \iota \in I\}$ (cvičení). Podle předchozího tvrzení je $(P(G), \subseteq)$ úplný svaz. Proto existuje i $\sup\{A_\iota \mid \iota \in I\}$ a je to průnik všech podgrup, které obsahují všechny podgrupy A_ι .

Příklad je zformulován pro grupy, ale jeho analogie platí i pro jiné algebraické struktury. ■

Cvičení. Označme $E(X)$ množinu všech relací ekvivalence na množině X . Protože $E(X) \subset \mathcal{P}(X \times X)$, vzniká na $E(X)$ indukované uspořádání. Dokažte, že $E(X)$ je úplný svaz. ▷