1. přednáška, 24. 9. 2020

1. Pole

Uvažujme množinu všech reálných čísel. Reálná čísla sčítáme a násobíme, ke každému reálnému číslu existuje číslo opačné (součet čísla a k němu opačného čísla je roven 0), ke každému nenulovému reálnému číslu existuje číslo inverzní (převrácená hodnota, součin čísla a k němu inverzního čísla je roven 1). Pro libovolná reálná čísla a, b, c navíc platí

$a + b = b + a, \quad a \cdot b = b \cdot a$ (součet a součin jsou komutativní,
$a + (b + c) = (a + b) + c, \quad a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ asociativní
$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ a splňují distributivní zákon)

Každá množina obsahující aspoň 2 prvky $(0, 1)$ s uvedenými operacemi s uvedenými vlastnostmi se nazývá *pole*. Příkladem pole je *pole komplexních čísel*, které označujeme $\mathbb{C}$.

Každá podmnožina množiny komplexních čísel, která obsahuje 0 a 1, s každým číslem obsahuje k němu opačné, s každým nenulovým číslem obsahuje k němu inverzní a s libovolnými dvěmi čísly obsahuje jejich součet i součin, se nazývá *číselné pole.*

Příklady číselných polí jsou množina komplexních čísel $\mathbb{C}$, množina reálných čísel $\mathbb{R}$ a množina racionáních čísel $\mathbb{Q}$. Například množina $\mathbb{Z}$ celých čísel a množina $\mathbb{N}$ přirozených (kladných celých) čísel nejsou pole.

Je-li P pole a n přirozené číslo, potom P^n označuje množinu všech uspořádaných n-tic prvků pole P.

Polím se ještě budeme věnovat později.

2. Matice

2.1. Matice

Buď P pole, m, n přirozená čísla. *Matice* typu $m \times n$ nad polem P je tabulka o m řádcích a n sloupcích obsahující prvky pole P. Máme-li takovou matici A, pak prvek pole P v i-tém řádku a j-tém sloupci matice označujeme A^i_j a matici zapisujeme obvykle

$$A = \begin{pmatrix} A^1_1 & A^1_2 & \dots & A^1_n \\ A^2_1 & A^2_2 & \dots & A^2_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A^m_1 & A^m_2 & \dots & A^m_n \end{pmatrix}$$

nebo stručněji $A = (A^i_j)_{m \times n}$ nebo jen $A = (A^i_j)$.

Matici typu $m \times n$ nad polem P je možné definovat také jako zobrazení z kartézského součinu $\{1, 2, \dots, m\} \times \{1, 2, \dots, n\}$ do pole P. Takové zobrazení tedy uspořádané dvojici (i, j) přiřazuje $A^i_j \in P$ a můžeme ho zapsat právě ve tvaru tabulky, která má v i-tém řádku a j-tém sloupci prvek A^i_j.

Horním indexům říkáme *řádkové*, dolním indexům říkáme *sloupcové*. Pro pevně zvolené i

$$A^i_\bullet = \begin{pmatrix} A^i_1 & A^i_2 & \dots & A^i_n \end{pmatrix}$$

je *i-tý řádek* matice A; je to tedy matice typu $1 \times n$, někdy ji budeme zapisovat jako uspořádanou n-tici $(A^i_1, A^i_2, \dots, A^i_n) \in P^n$. Nulový řádek označme $0_\bullet$. Pro pevně zvolené j

$$A^\bullet_j = \begin{pmatrix} A^1_j \\ A^2_j \\ \vdots \\ A^m_j \end{pmatrix}$$

je *j-tý sloupec* matice A; je to tedy matice typu $m \times 1$, někdy ji budeme zapisovat $\begin{pmatrix} A^1_j & A^2_j & \dots & A^m_j \end{pmatrix}^{\mathsf{T}}$ nebo jako uspořádanou m-tici $(A^1_j, A^2_j, \dots, A^m_j) \in P^m$ nebo $(A^1_j, A^2_j, \dots, A^m_j)^{\mathsf{T}}$. Nulový sloupec označme $0^\bullet$. To, že matice A je tvořena řádky $A^i_\bullet$, resp. sloupci $A^\bullet_j$, budeme někdy zapisovat

$$A = \begin{pmatrix} A^1_\bullet \\ A^2_\bullet \\ \vdots \\ A^m_\bullet \end{pmatrix}, \quad \text{resp. } A = \begin{pmatrix} A^\bullet_1 & A^\bullet_2 & \dots & A^\bullet_n \end{pmatrix}.$$

Matice $A = (A^i_j)$ a $B = (B^i_j)$ se vzájemně rovnají, jestliže jsou stejného typu a na stejných místech mají stejné prvky, tedy jsou-li typu $m \times n$ a pro každé $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ a každé $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ platí $A^i_j = B^i_j$.

Matice $A = (A^i_j)_{m \times n}$ je

- *čtvercová*, jestliže $m = n$,
- *diagonální*, jestliže je čtvercová a $A^i_j = 0$ pro $i \neq j$ (prvky A^i_i se také nazývají *diagonální* a tvoří *(hlavní) diagonálu*),
- *jednotková*, jestliže je diagonální a $A^i_i = 1$ pro každé i (označujeme ji E_n nebo jen E),
- *nulová*, jestliže má všechny prvky nulové (označujeme ji $0_{m \times n}$ nebo jen 0),
- *horní* resp. *dolní trojúhelníková* (nebo v *horním* resp. *dolním trojúhelníkovém tvaru*), jestliže je čtvercová a pod resp. nad diagonálou má jen nuly, tedy $A^i_j = 0$ pro $i > j$ resp. pro $i < j$,
- *schodovitá* (nebo ve *schodovitém tvaru*), jestliže každý nenulový řádek, kromě prvního, začíná zleva více nulami než řádek předchozí,
- *Gaussova–Jordanova* (nebo v *Gaussově–Jordanově tvaru*), jestliže
  - (i) je ve schodovitém tvaru,
  - (ii) první (zleva) nenulové prvky všech nenulových řádků jsou 1,
  - (iii) ve sloupcích nad (a nejen pod) prvními nenulovými prvky všech nenulových řádků jsou jen 0.

Množinu všech matic typu $m \times n$ nad polem P označujeme $\mathcal{M}_{m \times n}(P)$; v případě čtvercových matic $\mathcal{M}_n(P)$ nebo $\mathrm{gl}(n, P)$.

Příklad. (1)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ je čtvercová matice, } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \text{ není čtvercová.}$$

(2)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ je diagonální matice, } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ není diagonální.}$$

(3)

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ jsou jednotkové matice.}$$

(4)

$$0_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, 0_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ jsou nulové matice.}$$

(5)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \text{ je horní, } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ je dolní trojúhelníková matice.}$$

(6)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ je matice ve schodovitém tvaru,}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \text{ není matice ve schodovitém tvaru.}$$

(7)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ je matice v Gaussově–Jordanově tvaru,}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ není matice v Gaussově–Jordanově tvaru.}$$

■

2.2. Operace s maticemi

2.2.1. Součet a násobek

Buďte $A = (A^i_j)$, $B = (B^i_j)$ matice typu $m \times n$ nad polem P. *Součet* matic A, B je matice $A + B$ typu $m \times n$ nad polem P daná předpisem: pro všechna

$i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$

$$(A + B)^i_j = A^i_j + B^i_j.$$

Pro $c \in P$ definujeme *c-násobek* matice A jako matici cA typu $m \times n$ nad polem P danou předpisem: pro všechna $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$

$$(cA)^i_j = cA^i_j.$$

Pro $c = -1$ se matice $(-1)A$ značí $-A$ a nazývá se *opačná* matice k matici A.

Příklad.

Pro $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ a $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & -3 & 7 \end{pmatrix}$ je

$$A + B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 5 & 2 & 13 \end{pmatrix}, \quad 2A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \end{pmatrix}, \quad -B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 3 & -7 \end{pmatrix}. \quad \blacksquare$$

Tvrzení 2.2.1. *Nechť A, B, C jsou matice stejného typu nad polem P a $c, k \in P$. Pak platí*

(1) $A + B = B + A$,
(2) $A + (B + C) = (A + B) + C$,
(3) $A + 0 = A$,
(4) $A + (-A) = 0$,
(5) $1A = A$,
(6) $c(A + B) = cA + cB$,
(7) $(c + k)A = cA + kA$,
(8) $c(kA) = (ck)A$.

Důkaz. Uvedeme jen důkaz bodu (6), ostatní ponecháme jako cvičení.

Máme dokázat, že matice $c(A + B)$ a $cA + cB$ se vzájemně rovnají. Předpokládejme, že A, B jsou typu $m \times n$. Potom i $A + B$, cA, cB jsou typu $m \times n$ a tedy i $c(A + B)$ a $cA + cB$ jsou typu $m \times n$.

Pro každé $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ a $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ platí $(c(A + B))^i_j = c(A + B)^i_j = c(A^i_j + B^i_j) = cA^i_j + cB^i_j = (cA)^i_j + (cB)^i_j = (cA + cB)^i_j$.

Dokázali jsme, že matice $c(A + B)$ a $cA + cB$ jsou stejného typu a na stejných místech mají stejné prvky. $\square$