10. června 2020

Algebra II

přednášky

letní semestr 2019/2020

Obsah

Tento text je přepisem přednášek založených na učebních textech [Marvan], které je možno nalézt na https://www.slu.cz/math/cz/knihovnaucebnitextymu. Většinou se tedy s těmito učebními texty shoduje, něco je však uvedeno v jiném pořadí, něco je přeformulováno, případně jsou zde uvedeny odkazy na příslušné učební texty, nebo je zde něco, co učební texty doplňuje.

Pokud máte k textu nějaké dotazy, připomínky, náměty, nebo pokud jste narazili na nějakou chybu, nepřesnost nebo překlep, prosím, napište mi na zdenek.kocan@math.slu.cz.

1. přednáška, 25. 2. 2020

1. Vektorové prostory

Použité učební texty:
[Marvan, 9. Vektorové prostory]
[Marvan, 3. Matice přechodu. V 13. Matice lineárního zobrazení]
[Marvan, Přímý součet vektorových prostorů. V 11. Lineární zobrazení]

1.1. Definice, příklady, základní vlastnosti

Definice. Buď V neprázdná množina, P pole. *Vektorový prostor V nad polem P* je množina V spolu s binární operací $+\colon V \times V \to V$, $(a,b) \mapsto a+b$, a zobrazením $\cdot\colon P \times V \to V$, $(p,a) \mapsto p \cdot a$, takovými, že

(1) pro každé $a,b,c \in V$ platí $(a+b)+c = a+(b+c)$,
(2) existuje $0 \in V$ takový, že pro každé $a \in V$ platí $a+0 = 0+a = a$,
(3) pro každé $a \in V$ existuje $-a \in V$ takové, že $a+(-a) = 0$,
(4) pro každé $a,b \in V$ platí $a+b = b+a$,
(5) pro každé $a \in V$ platí $1 \cdot a = a$,
(6) pro každé $p,q \in P$ a $a \in V$ platí $(p \cdot q) \cdot a = p \cdot (q \cdot a)$,
(7) pro každé $p,q \in P$ a $a \in V$ platí $(p+q) \cdot a = (p \cdot a) + (q \cdot a)$,
(8) pro každé $p \in P$ a $a,b \in V$ platí $p \cdot (a+b) = (p \cdot a) + (p \cdot b)$.

Prvky množiny V se nazývají *vektory*, prvky pole P se nazývají *skaláry*. Binární operace $+$ se nazývá *sčítání*, zobrazení $\cdot$ se nazývá *násobení skalárem*, prvek $0 \in V$ se nazývá *nulový vektor* nebo *nula*, prvek $-a$ se nazývá *opačný* k prvku a.

Podmínky (1)–(8) se nazývají *axiomy vektorového prostoru*. První čtyři znamenají, že V s operací $+$ je komutativní grupa.

Při násobení vektoru skalárem píšeme skalár vždy vlevo od vektoru. Vektorový prostor nad polem $\boldsymbol{R}$, resp. $\boldsymbol{C}$ se nazývá *reálný*, resp. *komplexní* vektorový prostor.

Zobrazení $\cdot\colon P \times V \to V$, $(p,a) \mapsto p \cdot a$, není binární operace (není-li $P = V$). Toto zobrazení se obvykle nazývá vnější operace (binární operace se pak může nazývat vnitřní operace). Na vektorovém prostoru tak máme vnitřní operaci sčítání a vnější operaci násobení skalárem.

Vektorový prostor V nad polem P se také označuje $V(P)$.

Příklad. (1) Reálný vektorový prostor Eukleidovské geometrie, dvourozměrné i trojrozměrné. Vektor je reprezentován orientovanou úsečkou nebo uspořádanou dvojicí bodů (počáteční bod, koncový bod). Dvě takové reprezentace považujeme za totožné, lze-li jednu převést na druhou rovnoběžným posunutím. *Úmístění* vektoru v daném bodě X dostaneme rovnoběžným posunutím, při kterém počáteční bod vektoru splyne s X. (Cvičení: Vektor je třída jisté relace ekvivalence. Které?)

Součet vektorů získáme pravidlem rovnoběžníka, p-násobek vektoru p-násobným prodloužením úsečky (případně se změnou orientace, když $p < 0$). Nulový vektor je degenerovaná úsečka nulové délky. Vektorový prostor vektrorů v rovině resp. prostoru označíme E^2 resp. E^3.

Cvičení. Demonstrujte asociativitu sčítání vektorů v E^3. Zvolte tři vektory u, v, w v prostoru, umístěte je do společného bodu a doplňte do kosého hranolu. Ukažte, že vektor $(u+v)+w$ tvoří úhlopříčku tohoto hranolu. Totéž pro $u+(v+w)$.

(2) Buď $V = \{a\}$ libovolná jednoprvková množina, P libovolné pole. Označme $0 := a$ a položme $0+0=0$, $-0=0$ a $p \cdot 0 = 0$ pro každé $p \in P$. Dostáváme vektorový prostor nazývaný *nulový prostor*.

(3) Každé pole je vektorový prostor nad sebou samým. Položíme-li v definici vektorového prostoru $V = P$, budou všechny axiomy vektorového prostoru důsledky axiomů pole (ověřte). Získáváme tak například vektorový prostor $\boldsymbol{R}$ nad $\boldsymbol{R}$, vektorový prostor $\boldsymbol{C}$ nad $\boldsymbol{C}$, vektorový prostor $\boldsymbol{Q}$ nad $\boldsymbol{Q}$ a vektorový prostor $\boldsymbol{Z}_2$ nad $\boldsymbol{Z}_2$.

(4) Každé pole je vektorový prostor nad libovolným svým podpolem. Jediný rozdíl oproti předchozímu příkladu spočívá v tom, že násobení skalárem je dovoleno jen pro skaláry z podpole.

(5) Buď $n \in \boldsymbol{N}$, P pole. Na množině P^n všech uspořádaných n-tic prvků P zaveďme sčítání a násobení skalárem předpisem

$$(u_1, u_2, \ldots, u_n) + (v_1, v_2, \ldots, v_n) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_n + v_n),$$
$$p(u_1, u_2, \ldots, u_n) = (pu_1, pu_2, \ldots, pu_n).$$

Vzniká vektorový prostor P^n nad polem P (ověřte). Například řádky a sloupce matic jsou prvky takových vektorových prostorů.

(6) Vektorový prostor P^n nad podpolem $Q \subset P$.

(7) Vektorový prostor matic typu $m \times n$ nad polem P s operacemi sčítání a násobení skalárem. Značí se $P^{m\times n}$ nebo $\mathcal{M}_{m\times n}(P)$ (resp. $\mathcal{M}_m(P)$ nebo $\mathrm{gl}(m, P)$ v případě čtvercových matic).

(8) Vektorový prostor polynomů stupně nejvýše n s operacemi sčítání a násobení skalárem.

(9) Vektorový prostor všech polynomů nad konkrétním polem s operacemi sčítání a násobení skalárem.

(10) Vektorový prostor všech řešení homogenní soustavy rovnic.

(11) Buď X množina, P pole. Na množině P^X všech zobrazení $X \to P$ zaveďme sčítání a násobení skalárem předpisem

$$(u+v)(x) = u(x) + v(x),$$
$$(pu)(x) = p \cdot u(x).$$

Vzniká vektorový prostor P^X nad polem P (ověřte). Speciálními případy jsou množina všech funkcí z $\boldsymbol{R}$ do $\boldsymbol{R}$, množina všech spojitých funkcí na $\boldsymbol{R}$, množina diferencovatelných funkcí na $\boldsymbol{R}$, množina všech spojitých funkcí na intervalu $[a, b]$. ■

Tvrzení 1.1.1. *Buď V vektorový prostor nad polem P. Pak pro každé $a, b \in V$, $p, q \in P$ platí*

(i) $0 \cdot a = 0$,
(ii) $(-1) \cdot a = -a$,
(iii) $(p - q) \cdot a = p \cdot a - q \cdot a$,
(iv) $p \cdot (a - b) = p \cdot a - p \cdot b$,
(v) Je-li $p \cdot a = 0$, pak buď $p = 0$ nebo $a = 0$.

Důkaz. Cvičení. □

1.2. Lineární kombinace, generátory, lineární závislost a nezávislost

Definice. (1) Buďte $u_1, u_2, \ldots, u_n$ vektory z vektorového prostoru V nad polem P. *Lineární kombinace* vektorů $u_1, u_2, \ldots, u_n$ s koeficienty $p_1, p_2, \ldots, p_n \in P$ je vektor $p_1u_1 + p_2u_2 + \cdots + p_nu_n \in V$.

(2) Vektory $u_1, u_2, \ldots, u_n \in V$ *generují* vektorový prostor V, je-li každý vektor $v \in V$ jejich lineární kombinací, to jest, jestliže pro každý vektor $v \in V$ existují skaláry $p_1, p_2, \ldots, p_n \in P$ takové, že $v = p_1u_1 + p_2u_2 + \cdots + p_nu_n$. Potom $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ je *množina generátorů* prostoru V.

(3) Prostor, který má konečnou množinu generátorů, se nazývá *konečněrozměrný*.

Příklad. (1) Součet vektorů u, v je jejich lineární kombinace s koeficienty $1, 1$. Opačný vektor k u je jeho lineární kombinace (skalární násobek) s koeficientem -1.

(2) Lineární kombinace vektorů 1 a 6 z $\boldsymbol{R}$ s koeficienty $3, 1 \in \boldsymbol{R}$ je $3 \cdot 1 + 1 \cdot 6 = 9$.

(3) Lineární kombinace vektorů $(1,2,0,1), (2,3,1,0) \in \boldsymbol{R}^4$ s koeficienty $1, -2$ je

$$1 \cdot (1,2,0,1) + (-2) \cdot (2,3,1,0) = (-3,-4,-2,1).$$

(4) Prostor $\boldsymbol{R}^3$ je generován vektory $(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$. Skutečně, pro libovolný vektor $(x,y,z) \in \boldsymbol{R}^3$ je $(x,y,z) = x \cdot (1,0,0) + y \cdot (0,1,0) + z \cdot (0,0,1)$ lineární kombinace s koeficienty x, y, z.

(5) Prostor $\boldsymbol{R}^3$ je generován vektory $(1,0,0), (1,1,0), (1,1,1)$. Ověřte.

(6) Prostor $\boldsymbol{R}^3$ je generován vektory $(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (3,4,5)$. Pro libovolný vektor $(x,y,z) \in \boldsymbol{R}^3$ je $(x,y,z) = x \cdot (1,0,0) + y \cdot (0,1,0) + z \cdot (0,0,1) + 0 \cdot (3,4,5)$ lineární kombinace s koeficienty $x, y, z, 0$. V tomto případě můžeme najít dokonce nekonečně mnoho vyjádření ve tvaru lineární kombinace, a sice $(x,y,z) = (x-3t) \cdot (1,0,0) + (y-4t) \cdot (0,1,0) + (z-5t) \cdot (0,0,1) + t \cdot (3,4,5)$ s koeficienty $x-3t, y-4t, z-5t, t$, kde $t \in \boldsymbol{R}$ je parametr. Ověřte.

(7) Prostor $\boldsymbol{R}^3$ není generován vektory $(1,2,0), (3,4,0), (1,1,0)$. Ověřte.

(8) Vektory $u_1, \ldots, u_r \in \boldsymbol{R}^s$, kde $u_i = (u_{i1}, \ldots, u_{is})$, generují $\boldsymbol{R}^s$, jestliže soustava

$$\begin{aligned} u_{11}x_1 + \cdots + u_{r1}x_r &= v_1 \\ &\vdots \\ u_{1s}x_1 + \cdots + u_{rs}x_r &= v_s \end{aligned}$$

má aspoň jedno řešení $x_1, \ldots, x_r$ pro každou pravou stranu $v_1, \ldots, v_s$. Soustava je totiž ekvivalentní s podmínkou $(v_1, \ldots, v_s) = x_1(u_{11}, \ldots, u_{1s}) + \cdots + x_r(u_{r1}, \ldots, u_{rs})$.

(9) Prostor $\boldsymbol{R}_3[x]$ polynomů neurčité x s reálnými koeficienty stupně nejvýše 2 je generován vektory $x^2, x+1, 1$. Ověřte.

(10) Vektorový prostor $\boldsymbol{R}[x]$ všech polynomů s reálnými koeficienty není konečněrozměrný. Je-li totiž $\{p_1, \ldots, p_s\}$ nějaká konečná množina polynomů, pak existuje číslo n, které je větší než stupeň kteréhokoliv z polynomů $p_1, \ldots, p_s$. Pak žádný z těchto polynomů ani žádná jejich lineární kombinace neobsahuje x^n s nenulovým koeficientem. Polynom $x^n \in \boldsymbol{R}[x]$ tudíž není lineární kombinací vektorů $p_1, \ldots, p_s$. ■

Definice. Množina vektorů $\{e_1, \dots, e_n\} \subset V(P)$ je *lineárně nezávislá*, jestliže z rovnosti

$$x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n = 0, \text{ kde } x_1, x_2, \dots, x_n \in P,$$

plyne $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$. Množina vektorů $\{e_1, \dots, e_n\} \subset V(P)$ je *lineárně závislá*, jestliže není lineárně nezávislá.

Často se zjednodušeně a nepřesně říká, že nějaké vektory jsou lineárně (ne)závislé. Myslí se tím, že příslušná množina vektorů je lineárně (ne)závislá. Možná se s tímto nepřesným vyjádřením setkáme i v tomto textu.

Příklad. (1) Množina $\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\} \subset \boldsymbol{R}^3$ je lineárně nezávislá. Skutečně, položme $x \cdot (1,0,0) + y \cdot (0,1,0) + z \cdot (0,0,1) = (0,0,0)$. Na levé straně je vektor (x, y, z), a ten je nulový právě tehdy, když $x = y = z = 0$ (ověřte).

(2) Množina $\{(1,0,0), (1,1,0), (1,1,1)\} \subset \boldsymbol{R}^3$ je lineárně nezávislá. Skutečně, položme $x \cdot (1,0,0) + y \cdot (1,1,0) + z \cdot (1,1,1) = (0,0,0)$. Na levé straně je vektor $(x + y + z, y + z, z)$, a ten je nulový právě tehdy, když $x = y = z = 0$ (ověřte).

(3) Množina $\{(3,2,1), (3,1,0), (6,3,1)\} \subset \boldsymbol{R}^3$ je lineárně závislá. Ověřte.

(4) Libovolná množina vektorů obsahující nulový vektor je lineárně závislá. Ověřte.

(5) Množina $\{u_1, \dots, u_r\} \subset \boldsymbol{R}^s$, kde $u_i = (u_{i1}, \dots, u_{is})$, je lineárně nezávislá právě tehdy, když soustava

$$\begin{aligned} u_{11}x_1 + \cdots + u_{r1}x_r &= 0 \\ &\vdots \\ u_{1s}x_1 + \cdots + u_{rs}x_r &= 0 \end{aligned}$$

má právě jedno řešení, a to sice $x_1 = \cdots = x_r = 0$.

(6) Množina $\{x^2, x, 1\} \subset \boldsymbol{R}_3[x]$ je lineárně nezávislá. Ověřte. ■

Cvičení. Libovolná podmnožina lineárně nezávislé množiny vektorů je lineárně nezávislá. Dokažte.

2. přednáška, 3. 3. 2020

Tvrzení 1.2.1. *Množina vektorů $v_1, \dots, v_n$ je lineárně závislá právě tehdy, když aspoň jeden z nich je lineární kombinací ostatních, tj. právě když existuje index i takový, že v_i je lineární kombinací vektorů $v_1, \dots, v_{i-1}$, $v_{i+1}, \dots, v_n$.*

Důkaz. „$\Rightarrow$“ Předpokládejme, že množina $\{v_1, \dots, v_n\}$ je lineárně závislá. To znamená, existují koeficienty $a_1, \dots, a_n$, z nichž aspoň jeden je nenulový (například a_i), takové, že $a_1v_1 + \dots + a_iv_i + \dots + a_nv_n = 0$. Tedy,

$$a_iv_i = -a_1v_1 - \dots - a_{i-1}v_{i-1} - a_{i+1}v_{i+1} - \dots - a_nv_n,$$

a

$$v_i = -\frac{a_1}{a_i}v_1 - \dots - \frac{a_{i-1}}{a_i}v_{i-1} - \frac{a_{i+1}}{a_i}v_{i+1} - \dots - \frac{a_n}{a_i}v_n.$$

„$\Leftarrow$“ Předpokládejme, že například v_i je lineární kombinací ostatních vektorů, tedy

$$v_i = a_1v_1 + \dots + a_{i-1}v_{i-1} + a_{i+1}v_{i+1} + \dots + a_nv_n.$$

Potom lineární kombinace

$$a_1v_1 + \dots + a_{i-1}v_{i-1} - v_i + a_{i+1}v_{i+1} + \dots + a_nv_n$$

s nenulovým koeficientem (-1) u vektoru v_i je rovna nulovému vektoru. Tedy, množina $\{v_1, \dots, v_n\}$ je lineárně závislá. □

Tvrzení 1.2.2. *Množina vektorů $v_1, \dots, v_n$ je lineárně závislá právě tehdy, když aspoň jeden z nich je lineární kombinací předchozích, tj. právě když existuje index i takový, že v_i je lineární kombinací vektorů $v_1, \dots, v_{i-1}$.*

Důkaz. „$\Rightarrow$“ Postupujeme jako v důkazu předchozího tvrzení, jen koeficient $a_i \neq 0$ vybereme s nejvyšším možným indexem. To znamená, že potom $c_{i+1} = \dots = c_n = 0$; zbytek je zřejmý. Jako cvičení rozeberte podrobně případ $i = 1$, kdy bude množina předcházejících vektorů prázdná.

„$\Leftarrow$“ Tvrzení je speciálním případem předchozího. □

1.3. Báze, souřadnice

Definice. *Báze* vektorového prostoru je libovolná uspořádaná lineárně nezávislá množina jeho generátorů.

Příklad. (1) (6) je báze $\boldsymbol{R}$.
(2) $((1,0),(0,1))$ je báze $\boldsymbol{R}^2$.
(3) $((1,0,0),(1,1,0),(1,1,1))$ je báze $\boldsymbol{R}^3$.
(4) Pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ buď e_i vektor z $\boldsymbol{R}^n$, který má na i-tém místě jedničku a jinde nuly. Potom $(e_1, \dots, e_n)$ je báze $\boldsymbol{R}^n$ a nazývá se *kanonická* nebo také *standardní*.
(5) $(x^2, x, 1)$ je báze $\boldsymbol{R}_3[x]$. ■

Definice. *Elementární úprava* konečné n-tice vektorů $u_1, \dots, u_n \in V$ je:

(i) vynásobení i-tého vektoru nenulovým skalárem $c \in P \setminus \{0\}$;
(ii) přečtení c-násobku j-tého vektoru k i-tému;
(iii) výměna i-tého vektoru s j-tým.

Přitom vznikají po řadě n-tice

$$(u_1, \dots, u_{i-1}, cu_i, u_{i+1}, \dots, u_n),$$
$$(u_1, \dots, u_{i-1}, u_i + cu_j, u_{i+1}, \dots, u_j, \dots, u_n),$$
$$(u_1, \dots, u_{i-1}, u_j, u_{i+1}, \dots, u_{j-1}, u_i, u_{j+1}, \dots, u_n).$$

Ke každé z těchto úprav existuje úprava inverzní, která je rovněž elementární úprava (ověřte).

Definice. Dvě n-tice vektorů jsou *ekvivalentní*, jestliže jedna vznikne z druhé konečnou posloupností elementárních úprav.

Cvičení. Ukažte, že právě zavedená relace mezi n-ticemi vektorů je reflexivní, symetrická a tranzitivní.

Příklad. Mějme matici typu $r \times s$ nad polem P. Její řádky jsou s-tice prvků pole P, tj. vektory z prostoru P^s. Celá matice je pak r-tice takových s-tic, tedy r-ticí vektorů z prostoru P^s. Elementární úpravy této r-tice vektorů jsou právě elementární řádkové úpravy dané matice. ■

Tvrzení 1.3.1. *Nechť je n-tice $u_1, \dots, u_n \in V$ ekvivalentní s n-ticí $v_1, \dots, v_n \in V$. Pak vektory $u_1, \dots, u_n$ generují V právě tehdy, když vektory $v_1, \dots, v_n$ generují V.*

Důkaz. Nechť n-tici $v_1, \dots, v_n$ lze získat z $u_1, \dots, u_n$ druhou úpravou, $v_i = u_i + cu_j$ a $v_k = u_k$ pro $k \neq i$.

Předpokládejme, že $v_1, \dots, v_n$ generují V. Buď $w \in V$ libovolný vektor. Existují koeficienty $p_1, \dots, p_n$ takové, že $w = p_1 v_1 + \dots + p_n v_n$. Pak

$$\begin{aligned} w &= p_1 u_1 + \dots + p_i(u_i + cu_j) + \dots + p_j u_j + \ldots + p_n u_n \\ &= p_1 u_1 + \dots + p_i u_i + \dots + (p_j + cp_i)u_j + \ldots + p_n u_n \end{aligned}$$

je lineární kombinace vektorů $u_1, \dots, u_n$.

Opačná implikace vyplývá z právě dokázané, neboť n-tice $u_1, \dots, u_n$ vzniká z n-tice $v_1, \dots, v_n$ inverzní úpravou, která je stejného typu.

Pro ostatní úpravy obdobně. A výsledek platí i pro libovolnou konečnou posloupnost elementárních úprav. □

Tvrzení 1.3.2. *Nechť je n-tice $u_1, \dots, u_n \in V$ ekvivalentní s n-ticí $v_1, \dots, v_n \in V$. Pak množina $\{u_1, \dots, u_n\}$ je lineárně nezávislá právě tehdy, když množina $\{v_1, \dots, v_n\}$ je lineárně nezávislá.*

Důkaz. Nechť n-tici $v_1, \dots, v_n$ lze získat z $u_1, \dots, u_n$ druhou úpravou, $v_i = u_i + cu_j$ a $v_k = u_k$ pro $k \neq i$.

Předpokládejme, že $\{u_1, \dots, u_n\}$ je lineárně nezávislá. Buďte $x_1, \dots, x_n \in P$ takové, že $x_1 v_1 + \dots + x_n v_n = 0$. Pak

$$\begin{aligned} 0 &= x_1 v_1 + \dots + x_n v_n = x_1 u_1 + \dots + x_i(u_i + cu_j) + \dots + x_j u_j + \ldots + x_n u_n \\ &= x_1 u_1 + \dots + x_i u_i + \dots + (x_j + cx_i)u_j + \ldots + x_n u_n. \end{aligned}$$

Z lineární nezávislosti množiny $\{u_1, \dots, u_n\}$ vyplývá, že všechny koeficienty poslední lineární kombinace jsou nulové, tj. $x_1 = \dots = x_i = \dots = cx_i + x_j = \dots = x_n = 0$. Z toho dostaneme, že i $x_j = 0$.

Opačná implikace vyplývá z právě dokázané, neboť n-tice $u_1, \dots, u_n$ vzniká z n-tice $v_1, \dots, v_n$ inverzní úpravou, která je stejného typu.

Pro ostatní úpravy obdobně. A výsledek platí i pro libovolnou konečnou posloupnost elementárních úprav. □

Tvrzení 1.3.3. *Nechť vektory $v_1, \dots, v_n$ generují prostor V a $u_1, \dots, u_m \in V$. Jestliže $\{u_1, \dots, u_m\}$ je lineárně nezávislá, pak $n \geq m$.*

Důkaz. Nechť $v_1, \dots, v_n$ generují prostor V. Každý z vektorů $u_1, \dots, u_m$ je tedy jejich lineární kombinací, takže pro každé $i \in \{1, \dots, m\}$ existují koeficienty $a_{i1}, \dots, a_{in}$ takové, že $u_i = a_{i1}v_1 + \ldots + a_{in}v_n$. Matici

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

upravme pomocí elementárních řádkových úprav na matici A' ve schodovitém tvaru. Provedeme-li stejné elementární úpravy s m-ticí $u_1, \dots, u_m$, dostaneme ekvivalentní m-tici $u'_1, \dots, u'_m$. Lineární kombinace vektorů $v_1, \dots, v_n$ s koeficienty z jednotlivých řádků matice A' jsou rovny právě vektorům $u'_1, \dots, u'_m$. Pokud $m > n$, potom poslední řádek matice A' je nulový, tedy i vektor u'_m je nulový a množina $\{u'_1, \dots, u'_m\}$ je lineárně závislá, stejně jako ekvivalentní množina $\{u_1, \dots, u_m\}$. □

Důsledek. *Jsou-li $(v_1, \dots, v_n)$ a $(u_1, \dots, u_m)$ báze jednoho vektorového prostoru, pak $n = m$.*

Definice. *Dimenze* vektorového prostoru je počet vektorů (libovolné) jeho báze. Vektorový prostor V dimenze n se nazývá *n-rozměrný.* Zapisujeme $n = \dim V$. O nulovém vektorovém prostoru $\{0\}$ říkáme, že je 0-rozměrný.

Rozšíříme-li vhodně naše definice, dosáhneme toho, že i nulový prostor $\{0\}$ bude mít bázi. Bude jí prázdná množina $\emptyset$ (nebo 0-tice) vektorů. Skutečně, dohodneme-li se, že součtem prázdné množiny sčítanců bude nula, bude 0 lineární kombinací. Nezávislost prázdné množiny vektorů pak plyne z toho, že všechny koeficienty z prázdné množiny koeficientů jsou nulové.

Příklad. (1) Vektorový prostor P^n nad polem P je n-rozměrný. Jednou z bází je n-tice (kanonická báze) $((1, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1))$.
(2) Vektorový prostor $\boldsymbol{C}$ nad polem $\boldsymbol{R}$ je dvourozměrný. Jednou z možných bází je dvojice $(1, i)$. Co jsou souřadnice vektoru $z = a+bi \in \boldsymbol{C}$ v této bázi? Nad polem $\boldsymbol{C}$ je vektorový prostor samozřejmě jednorozměrný, jednu z možných bází tvoří vektor 1. Vidíme, že dva vektorové prostory mohou mít *různé* dimenze, přestože mají *stejné* množiny vektorů.
(3) Vektorový prostor $\boldsymbol{C}^n$ nad polem $\boldsymbol{R}$ je $2n$-rozměrný. Jednou z mnoha bází je $2n$-tice

$$\begin{aligned} &((1, 0, \dots, 0), (i, 0, \dots, 0), \\ &\ (0, 1, 0, \dots, 0), (0, i, 0, \dots, 0), \\ &\ \dots, \\ &\ (0, \dots, 0, 1), (0, \dots, 0, i)). \end{aligned}$$ ■

Tvrzení 1.3.4. *Buď $(e_1, \dots, e_n)$ báze vektorového prostoru V. Pak pro každý vektor $v \in V$ existuje právě jedna n-tice skalárů $x_1, \dots, x_n \in P$ taková, že $v = x_1e_1 + \dots + x_ne_n$.*

Důkaz. Buď $v \in V$. Jelikož $e_1, \dots, e_n$ generují V, existují $x_1, \dots, x_n$ takové, že $v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$. Dokažme ještě jednoznačnost. Je-li $y_1, \dots, y_n$ libovolná n-tice taková, že $v = y_1 e_1 + \dots + y_n e_n$, pak

$$0 = v - v = (x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) - (y_1 e_1 + \dots + y_n e_n) = (x_1 - y_1) e_1 + \dots + (x_n - y_n) e_n.$$

Z lineární nezávislosti množiny $\{e_1, \dots, e_n\}$ plyne $x_1 - y_1 = \dots = x_n - y_n = 0$ a tedy $x_1 = y_1, \dots, x_n = y_n$. □

Cvičení. Zformulujte a dokažte obrácené tvrzení.

Definice. Skaláry $x_1, \dots, x_n$ předchozího tvrzení se nazývají *souřadnice* vektoru v v bázi $(e_1, \dots, e_n)$.

Příklad. (1) Souřadnice vektoru $(x, y, z) \in \boldsymbol{R}^3$ v kanonické bázi jsou x, y, z, protože $(x, y, z) = x \cdot (1, 0, 0) + y \cdot (0, 1, 0) + z \cdot (0, 0, 1)$.
(2) Souřadnice vektoru $(x, y, z) \in \boldsymbol{R}^3$ v bázi $((1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1))$ jsou $x - y, y - z, z$, protože $(x, y, z) = (x - y) \cdot (1, 0, 0) + (y - z) \cdot (1, 1, 0) + z \cdot (1, 1, 1)$. ■

Souřadnice vektoru tedy závisí na volbě báze. Jeden vektor má v různých bázích různé souřadnice.

Buď V n-rozměrný vektorový prostor nad polem P. Buď $e = (e_1, \dots, e_n)$ nějaká báze V, nazvěme ji *stará báze*. Buď $e' = (e'_1, \dots, e'_n)$ jiná báze V, nazvěme ji *nová báze*. Buď $v \in V$ libovolný vektor. Souřadnice vektoru v ve staré bázi označme $x = (x^1, \dots, x^n) \in P^n$ a říkejme jim *staré souřadnice*. Souřadnice vektoru v v nové bázi označme $x' = (x'^1, \dots, x'^n) \in P^n$ a říkejme jim *nové souřadnice*. Platí tedy $v = \sum_i x^i e_i = \sum_i x'^i e'_i$. Zajímá nás vztah mezi starými a novými souřadnicemi x a x'.

Definice. Matice, jejíž sloupce jsou tvořeny novými souřadnicemi starých bázových vektorů, se nazývá *matice přechodu* od staré báze k nové bázi.

Tvrzení 1.3.5. *Buď $Q_{ee'}$ matice přechodu od staré báze e k nové bázi e'. Potom*

$$x' = Q_{ee'} \cdot x.$$

Důkaz. Buď $Q_{ee'} = (q_i^j)$ matice přechodu od staré báze e k nové bázi e' (u q_i^j dolní index je sloupcový, horní index řádkový). Tedy

$$e_i = \sum_j q_i^j e'_j.$$

Buď $v = x^1 e_1 + \dots + x^n e_n \in V$. Potom

$$\begin{aligned} v &= x^1 \sum\nolimits_j q_1^j e'_j + \dots + x^n \sum\nolimits_j q_n^j e'_j \\ &= x^1 (q_1^1 e'_1 + q_1^2 e'_2 + \dots + q_1^n e'_n) + \dots + x^n (q_n^1 e'_1 + q_2^2 e'_2 + \dots + q_n^n e'_n) \\ &= \left(\sum\nolimits_j q_j^1 x^j\right) e'_1 + \left(\sum\nolimits_j q_j^2 x^j\right) e'_2 + \dots + \left(\sum\nolimits_j q_j^n x^j\right) e'_n. \end{aligned}$$

Tedy

$$x'^i = \sum_j q_j^i x^j \qquad \text{a} \qquad x' = Q_{ee'} \cdot x.$$ □

Příklad. Mějme $\boldsymbol{R}^2$, starou bázi $e = ((1,0),(1,1))$ a novou bázi $e' = ((1,2),(1,0))$. Pro $v = (2,4)$ je $x = (-2,4)$ a $x' = (2,0)$.

Matice přechodu od staré báze e k nové bázi e' je

$$Q_{ee'} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

A skutečně

$$x' = Q_{ee'} \cdot x = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}. \qquad \blacksquare$$

Tvrzení 1.3.6. *Buď $e = (e_1, \dots, e_n)$ báze vektorového prostoru V, buďte $x = (x^1, \dots, x^n)$ souřadnice vektoru $u \in V$ a $y = (y^1, \dots, y^n)$ souřadnice vektoru $v \in V$. Pak $x + y = (x^1 + y^1, \dots, x^n + y^n)$ jsou souřadnice vektoru $u + v$. Buď $p \in P$ libovolný skalár. Pak $px = (px^1, \dots, px^n)$ jsou souřadnice vektoru pu.*

Důkaz. Cvičení. $\square$

3. přednáška, 10. 3. 2020

Tvrzení 1.3.7. *Každý konečněrozměrný vektorový prostor má bázi.*

Důkaz. Konečněrozměrný vektorový prostor má konečnou množinu generátorů. Ukážeme, že z ní lze vybrat lineárně nezávislou podmnožinu, která generuje stejný vektorový prostor a je tedy bází. Buď $\{v_1, \ldots, v_n\}$ množina generátorů vektorového prostoru. Z této množiny vypusťme v_1, pokud $v_1 = 0$. Dále postupně pro $i = 2, \ldots, n$ vypusťme vektor v_i, je-li lineární kombinací předchozích. Zbylé vektory nazvěme vybrané a označme je $u_1, \ldots, u_m$. Je-li prvek množiny generátorů lineární kombinací ostatních generátorů, jeho vypuštěním z množiny generátorů dostaneme opět množinu generátorů (ověřte). Proto vybrané vektory generují tentýž vektorový prostor.

Díky postupu při vybírání vektorů $u_1, \ldots, u_m$ není žádný z nich lineární kombinací předchozích a množina $\{u_1, \ldots, u_m\}$ je lineárně nezávislá. □

Definice. (1) *Minimální množina generátorů* vektorového prostoru V je množina vektorů, která generuje V, ale žádná její vlastní podmnožina negeneruje V.
(2) *Maximální lineárně nezávislá množina vektorů* vektorového prostoru V je lineárně nezávislá množina vektorů z V, která není vlastní podmnožinou žádné lineárně nezávislé množiny.

Tvrzení 1.3.8. *Buďte $u_1, \ldots, u_n \in V$. Pak následující podmínky jsou ekvivalentní:*

(1) $u_1, \ldots, u_n$ je báze V;
(2) $\{u_1, \ldots, u_n\}$ je minimální množina generátorů V;
(3) $\{u_1, \ldots, u_n\}$ je maximální lineárně nezávislá množina vektorů V.

Důkaz. (1) $\Rightarrow$ (2): Je-li $u_1, \ldots, u_n$ báze, je $\{u_1, \ldots, u_n\}$ množina generátorů. Byla-li by nějaká vlastní podmnožina také množinou generátorů, ostatní vektory by byly jejich lineárními kombinacemi a $\{u_1, \ldots, u_n\}$ by byla lineárně závislá.

(2) $\Rightarrow$ (1): $\{u_1, \ldots, u_n\}$ je množina generátorů. Kdyby byla lineárně závislá, jeden z vektorů by byl lineární kombinací ostatních a nebyla by to tedy minimální množina generátorů.

(1) $\Rightarrow$ (3): Je-li $u_1, \ldots, u_n$ báze, je $\{u_1, \ldots, u_n\}$ lineárně nezávislá množina vektorů. Přidáním libovolného vektoru se lineární nezávislost poruší, protože ten vektor je lineární kombinací vektorů báze.

(3) $\Rightarrow$ (1): Množina $\{u_1, \ldots, u_n\}$ je lineárně nezávislá. Přidáme-li do ní další vektor, bude lineárně závislá a tedy jeden z jejích vektorů, ten přidaný (předchozí to být nemohou) je lineární kombinací předchozích. Takže $\{u_1, \ldots, u_n\}$ je i množina generátorů. □

Tvrzení poskytuje dvě alternativní definice báze, které se často používají. Má též důležité důsledky.

Důsledek. *Buď V n-rozměrný vektorový prostor. Pak*

(1) libovolná jeho n-prvková lineárně nezávislá podmnožina tvoří bázi V;
(2) libovolných n jeho generátorů tvoří bázi V.

Důkaz. (1) Buď $\{u_1, \ldots, u_n\} \subset V$ lineárně nezávislá množina. V prostoru V existuje n generátorů, takže lineárně nezávislých vektorů v něm musí být $\leq n$. Jelikož množina $\{u_1, \dots, u_n\}$ má n prvků, je maximální lineárně nezávislou množinou, čili bází.

(2) Buďte $u_1, \dots, u_n \in V$ generátory. V prostoru V existuje n lineárně nezávislých vektorů, takže generátorů v něm musí být $\geq n$. Množina $\{u_1, \dots, u_n\}$ má n prvků, a proto je minimální množinou generátorů, čili bází. □

Důsledek. *Buď $\{u_1, \dots, u_k\}$ lineárně nezávislá podmnožina n-rozměrného vektorového prostoru V. Pak ji lze doplnit do báze $(u_1, \dots, u_k, u_{k+1}, \dots, u_n)$.*

Důkaz. V případě, že vektory $u_1, \dots, u_k$ generují V, tvoří bázi. Jinak existuje vektor $u_{k+1} \in V$, který není lineární kombinací vektorů $u_1, \dots, u_k$, načež je množina $\{u_1, \dots, u_k, u_{k+1}\}$ lineárně nezávislá, protože u_{k+1} není lineární kombinací předchozích vektorů.

Opakováním téže úvahy po s krocích obdržíme lineárně nezávislou množinu $\{u_1, \dots, u_k, u_{k+1}, \dots, u_{k+s}\}$. Po $n - k$ krocích budeme mít n-prvkovou lineárně nezávislou množinu, která bude bází podle předchozího důsledku. □

1.4. Přímý součet vektorových prostorů

Definice. Buďte $U_1, \dots, U_n$ vektorové prostory nad polem P. Na kartézském součinu $U_1 \times \cdots \times U_n$ zaveďme strukturu vektorového prostoru předpisem

$$\begin{aligned} (u_1, \dots, u_n) + (v_1, \dots, v_n) &= (u_1 + v_1, \dots, u_n + v_n), \\ p(u_1, \dots, u_n) &= (pu_1, \dots, pu_n) \end{aligned}$$

pro libovolné $(u_1, \dots, u_n), (v_1, \dots, v_n) \in U_1 \times \cdots \times U_n$ a $p \in P$.

Vektorový prostor $U_1 \times \cdots \times U_n$ s touto algebraickou strukturou se značí $U_1 \oplus \cdots \oplus U_n$ a nazývá se *přímý součet* vektorových prostorů $U_1, \dots, U_n$.

Cvičení. Ověřte, že se jedná o vektorový prostor.

Tvrzení 1.4.1. *Jsou-li $U_1, \dots, U_n$ konečněrozměrné vektorové prostory, pak platí*

$$\dim(U_1 \oplus \cdots \oplus U_n) = \dim U_1 + \cdots + \dim U_n.$$

Důkaz. Pro každé i nechť $(e^i_1, \dots, e^i_{m_i})$ je báze U_i. Potom

$$\begin{aligned} &((e^1_1, 0, \dots, 0), \dots, (e^1_{m_1}, 0, \dots, 0), \\ &\ (0, e^2_1, 0, \dots, 0), \dots, (0, e^2_{m_2}, 0, \dots, 0), \\ &\ \dots, \\ &\ (0, \dots, 0, e^n_1), \dots, (0, \dots, 0, e^n_{m_n})) \end{aligned}$$

je báze $U_1 \oplus \cdots \oplus U_n$ (cvičení). □

---

2. Vektorové podprostory

Použité učební texty:

[Marvan, 10. Vektorové podprostory]

[Marvan, Popis podprostorů v P^s homogenními soustavami. V 12. Frobeniova věta]

2.1. Definice, příklady, základní vlastnosti

Definice. Buď V vektorový prostor nad polem P. Podmnožina $U \subseteq V$ se nazývá *vektorový podprostor*, jestliže platí

(i) $0 \in U$;
(ii) $a + b \in U$ pro každé dva vektory $a, b \in U$ (uzavřenost na sčítání);
(iii) $ra \in U$ pro každý vektor $a \in U$ a každý skalár $r \in P$ (uzavřenost na násobení skalárem).

Podle (iii), pro každý vektor $u \in U$ máme $-u = (-1) \cdot u \in U$, a to znamená, že s každým vektorem leží v U i vektor k němu opačný. To spolu s (i) a (ii) znamená, že takový podprostor je podgrupa abelovské grupy $(V, +, 0, -)$.

Axiomy vektorového prostoru jsou splněny na V a tím spíše na U (cvičení). Tudíž, podobně jako u ostatních algebraických podstruktur, podprostor je sám též vektorovým prostorem.

Příklad. (1) Nulový prostor je podprostor každého prostoru a každý prostor je sám svým podprostorem.
(2) $\boldsymbol{R}$ je podprostorem vektorového prostoru $\boldsymbol{C}$ nad polem $\boldsymbol{R}$ (ověřte).
(3) $\{(a, 0) | a \in \boldsymbol{R}\}$ je podprostor vektorového prostoru $\boldsymbol{R}^2$ nad polem $\boldsymbol{R}$ (ověřte). ■

Mnoho dalších příkladů můžeme získat jako tzv. lineární obaly.

Definice. Buď U podmnožina vektorového prostoru V nad polem P. *Lineární obal* množiny U je množina $\{x_1v_1 + \cdots + x_nv_n |\ n \in \boldsymbol{N}, v_1, \ldots, v_n \in U, x_1, \ldots, x_n \in P\}$ všech lineárních kombinací vektorů z množiny U a označujeme ho $[\![U]\!]$.

V případě, že $U = \{v_1, \ldots, v_n\}$, je $[\![U]\!] = \{x_1v_1 + \cdots + x_nv_n |\ x_1, \ldots, x_n \in P\}$ a píšeme $[\![v_1, \ldots, v_n]\!]$.

Tvrzení 2.1.1. *Buď W podmnožina vektorového prostoru V nad polem P. Pak platí:*

(1) $[\![W]\!]$ je podprostorem ve V.
(2) Je-li $U \subseteq V$ podprostor obsahující W, pak $[\![W]\!] \subseteq U$.

Důkaz. (1) Stačí ukázat, že množina $[\![W]\!]$ splňuje podmínky (i)–(iii) z definice vektorového podprostoru. Podmínka (i): Pro libovolný vektor $v \in W$ je $0 = 0v \in [\![W]\!]$. Podmínka (ii): Jsou-li $u, v \in [\![W]\!]$, potom $u = x_1u_1 + \cdots + x_mu_m$ a $v = y_1v_1 + \cdots + y_nv_n$ pro nějaké $x_i, y_j \in P$, $u_i, v_j \in W$ a $m, n \in \boldsymbol{N}$. Tedy $u + v = x_1u_1 + \cdots + x_mu_m + y_1v_1 + \cdots + y_nv_n \in [\![W]\!]$. Podmínka (iii): Cvičení.

(2) Buď $w \in [\![W]\!]$, tedy $w = x_1w_1 + \cdots + x_nw_n$ pro nějaké $x_i \in P$, $w_i \in W$ a $n \in \boldsymbol{N}$. Jelikož $W \subseteq U$, všechny vektory w_i jsou prvky U, což je vektorový podprostor uzavřený na násobení skalárem a sčítání vektorů. □

Tudíž, $[\![W]\!]$ je nejmenší podprostor prostoru V obsahující množinu W.

Tvrzení 2.1.2. *Libovolný podprostor konečněrozměrného vektorového prostoru je konečněrozměrný.*

Důkaz. Buď V konečněrozměrný prostor, $\dim V = n$, buď $U \subset V$ podprostor. Zkonstruujeme bázi postupem, který jsme použili při doplňování lineárně nezávislé množiny vektorů do báze v důkazu druhého Důsledku Tvrzení 1.3.8.

0-tý krok: Je-li U nulový prostor, jsme hotovi (U je 0-rozměrný).

1-tý krok: Když $U \neq \{0\}$, pak existuje vektor $u_1 \in U \setminus \{0\}$. Je-li $U = [\![u_1]\!]$, pak jsme hotovi (U je 1-rozměrný).

k-tý krok: Když $U \neq [\![u_1, \ldots, u_{k-1}]\!]$, pak existuje vektor $u_k \in U \setminus [\![u_1, \ldots, u_{k-1}]\!]$. Je-li $U = [\![u_1, \ldots, u_k]\!]$, pak jsme hotovi ($U$ je k-rozměrný).

Procedura skončí, jakmile narazíme na rovnost $U = [\![u_1, \ldots, u_r]\!]$ pro nějaké r; to se stane. Vskutku, množina $\{u_1, \ldots, u_r\}$ je lineárně nezávislá, protože žádný z uvedených vektorů nich není lineární kombinací předchozích (podle konstrukce $u_i \notin [\![u_1, \ldots, u_{i-1}]\!]$). Podle Tvrzení 1.3.3 lineárně nezávislá množina nemá více prvků než množina generátorů, tudíž $r \leq n$. □

Důsledek. *Vektorový prostor, který obsahuje aspoň jeden nekonečněrozměrný podprostor, je nekonečněrozměrný.*

Cvičení. Uvažujme například o prostoru $C^r \boldsymbol{R}$ všech funkcí $\boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, spojitých se všemi derivacemi až do řádu r včetně. Prostor $C^r \boldsymbol{R}$ je nekonečněrozměrný, protože obsahuje podprostor polynomů $\boldsymbol{R}[x]$, který je nekonečněrozměrný.

Tvrzení 2.1.3. *Buď V konečněrozměrný vektorový prostor, buď $U \subseteq V$ jeho podprostor. Jestliže* $\dim U = \dim V$, *pak* $U = V$.

Důkaz. Buď $(u_1, \ldots, u_n)$ libovolná báze U. Připusťme, že existuje vektor $v \in V \setminus U$. V prostoru V pak máme $(n+1)$-prvkovou lineárně nezávislou množinu vektorů $u_1, \ldots, u_n, v$ (žádný z nich není lineární kombinací předchozích: vektory u_i protože jsou bázové, vektor v proto, že jinak by ležel v U). Tedy $\dim V \geq n + 1 > n = \dim U$. □

Příklad. (1) Podprostory $\boldsymbol{R}$.
(2) Podprostory $\boldsymbol{R}^2$.
(3) Podprostory $\boldsymbol{R}^3$. ■

2.2. Průnik a součet podprostorů

Tvrzení 2.2.1. *Buďte $U', U'' \subseteq V$ podprostory V. Pak $U' \cap U''$ je podprostor V.*

Důkaz. Ověřme podmínky (i)–(iii). Podmínka (i): $0 \in U' \cap U''$, protože $0 \in U'$ a $0 \in U''$. Podmínka (ii): Nechť $a, b \in U' \cap U''$. Pak $a, b \in U'$, takže $a + b \in U'$. Podobně $a, b \in U''$, takže $a + b \in U''$. Tudíž, $a + b \in U' \cap U''$. Podmínka (iii): Cvičení. □

Cvičení. Průnik libovolného systému podprostorů je podprostor.

Definice. Buďte U', U'' podprostory V. Označme

$$U' + U'' = \{u' + u'' |\ u' \in U', u'' \in U''\}.$$

Množina $U' + U''$ se nazývá *součet* podprostorů $U' + U''$.

Prvky množiny $U' + U''$ jsou všechny vektory $v \in V$, pro něž existuje vyjádření $v = u' + u''$, kde $u' \in U'$ a $u'' \in U''$.

Tvrzení 2.2.2. *Buďte $U', U'' \subseteq V$ podprostory V. Pak $U' + U''$ je podprostor V.*

Důkaz. Podmínka (i): $0 = 0 + 0 \in U' + U''$, kde $0 \in U'$ a $0 \in U''$. Podmínka (ii): Nechť $a, b \in U' + U''$. Pak $a = a' + a''$ a $b = b' + b''$, kde $a', b' \in U'$, $a'', b'' \in U''$, načež $a + b = a' + a'' + b' + b'' = (a' + b') + (a'' + b'') \in U' + U''$. Podmínka (iii): Cvičení. □

Cvičení. Dokažte, že (1) $U', U'' \subseteq U' + U''$.

(2) Je-li U podprostor ve V takový, že $U' \subseteq U$ a $U'' \subseteq U$, pak $U' + U'' \subseteq U$.

Návod: (1) Je-li $u' \in U'$ libovolný prvek, pak $u' = u' + 0 \in U' + U''$.

(2) Buď $u' + u''$ obecný vektor z $U' + U''$, $u' \in U'$, $u'' \in U''$. Protože $U', U'' \subseteq U$, máme $u', u'' \in U$, načež $u' + u'' \in U$.

Množina $S(V)$ všech podprostorů vektorového prostoru V je uspořádána inkluzí $\subseteq$. Z dokázaných tvrzení o průnicích a součtech podprostorů plyne, že množina $S(V)$ je svazově uspořádána, přičemž infimem je průnik a supremem je součet podprostorů. Tudíž, $(S(V), \cap, +)$ je svaz. Tento svaz není obecně ani distributivní, ani komplementární.

Tvrzení 2.2.3. *Buďte U_1, U_2 konečněrozměrné podprostory V. Pak*

$$\dim U_1 + \dim U_2 = \dim(U_1 + U_2) + \dim(U_1 \cap U_2).$$

Důkaz. Nechť $\dim U_1 = n_1$, $\dim U_2 = n_2$, $\dim(U_1 \cap U_2) = r$ a $\dim(U_1 + U_2) = s$. Buď $(u_1, \dots, u_r)$ báze v $U_1 \cap U_2$. To je nezávislá množina vektorů v U_1 resp. v U_2 a proto se dá v obou prostorech doplnit do báze vektory $u_1^1, \dots, u_{n_1-r}^1$ resp. $u_1^2, \dots, u_{n_2-r}^2$. Ukažme, že $(u_1, \dots, u_r, u_1^1, \dots, u_{n_1-r}^1, u_1^2, \dots, u_{n_2-r}^2)$ je báze v $U_1 + U_2$.

Množina $\{u_1, \dots, u_r, u_1^1, \dots, u_{n_1-r}^1, u_1^2, \dots, u_{n_2-r}^2\}$ je lineárně nezávislá. Skutečně, nechť

$$c_1 u_1 + \dots + c_r u_r + c_1^1 u_1^1 + \dots + c_{n_1-r}^1 u_{n_1-r}^1 + c_1^2 u_1^2 + \dots + c_{n_2-r}^2 u_{n_2-r}^2 = 0$$

pro nějaké skaláry $c_1, \dots, c_r, c_1^1, \dots, c_{n_1-r}^1, c_1^2, \dots, c_{n_2-r}^2 \in P$. Pak

$$c_1 u_1 + \dots + c_r u_r + c_1^1 u_1^1 + \dots + c_{n_1-r}^1 u_{n_1-r}^1 = -c_1^2 u_1^2 - \dots - c_{n_2-r}^2 u_{n_2-r}^2,$$

kde na levé straně stojí prvek z U_1 a na pravé stojí prvek z U_2, ale protože jsou si rovny, leží v $U_1 \cap U_2$, a lze je jednoznačně vyjádřit jako lineární kombinace vektorů $u_1, \dots, u_r$. Vyjádřeme tak vektor na pravé straně: existují skaláry $x_1, \dots, x_r \in P$ takové, že

$$x_1 u_1 + \dots + x_r u_r = -c_1^2 u_1^2 - \dots - c_{n_2-r}^2 u_{n_2-r}^2.$$

Z nezávislosti množiny $\{u_1, \dots, u_r, u_1^2, \dots, u_{n_2-r}^2\}$ (tvoří bázi v U_2) pak okamžitě plyne, že $x_1 = \dots = x_r = c_1^2 = \dots = c_{n_2-r}^2 = 0$. Odtud

$$c_1 u_1 + \dots + c_r u_r + c_1^1 u_1^1 + \dots + c_{n_1-r}^1 u_{n_1-r}^1 = 0,$$

načež z podobných důvodů $c_1 = \dots = c_r = c_1^1 = \dots = c_{n_1-r}^1 = 0$, což dokazuje nezávislost.

Snadno se dokáže, že vektory $u_1, \dots, u_r, u_1^1, \dots, u_{n_1-r}^1, u_1^2, \dots, u_{n_2-r}^2$ generují $U_1 + U_2$ (cvičení).

Nalezli jsme bázi v $U_1 + U_2$ o $r + (n_1 - r) + (n_2 - r) = n_1 + n_2 - r$ vektorech. Tím je ověřeno, že $n_1 + n_2 - r = s$ a důkaz je hotov. $\square$

Příklad. V prostoru E^3 buď $U \subset E^3$ nějaká rovina procházející počátkem a $L \subset E^3$ libovolná přímka procházející počátkem a neležící v U. Pak U je podprostor a podobně L je podprostor, přičemž evidentně $U \cap L = \{0\}$. Proto $\dim(U + L) = \dim U + \dim L - \dim(U \cap L) = 2 + 1 - 0 = 3 = \dim E^3$. Tudíž, $E^3 = U + L$ a každý vektor $v \in E^3$ je součtem $v = u + l$, kde $u \in U$ a $l \in L$. Jak najdeme vektory u, l, je-li dán vektor v? $\blacksquare$

Cvičení. Buďte U_1, U_2 podprostory ve vektorovém prostoru V, nechť $\dim U_1 + \dim U_2 > \dim V$. Ukažte, že existuje nenulový vektor $u \in U_1 \cap U_2$.

Cvičení. Ukažte, že $[\![u_1, \ldots, u_n]\!] + [\![v_1, \ldots, v_m]\!] = [\![u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_m]\!]$.

Definici součtu podprostorů lze snadno rozšířit na libovolný konečný počet sčítanců:

$$U_1 + \cdots + U_n = \{u_1 + \cdots + u_n |\ u_1 \in U_1, \ldots, u_n \in U_n\} .$$

Vektor $v \in V$ tedy leží v $U_1 + \cdots + U_n$ právě tehdy, když jej lze zapsat jako součet $v = u_1 + \cdots + u_n$, přičemž $u_1 \in U_1, \ldots, u_n \in U_n$.

4. přednáška, 7. 4. 2020, distančně

2.3. Přímý součet podprostorů

Definice. Buď V vektorový prostor nad polem P. Buďte $U_1, \dots, U_n$ podprostory V. Součet $U_1 + \cdots + U_n$ se nazývá *přímý*, jestliže každý vektor $v \in U_1 + \cdots + U_n$ lze zapsat *právě jedním způsobem* jako součet $v = u_1 + \cdots + u_n$, kde $u_1 \in U_1, \dots, u_n \in U_n$. Přímý součet zapisujeme s tečkami: $U_1 \dot{+} \cdots \dot{+} U_n$.

Příklad. Nechť $U_1 = \{(x, 0, 0) | x \in P\}$, $U_2 = \{(0, y, 0) | y \in P\}$, $U_3 = \{(0, 0, z) | z \in P\}$. Pak $P^3 = U_1 \dot{+} U_2 \dot{+} U_3$, protože libovolný vektor $u = (x, y, z) \in P^3$ má jediné vyjádření ve tvaru součtu $u = u_1 + u_2 + u_3$, kde $u_1 \in U_1, u_2 \in U_2, u_3 \in U_3$, a sice $(x, y, z) = (x, 0, 0) + (0, y, 0) + (0, 0, z)$. ■

Tvrzení 2.3.1. *Buďte $U_1, U_2 \subseteq V$ podprostory V. Následující podmínky jsou ekvivalentní:*

(i) $V = U_1 \dot{+} U_2$;
(ii) $V = U_1 + U_2$, $U_1 \cap U_2 = 0$.

Důkaz. (i) ⇒ (ii): Z existence rozkladu $v = u_1 + u_2$ plyne, že $V = U_1 + U_2$. Ukažme, že $U_1 \cap U_2 = 0$. Buď tedy $u \in U_1 \cap U_2$. Pak máme dva rozklady vektoru u na sčítance z U_1 a U_2, a sice $u = 0 + u$ a $u = u + 0$. Totožnost obou rozkladů znamená, že $u = 0$.

(ii) ⇒ (i): Existence vektorů u_1, u_2 plyne z definice součtu $U_1 + U_2$. Jednoznačnost dokážeme: Pokud je u_1', u_2' jiná dvojice vektorů taková, že $v = u_1' + u_2'$, pak

$$0 = v - v = (u_1 - u_1') + (u_2 - u_2'),$$

a tedy $u_1 - u_1' = -(u_2 - u_2')$. Vektor $u_1 - u_1' \in U_1$ je roven vektoru $-(u_2 - u_2') \in U_2$, a proto leží v průniku $U_1 \cap U_2$, což je nulový prostor. Tudíž, $u_1 - u_1' = 0$ a $u_2 - u_2' = 0$. □

Příklad. (1) $V = V \dot{+} 0$ pro libovolný vektorový prostor V.
(2) Prostor E^3 je přímým součtem $U \dot{+} L$, je-li $U \subset E^3$ libovolná rovina procházející počátkem a $L \subset E^3$ libovolná přímka procházející počátkem a neležící v U. ■

V případě konečněrozměrných podprostorů máme jednoduché kritérium.

Tvrzení 2.3.2. *Buďte U_1, U_2 podprostory konečněrozměrného vektorového prostoru V, nechť $V = U_1 + U_2$. Pak následující podmínky jsou ekvivalentní:*

(i) $V = U_1 \dot{+} U_2$;
(ii) $\dim V = \dim U_1 + \dim U_2$.

Důkaz. (i) ⇒ (ii): Máme $\dim V = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 \cap U_2) = \dim U_1 + \dim U_2$.

(ii) ⇒ (i): Nechť $\dim V = \dim U_1 + \dim U_2$. Potom $\dim(U_1 \cap U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim V = 0$. □

Cvičení. Buďte $V = U_1 \dot{+} U_2$, $(e_1^1, \dots, e_{m_1}^1)$ báze podprostoru U_1, $(e_1^2, \dots, e_{m_2}^2)$ báze podprostoru U_2. Pak $(e_1^1, \dots, e_{m_1}^1, e_1^2, \dots, e_{m_2}^2)$ je báze prostoru V. Dokažte.

Cvičení. Buď $m < n$, buď $(e_1, \dots, e_m, e_{m+1}, \dots, e_n)$ nějaká báze vektorového prostoru V. Pak platí $V = [\![e_1, \dots, e_m]\!] \dot{+} [\![e_{m+1}, \dots, e_n]\!]$. Dokažte.

Vzniká otázka, jak jednoduše rozeznat přímý součet n podprostorů při $n > 2$. Mohlo by se zdát, že prostor V je přímým součtem podprostorů $U_1, \ldots, U_n$, jestliže je jejich součtem a podprostory $U_1, \ldots, U_n$ mají po dvou nulový průnik. Následující příklad ukazuje, že nic podobného neplatí:

Příklad. Prostor E^3 není přímým součtem $L_1 \dot{+} L_2 \dot{+} U$, je-li U rovina procházející počátkem a jsou-li $L_1, L_2 \subset E^3$ různé přímky procházející počátkem, neležící v rovině U.

Skutečně, součet $L_1 + L_2$ je sice přímý, ale má nenulový průnik s rovinou U. Libovolný nenulový vektor $u = l_1 + l_2$ ležící v průniku $(L_1 + L_2) \cap U$ pak má dvojí vyjádření: jako součet $l_1 + l_2 + 0$ a jako součet $0 + 0 + u$. ■

Tvrzení 2.3.3. *Buďte $U_1, \ldots, U_n \subseteq V$ podprostory takové, že $V = U_1 + \cdots + U_n$. Pak jsou následující podmínky ekvivalentní:*

(i) $V = U_1 \dot{+} U_2 \dot{+} \cdots \dot{+} U_n$;

(ii) $U_1 \cap U_2 = 0$, $(U_1 + U_2) \cap U_3 = 0$, $\ldots$, $(U_1 + \cdots U_{n-1}) \cap U_n = 0$.

Je-li navíc prostor V konečněrozměrný, pak je s nimi ekvivalentní i podmínka

(iii) $\dim V = \dim U_1 + \cdots + \dim U_n$.

Důkaz. Cvičení. □

Jsou-li $U_1, \ldots, U_n$ podprostory nějakého vektorového prostoru U, pak mohou existovat dva různé přímé součty, $U_1 \dot{+} \cdots \dot{+} U_n$ a $U_1 \oplus \cdots \oplus U_n$. První z nich je podprostor v U, kdežto druhý není. Nicméně, oba přímé součty jsou izomorfní. Plyne to z tvrzení uvedeného později v kapitole o lineárních zobrazeních.

2.4. Popis podprostorů P^n homogenními soustavami

Jedna z úloh lineární algebry zní: *k danému podprostoru v P^n najděte homogenní soustavu, která jej určuje.*

Tvrzení 2.4.1. *Každý podprostor $[\![v_1, \ldots, v_k]\!] \subseteq P^n$ je roven prostoru všech řešení homogenní soustavy $Av = 0$, kde A je vhodná matice typu $m \times n$, přičemž $m = n - \dim[\![v_1, \ldots, v_k]\!]$.*

Důkaz. Hledáme matici A splňující

$$Av_i = 0 \quad \text{pro každé } i = 1, \ldots, k, \tag{1}$$

což je totéž jako

$$AV = 0, \tag{2}$$

kde V je matice s k sloupci $v_1, \ldots, v_k$. Transponujeme-li na obou stranách, obdržíme

$$V^T A^T = 0; \tag{3}$$

zde V^T je matice s řádky v_i. Podmínka (3) je ekvivalentní s (2), a tedy i s (1).

Řádky hledané matice A označíme $a_j \in P^n$, $j = 1, \ldots, m$ (odpovídají jednotlivým rovnicím soustavy); po transponování přejdou ve sloupce matice A^T. Soustavu (3) pak ekvivalentně zapíšeme jako

$$V^T a_j = 0 \quad \text{pro každé } j = 1, \ldots, m. \tag{4}$$

Soustava (4) je homogenní, matice soustavy V^T je známa. Hledanou matici A sestavíme tak, že její řádky a_j budou tvořeny některou fundamentální soustavou řešení soustavy (4).

Označme Ξ_A prostor všech řešení homogenní soustavy $Av = 0$. Máme $v_i \in \Xi_A$, odkud inkluze $[\![v_1, \dots, v_k]\!] \subseteq \Xi_A$. Přitom platí $\dim \Xi_A = n - \operatorname{rank} A = n - (n - \operatorname{rank} V^T) = \operatorname{rank} V^T = \dim [\![v_1, \dots, v_k]\!]$. Tudíž, $\Xi_A = [\![v_1, \dots, v_k]\!]$. □

Příklad. K podprostoru v P^4 s generátory $(1, 0, 2, 0), (0, 1, 1, 1)$ najděme příslušnou homogenní soustavu. Podle důkazu předchozího tvrzení, buď V matice, jejíž sloupce jsou zde uvedené generátory. Řešme soustavu $V^T a = 0$, čili

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0$$

s hlavními neznámými x_1, x_2, parametrickými neznámými x_3, x_4 a řešením

$$x_1 = -2x_3, \qquad x_2 = -x_3 - x_4.$$

Fundamentální soustava řešení je $(-2, -1, 1, 0)$ a $(0, -1, 0, 1)$. Tudíž, hledaná matice homogenní soustavy bude

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vyhovuje i libovolná matice řádkově ekvivalentní s právě nalezenou maticí. ■

Není obtížné najít součet podprostorů zadaných generátory, resp. průnik podprostorů zadaných homogenními soustavami:

Cvičení. $[\![u_1, \dots, v_i]\!] + [\![u_{i+1}, \dots, u_n]\!] = [\![u_1, \dots, v_i, u_{i+1}, \dots, u_n]\!]$.

Cvičení. $\{x | A'x = 0\} \cap \{x | A''x = 0\} = \{x | Ax = 0\}$, kde

$$A = \begin{pmatrix} A' \\ A'' \end{pmatrix}.$$

Protože zadání podprostoru generátory umíme převádět na zadání homogenním systémem a naopak, umíme najít i součet podprostorů zadaných homogenními soustavami resp. průnik podprostorů zadaných generátory.

---

3. Lineární zobrazení

Použité učební texty:
[Marvan, 11. Lineární zobrazení]

V celé přednášce pojednáváme o vektorových prostorech nad jedním a týmž polem P.

3.1. Definice, příklady

Definice. Buďte U, V vektorové prostory. Zobrazení $f: U \to V$ se nazývá *lineární*, přesněji *lineární nad polem P*, jestliže pro každé vektory $a, b \in U$ a každý skalár $r \in P$ platí

(1) $f(a+b) = f(a) + f(b)$ (aditivita)
(2) $f(ra) = rf(a)$. (homogenita)

Jiný název pro lineární zobrazení je *homomorfismus vektorových prostorů.*

Příklad. (1) Identické zobrazení $\mathrm{id}: U \to U$, $\mathrm{id}(a) = a$, je lineární.

(2) Nulové zobrazení $0: U \to U$, $0(a) = 0$, je lineární.

(3) Násobení skalárem $c \in P$: Zobrazení $f_c: U \to U$, $f_c(a) = ca$, je lineární. Nazývá se *homotetie.* Všimněte si, že předchozí dva příklady jsou speciální případy pro $c = 1$, resp. $c = 0$.

(4) Zobrazení $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ je lineární nad $\boldsymbol{R}$ právě tehdy, když existuje skalár $c \in \boldsymbol{R}$ takový, že $f(a) = ca$. Dokažte. Návod: Položte $c = f(1)$.

(5) Zobrazení $f: \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^2$, $(x, y, z) \mapsto (3x + 2y + z, x - y)$. Ověřte.

(6) Zobrazení $f: \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^4$, $(x, y) \mapsto (x + y, x, x - y, y)$. Ověřte.

(7) Zobrazení $\boldsymbol{C} \to \boldsymbol{C}$, $z \mapsto z^*$, kde z^* je číslo komplexně sdružené k číslu $z \in \boldsymbol{C}$, je lineární zobrazení vektorových prostorů nad $\boldsymbol{R}$. Toto zobrazení není lineární zobrazení nad $\boldsymbol{C}$. Ověřte.

(8) Zobrazení $\mathrm{re}: \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{R}$, $z \mapsto \mathrm{re}\, z = \frac{1}{2}(z + z^*)$ (reálná část čísla z) je lineární zobrazení vektorových prostorů nad $\boldsymbol{R}$.

(9) Je-li $U \subseteq V$ podprostor, pak vložení $\iota_U: U \to V$, $\iota_U(u) = u$, je lineární zobrazení.

(10) Otáčení. Při otáčení Eukleidovské roviny kolem pevného bodu o úhel α se všechny vektory otáčejí o týž úhel α, nezávisle na jejich umístění. Vzniká zobrazení $\phi_\alpha: E^2 \to E^2$.

Otáčení převádí součet vektorů na součet vektorů a podobně c-násobek vektoru na c-násobek vektoru. Například aditivita se velmi názorně ověří poukazem na to, že otáčením kolem vrcholu se rovnoběžník převádí v rovnoběžník a délka jeho stran a úhlopříček se přitom nemění.

Podobně otáčení kolem pevné osy v trojrozměrném Eukleidovském prostoru představuje lineární zobrazení vektorů $E^3 \to E^3$.

(11) Rotace $E^3 \to E^3$.

(12) Rovnoběžné promítání. Promítání Eukleidovského prostoru E^3 do 2-rozměrného podprostoru (průmětny) R ve zvoleném směru L je zobrazení $E^3 \to R$. Směrem se rozumí libovolný 1-rozměrný podprostor L takový, že $E^3 = L \dot{+} R$. Průmět do roviny R je sčítanec x_R v (jednoznačném) vyjádření $x = x_L + x_R$, kde $x_L \in L$ a $x_R \in R$.

Promítání $p: E^3 \to R$ je lineární zobrazení. Aditivita se projevuje v tom, že průmětem rovnoběžníka je rovnoběžník.

(13) Projekce na přímku L procházející počátkem $E^2 \to L$.

(14) Osová souměrnost podle přímky procházející počátkem, $E^2 \to E^2$ i $E^3 \to E^3$.

(15) Zobrazení $U \to P^{\dim U}$ přiřazující vektorům souřadnice vzhledem ke zvolené bázi, viz Tvrzení 1.3.6.

(16) Zobrazení $P^{n\times n} \to P$, $A \mapsto \operatorname{tr} A$, přiřazující matici A typu $n \times n$ nad polem P její stopu $\operatorname{tr} A = \sum_i a_{ii}$ (součet prvků na diagonále).

(17) Zobrazení $P[x] \to P[x]$, kde $P[x]$ je prostor polynomů, přiřazující polynomu jeho derivaci. Derivace může být například i zobrazení $P_n[x] \to P_{n-1}[x]$, nebo zobrazení z prostoru diferencovatelných funkcí do prostoru všech funkcí.

(18) Zobrazení z prostoru všech integrovatelných funkcí na uzavřeném intervalu do $\boldsymbol{R}$ přiřazující funkci její určitý integrál. ■

Cvičení. Ukažte, že lineární zobrazení $U \to V$ je homomorfismus abelovských grup $(U, +, 0, -) \to (V, +, 0, -)$. Speciálně, $f(0) = 0$, $f(-a) = -f(a)$.

Tvrzení 3.1.1. *Buďte U, V, W vektorové prostory a $f\colon U \to V$, $g\colon V \to W$ lineární zobrazení. Pak $g \circ f\colon U \to W$ je také lineární zobrazení.*

Důkaz. Ověříme aditivitu zobrazení $g \circ f$. Pro libovolná $a, b \in U$ máme $(g \circ f)(a + b) = g(f(a + b)) = g(f(a) + f(b)) = g(f(a)) + g(f(b)) = (g \circ f)(a) + (g \circ f)(b)$. Homogenita se dokáže podobně. Pro libovolné $a \in U$ a $r \in P$ máme $(g \circ f)(ra) = g(f(ra)) = g(rf(a)) = rg(f(a)) = r(g \circ f)(a)$. □

3.2. Jádro a obraz

Definice. Buď $f\colon U \to V$ lineární zobrazení. Označme

$$\operatorname{Ker} f = \{u \in U |\ f(u) = 0\},$$
$$\operatorname{Im} f = fU = \{f(u) |\ u \in U\}.$$

$\operatorname{Ker} f$ se nazývá *jádro* a $\operatorname{Im} f$ se nazývá *obraz* lineárního zobrazení f.

Tvrzení 3.2.1. *Buď $f\colon U \to V$ lineární zobrazení vektorových prostorů. Pak*

(1) $\operatorname{Ker} f$ *je podprostor* U,
(2) $\operatorname{Im} f$ *je podprostor* V.

Důkaz. (1) (i) $0 \in \operatorname{Ker} f$, protože $f(0) = 0$, (ii) Nechť $a, b \in \operatorname{Ker} f$. Pak $a + b \in \operatorname{Ker} f$, protože $f(a + b) = f(a) + f(b) = 0 + 0 = 0$. (iii) Nechť $a \in \operatorname{Ker} f$, $r \in P$. Pak $ra \in \operatorname{Ker} f$, protože $f(ra) = rf(a) = r \cdot 0 = 0$.

(2) (i) $0 \in \operatorname{Im} f$, protože $f(0) = 0$, (ii) Nechť $a, b \in \operatorname{Im} f$, tedy existují $c, d \in U$ takové, že $f(c) = a$ a $f(d) = b$. Pak $a + b \in \operatorname{Im} f$, protože $f(c + d) = f(c) + f(d) = a + b$. (iii) Nechť $a \in \operatorname{Im} f$, $r \in P$, tedy existuje $b \in U$ takové, že $f(b) = a$. Pak $ra \in \operatorname{Im} f$, protože $f(rb) = rf(b) = ra$. □

Cvičení. (1) Pro lineární zobrazení re z příkladu (5) platí:

$$\operatorname{Im} \mathrm{re} = \boldsymbol{R}, \qquad \operatorname{Ker} \mathrm{re} = \boldsymbol{R}\mathrm{i} = \{r\mathrm{i} | r \in \boldsymbol{R}\}.$$

(2) Při rovnoběžném promítání $p\colon E^3 \to E^2$ je podprostor $\operatorname{Ker} p$ totožný se směrem promítání, kdežto $\operatorname{Im} p = E^2$.

(3) Při otáčení $\phi_\alpha\colon E^2 \to E^2$ o úhel $\alpha \neq 2k\pi$ je $\operatorname{Im} \phi_\alpha = E^2$, zatímco $\operatorname{Ker} \phi_\alpha$ je nulový podprostor.

Tvrzení 3.2.2. *Buď $f\colon U \to V$ lineární zobrazení vektorových prostorů. Pak*

(1) f je injektivní právě tehdy, když $\operatorname{Ker} f = 0$,
(2) f je surjektivní právě tehdy, když $\operatorname{Im} f = V$.

Důkaz. (1) Buď f injektivní, buď u libovolný prvek z $\operatorname{Ker} f$. Pak $f(u) = 0$, ale současně $f(0) = 0$, načež z injektivity $u = 0$.

Naopak, nechť $\operatorname{Ker} f = 0$ a nechť $f(a) = f(b)$. Pak $f(a - b) = f(a) - f(b) = 0$, a tedy $a - b \in \operatorname{Ker} f$, načež $a - b = 0$, čili $a = b$.

(2) Zřejmé. □

Jsou-li oba prostory U, V konečněrozměrné, pak se číslo $\dim \operatorname{Ker} f$ nazývá *defekt* a číslo $\dim \operatorname{Im} f$ *hodnost* lineárního zobrazení. Platí o nich následující tvrzení.

Tvrzení 3.2.3. *Buď $f : U \to V$ lineární zobrazení mezi konečněrozměrnými vektorovými prostory U, V. Pak*

$$\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim U.$$

Důkaz. Označme $\dim U = n$ a $\dim \operatorname{Ker} f = m$. Zvolme bázi $(u_1, \dots, u_m)$ v $\operatorname{Ker} f$, doplňme ji vektory $u_{m+1}, \dots, u_n$ do báze v U. Ověřme, že $(f(u_{m+1}), \dots, f(u_n))$ je báze v $\operatorname{Im} f$.

Zaprvé, $f(u_{m+1}), \dots, f(u_n)$ generují $\operatorname{Im} f$. Víme totiž, že $u_1, \dots, u_n$ generují U, načež $f(u_1), \dots, f(u_n)$ generují $fU = \operatorname{Im} f$ (ověřte podrobně), ale $f(u_1) = 0, \dots, f(u_m) = 0$, takže je můžeme z generující množiny bez následků vyškrtnout.

Zadruhé, množina $\{f(u_{m+1}), \dots, f(u_n)\}$ je lineárně nezávislá. Vskutku, uvažujme lineární kombinaci $x_{m+1} f(u_{m+1}) + \dots + x_n f(u_n) = 0$, čili $f(x_{m+1} u_{m+1} + \dots + x_n u_n) = 0$, tj.

$$x_{m+1} u_{m+1} + \dots + x_n u_n \in \operatorname{Ker} f,$$

načež

$$x_{m+1} u_{m+1} + \dots + x_n u_n = x_1 u_1 + \dots + x_m u_m$$

pro vhodné koeficienty $x_1, \dots, x_m$. Ale množina $\{u_1, \dots, u_m, u_{m+1}, \dots, u_n\}$ je lineárně nezávislá, a proto jsou všechny koeficienty $x_1, \dots, x_n$ nulové, zejména $x_{m+1}, \dots, x_n$ jsou nuly, což se mělo dokázat.

Našli jsme bázi $(f(u_{m+1}), \dots, f(u_n))$ podprostoru $\operatorname{Im} f$ čítající $n - m$ vektorů, takže $\dim \operatorname{Im} f = n - m = \dim U - \dim \operatorname{Ker} f$. □

3.3. Izomorfismy

Podobně jako u jiných algebraických struktur, invertibilní homomorfismy se nazývají izomorfismy.

Definice. *Izomorfismus* vektorových prostorů je bijektivní lineární zobrazení.

Tvrzení 3.3.1. *Buď $f : U \to V$ izomorfismus. Pak $f^{-1} : V \to U$ je také izomorfismus.*

Důkaz. Zobrazení f^{-1} je bijektivní. Dokažme, že je lineární. Ověřme aditivitu, tj. rovnost $f^{-1}(v_1 + v_2) = f^{-1}(v_1) + f^{-1}(v_2)$. Buďte $v_1, v_2 \in V$. Počítejme:

$$f(f^{-1}(v_1 + v_2)) = v_1 + v_2 = f(f^{-1}(v_1)) + f(f^{-1}(v_2)) = f(f^{-1}(v_1) + f^{-1}(v_2)).$$

Požadovaná rovnost plyne z injektivnosti zobrazení f. Homogenita podobně.

Jiný důkaz aditivity. Díky bijektivnosti f existují $u_1, u_2 \in U$ taková, že $f(u_1) = v_1$ a $f(u_2) = v_2$. Potom

$$f^{-1}(v_1 + v_2) = f^{-1}(f(u_1) + f(u_2)) = f^{-1}(f(u_1 + u_2)) = u_1 + u_2 = f^{-1}(v_1) + f^{-1}(v_2).$$

□

Definice. Vektorové prostory U, V, mezi nimiž existuje izomorfismus, se nazývají *izomorfní*. Zapisujeme $U \cong V$.

Tvrzení 3.3.2. *(1) Reflexivita: $U \cong U$.*
(2) Symetrie: je-li $U \cong V$, pak $V \cong U$.
(3) Tranzitivita: je-li $U \cong V$, $V \cong W$, pak $V \cong W$.

Důkaz. (1) $\mathrm{id}\colon U \to U$ je izomorfismus. (2) Viz předchozí tvrzení. (3) Kompozice bijekcí je bijekce, kompozice lineárních zobrazení je lineární zobrazení. □

Cvičení. (1) Homotetie $f_c\colon a \mapsto ca$ z příkladu (3) je izomorfismus právě tehdy, když $c \neq 0$.
(2) Homomorfismus $z \mapsto z^*$ z příkladu (4) je izomorfismus $\boldsymbol{C} \cong \boldsymbol{C}$.
(3) Homomorfismus re z příkladu (5) není izomorfismus (není injektivní).
(4) Otáčení je izomorfismus. Rovnoběžné promítání $E^3 \to E^2$ není izomorfismus.

Tvrzení 3.3.3. *Buďte $U \cong V$ konečněrozměrné vektorové prostory. Pak* $\dim U = \dim V$.

Důkaz. Buď $f\colon U \to V$ izomorfismus (podle definice tedy, mimo jiné, injekce a surjekce). Podle Tvrzení 3.2.2 máme $\dim \operatorname{Ker} f = 0$ a $\dim \operatorname{Im} f = \dim V$, a proto díky Tvrzení 3.2.3 $\dim U = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim V$. □

Cvičení. Buď $f\colon U \to V$ izomorfismus konečněrozměrných prostorů. Jestliže $(u_1, \ldots, u_n)$ je báze prostoru U, pak $(f(u_1), \ldots, f(u_n))$ je báze prostoru V. Dokažte. Totéž pro množiny generátorů, resp. lineárně nezávislé množiny.

Izomorfní prostory se z hlediska lineární algebry prakticky neliší a není mezi nimi žádný rozdíl odhalitelný prostředky lineární algebry.

V konečněrozměrném případě je situace obzvlášť příjemná: každý prostor je izomorfní s některým prostorem P^n.

Tvrzení 3.3.4. *(1) Libovolný konečněrozměrný vektorový prostor U nad polem P je izomorfní s prostorem $P^{\dim U}$.*
(2) Konečněrozměrné vektorové prostory jsou izomorfní právě tehdy, když mají stejnou dimenzi.

Důkaz. (1) Nechť $\dim U = n$. Buď $(e_1, \ldots, e_n)$ báze U. Pak má libovolný vektor $u \in U$ souřadnice $(x_1, \ldots, x_n)$, jednoznačně určené vztahem $u = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$. Zaveďme zobrazení $U \to P^n$ předpisem $u \mapsto (x_1, \ldots, x_n)$. O něm je známo, že je lineární, protože při sčítání vektorů se jejich souřadnice sčítají a při násobení skalárem se násobí týmž skalárem.

(2) Implikace „$\Rightarrow$“ již byla dokázána v Tvrzení 3.3.3. Implikace „$\Leftarrow$“: Je-li $\dim U = \dim V$, pak $U \cong P^{\dim U} = P^{\dim V} \cong V$. □

Vidíme, že počítání s vektory v souřadnicích je vlastně výpočtem v izomorfním prostoru $U \cong P^{\dim U}$. Na druhé straně, tento izomorfismus závisí na volbě souřadnic, a to je důvod, proč není vhodné prostory U a P^n ztotožňovat.

5. přednáška, 14. 4. 2020, distančně

Lineární zobrazení je jednoznačně určeno obrazy vektorů libovolné báze a tyto obrazy lze volit libovolně:

Tvrzení 3.3.5. *Buďte U konečněrozměrný vektorový prostor, $(e_1, \dots, e_n)$ jeho báze, V vektorový prostor. Pak ke každé n-tici $v_1, \dots, v_n \in V$ existuje právě jedno lineární zobrazení $f\colon U \to V$ takové, že $f(e_1) = v_1, \dots, f(e_n) = v_n$.*

Důkaz. Zvolme n-tici $v_1, \dots, v_n \in V$. Buď $u \in U$. Potom $u = x_1e_1 + \dots + x_ne_n$ pro vhodné $x_1, \dots, x_n \in P$. Položme $f(u) = x_1v_1 + \dots + x_nv_n$. Cvičení: ověřte, že $f(e_i) = v_i$, f je lineární a je-li f' zobrazení s těmito vlastnostmi, potom $f' = f$. □

Přitom lze snadno rozeznat injektivní a surjektivní homomorfismy:

Tvrzení 3.3.6. *Buď f zobrazení z předchozího tvrzení.*

(1) f je injektivní právě tehdy, když množina $\{v_1, \dots, v_n\}$ je lineárně nezávislá.
(2) f je surjektivní právě tehdy, když vektory $v_1, \dots, v_n$ generují V.

Důkaz. Buď f zobrazení z předchozího tvrzení.

(1) Předpokládejme, že f je injektivní. Nechť $x_1v_1 + \dots + x_nv_n = 0$. Potom

$$0 = x_1v_1 + \dots + x_nv_n = x_1f(e_1) + \dots + x_nf(e_n) = f(x_1e_1 + \dots + x_ne_n).$$

Tedy

$$x_1e_1 + \dots + x_ne_n \in \operatorname{Ker} f.$$

Z injektivnosti f podle Tvrzení 3.2.2 vyplývá, že $x_1e_1 + \dots + x_ne_n = 0$, a z lineární nezávislosti množiny $\{e_1, \dots, e_n\}$ vyplývá, že $x_1 = \dots = x_n = 0$. Tedy, množina $\{v_1, \dots, v_n\}$ je lineárně nezávislá.

Předpokládejme, že množina $\{v_1, \dots, v_n\}$ je lineárně nezávislá. Nechť $u_1, u_2 \in U$ a $f(u_1) = f(u_2)$. Tedy $u_1 = x_1e_1 + \dots + x_ne_n$, $u_2 = y_1e_1 + \dots + y_ne_n$ a

$$\begin{aligned} 0 = f(u_1) - f(u_2) &= x_1f(e_1) + \dots + x_nf(e_n) - y_1f(e_1) - \dots - y_nf(e_n) \\ &= (x_1 - y_1)v_1 + \dots + (x_n - y_n)v_n. \end{aligned}$$

Z lineární nezávislosti množiny $\{v_1, \dots, v_n\}$ dostaneme $x_1 - y_1 = \dots = x_n - y_n = 0$ a $x_1 = y_1, \dots, x_n = y_n$. Tedy $u_1 = u_2$ a f je injektivní.

(2) Cvičení. □

Důsledek. *Zobrazení f z předchozího tvrzení je izomorfismus právě tehdy, když $v_1, \dots, v_n$ tvoří bázi.*

3.4. Přímé součty vektorových podprostorů

Již dříve jsme zavedli přímé součty prostorů i přímé součty podprostorů. Jsou-li $U_1, \dots, U_n$ podprostory vektorového prostoru U, pak existují dva různé přímé součty, $U_1 \dot{+} \dots \dot{+} U_n$ a $U_1 \oplus \dots \oplus U_n$. První z nich je podprostor prostoru U, kdežto druhý není. Nicméně, oba přímé součty jsou izomorfní. Plyne to z následujícího tvrzení.

Tvrzení 3.4.1. *Buďte $U_1, \dots, U_n$ podprostory konečněrozměrného vektorového prostoru U. Pak jsou následující výroky ekvivalentní:*

(1) součet $U_1 + \dots + U_n$ je přímý;
(2) zobrazení $p\colon U_1 \oplus \dots \oplus U_n \to U_1 + \dots + U_n$, $(u_1, \dots, u_n) \mapsto u_1 + \dots + u_n$, je izomorfismus;

(3) $\dim U_1 + \cdots + \dim U_n = \dim(U_1 + \cdots + U_n)$.

Důkaz. (1) $\Rightarrow$ (2): Zobrazení p je lineární (cvičení). Dále, ke každému $u \in U_1 + \cdots + U_n$ existuje rozklad $u = u_1 + \cdots + u_n$, kde $u_i \in U_i$ pro každé $i = 1, \dots, n$. Je-li součet $U_1 + \cdots + U_n$ přímý, potom je rozklad $u = u_1 + \cdots + u_n$ jediný a $u \mapsto (u_1, \dots, u_n)$ je zobrazení $U_1 + \cdots + U_n \to U_1 \oplus \cdots \oplus U_n$, inverzní k p. Potom je p bijektivní, a tedy izomorfismus.

(2) $\Rightarrow$ (3): Je-li $U_1 + \cdots + U_n \cong U_1 \oplus \cdots \oplus U_n$, pak $\dim(U_1 + \cdots + U_n) = \dim(U_1 \oplus \cdots \oplus U_n) = \dim U_1 + \cdots + \dim U_n$.

(3) $\Rightarrow$ (2): Nechť $\dim U_1 + \cdots + \dim U_n = \dim(U_1 + \cdots + U_n)$. Zobrazení p je lineární a surjektivní (cvičení). Máme pak $\dim \operatorname{Ker} p = \dim(U_1 \oplus \cdots \oplus U_n) - \dim \operatorname{Im} p = \dim U_1 + \cdots + \dim U_n - \dim(U_1 + \cdots + U_n) = 0$. Tudíž, p je injektivní, a proto izomorfismus.

(2) $\Rightarrow$ (1): Cvičení. $\square$

Cvičení. Dokažte, že zobrazení p z předchozího tvrzení je lineární.

Cvičení. Pro každé $i = 1, \dots, n$ máme zobrazení $\pi_i \colon U_1 \oplus \cdots \oplus U_n \to U_i$ zadané předpisem $(u_1, \dots, u_n) \mapsto u_i$. Nazývá se i-tá projekce.

Pro každé $i = 1, \dots, n$ máme též zobrazení $\iota_i \colon U_i \to U_1 \oplus \cdots \oplus U_n$ zadané předpisem $u \mapsto (0, \dots, 0, u_n, 0, \dots, 0)$, kde u stojí na i-tém místě. Nazývá se vložení i-tého sčítance.

Ukažte, že projekce π_i a vložení ι_i jsou lineární zobrazení. Spočtěte $\pi_i \circ \iota_j$.

---

4. Matice lineárního zobrazení

Použité učební texty:

[Marvan, 13. Matice lineárního zobrazení].

V této přednášce budeme používat indexy dvojího druhu: horní a dolní. *Horní index* je index zapsaný v pozici exponentu. Horní indexy se zpravidla používají jen v situacích, kdy nemůže dojít k záměnám s mocninami, například když se mocniny v daném kontextu vůbec nevyskytují. Horním indexem budeme označovat zejména souřadnice vektorů.

Dohoda. V maticích bude řádkový index vždy horní a sloupcový index vždy dolní.

4.1. Matice lineárního zobrazení

Definice. Buďte U vektorový prostor s bází $(e_1, \dots, e_n)$ a V vektorový prostor s bází $(f_1, \dots, f_m)$. Buď $\alpha \colon U \to V$ lineární zobrazení. Matice A typu $m \times n$, jejíž i-tý sloupec je tvořen souřadnicemi vektoru $\alpha(e_i) \in V$ v bázi $(f_1, \dots, f_m)$, se nazývá *matice lineárního zobrazení* α vzhledem k bázím $(e_1, \dots, e_n)$ a $(f_1, \dots, f_m)$.

Přesněji, a_i^j je j-tá souřadnice obrazu $\alpha(e_i)$ v bázi $(f_1, \dots, f_m)$. Platí tedy

$$\alpha(e_i) = \sum_j a_i^j f_j$$

(připomeňme, že v maticích horní index je řádkový a dolní je sloupcový).

Tvrzení 4.1.1. *Mějme označení z předchozí definice. Buďte $x = (x^1, \dots, x^n)$ sloupec souřadnic vektoru $u \in U$ a $y = (y^1, \dots, y^m)$ sloupec souřadnic vektoru $\alpha(u) \in V$. Pak platí $y = Ax$.*

Důkaz. Platí $u = \sum_i x^i e_i$, tedy $\alpha(u) = \alpha(\sum_i x^i e_i) = \sum_i \alpha(x^i e_i) = \sum_i x^i \alpha(e_i) = \sum_{i,j} x^i a_i^j f_j$. Odtud plyne, že j-tá souřadnice vektoru $\alpha(u)$ v bázi $(f_1, \dots, f_m)$ je $y^j = \sum_i x^i a_i^j = \sum_i a_i^j x^i$, což je právě výsledek získávaný při násobení matic A a x. □

Příklad. Buďte U, V vektorové prostory s bázemi (e_1, e_2, e_3) a (f_1, f_2, f_3). Nechť lineární zobrazení α je dáno předpisem

$$\alpha(e_1) = f_2 + f_3, \qquad \alpha(e_2) = -f_1 + f_3, \qquad \alpha(e_3) = 2f_2.$$

Souřadnice obrazů $\alpha(e_i)$ v bázi (f_1, f_2, f_3) jsou po řadě $(0,1,1), (-1,0,1), (0,2,0)$ (ověřte). Matice A je

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Obrazem vektoru se souřadnicemi (x^1, x^2, x^3) je vektor

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x^2 \\ x^1 + 2x^3 \\ x^1 + x^2 \end{pmatrix}.$$

Zkouška správnosti: Obrazem vektoru e_1 se souřadnicemi $(1,0,0)$ musí být vektor $f_2 + f_3$:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Zkouška vyšla. ■

Příklad. Buď $\pi\colon E^3 \to E^2$ rovnoběžné promítání podél vektoru $w \notin E^2$. Zvolme libovolnou bázi (u, v) v E^2. Pak je (u, v, w) báze v E^3 (proč?). Lineární zobrazení π splňuje

$$\pi(u) = u, \qquad \pi(v) = v, \qquad \pi(w) = 0.$$

Souřadnice těchto obrazů v bázi (u, v) jsou po řadě $(1,0), (0,1), (0,0)$. Matice zobrazení π vzhledem k bázím (u, v, w) a (u, v) je

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Obraz vektoru se souřadnicemi (x, y, z) je

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

(ztrácí se souřadnice měřená podél vektoru w). ■

Příklad. Matice identického zobrazení $\mathrm{id}\colon U \to U$ vzhledem k bázím $(e_1, \dots, e_n)$ a $(e'_1, \dots, e'_n)$ (v tomto pořadí) je matice přechodu od staré báze $(e_1, \dots, e_n)$ k nové bázi $(e'_1, \dots, e'_n)$. ■

Zjistěme, jaká operace s maticemi odpovídá skládání lineárních zobrazení.

Tvrzení 4.1.2. *Buď U vektorový prostor s bází $(e_1, \dots, e_m)$, buď V vektorový prostor s bází $(f_1, \dots, f_n)$, buď W vektorový prostor s bází $(g_1, \dots, g_p)$. Buďte $\alpha\colon U \to V$, $\beta\colon V \to W$ lineární zobrazení. Buď A matice zobrazení α vzhledem k uvedeným bázím, buď B matice zobrazení β vzhledem k uvedeným bázím. Potom $B \cdot A$ je matice zobrazení $\beta \circ \alpha$ vzhledem k uvedeným bázím.*

Důkaz. Máme $\alpha(e_i) = \sum_j a_i^j f_j$ a $\beta(f_j) = \sum_k b_j^k g_k$. Tudíž,

$$\begin{aligned}(\beta \circ \alpha)(e_i) = \beta(\alpha(e_i)) = \beta\left(\sum\nolimits_j a_i^j f_j\right) &= \sum\nolimits_j a_i^j \beta(f_j) = \sum\nolimits_j a_i^j \sum\nolimits_k b_j^k g_k \\ &= \sum\nolimits_{j,k} a_i^j b_j^k g_k = \sum\nolimits_k \sum\nolimits_j a_i^j b_j^k g_k \\ &= \left(\sum\nolimits_j a_i^j b_j^1\right) g_1 + \dots + \left(\sum\nolimits_j a_i^j b_j^p\right) g_p,\end{aligned}$$

a proto v k-tém řádku i-tého sloupce matice zobrazení $\beta \circ \alpha$ je $\sum_j a_i^j b_j^k = \sum_j b_j^k a_i^j$, což je totéž, co dostaneme při součinu $B \cdot A$. □

Tvrzení 4.1.3. *Při stejném označení jako v předchozím tvrzení, nechť α je izomorfismus (tedy $m = n$). Pak je matice A invertibilní a A^{-1} je matice inverzního lineárního zobrazení $\alpha^{-1}\colon V \to U$.*

Důkaz. Buď B matice lineárního zobrazení $\alpha^{-1}\colon V \to U$ vzhledem k příslušným bázím. Podle předchozího tvrzení je BA matice lineárního zobrazení $\alpha^{-1} \circ \alpha = \mathrm{id}$ vzhledem k bázi $(e_1, \dots, e_m)$, což je jednotková matice. Tudíž, $BA = E$. Analogicky $AB = E$. □

Důsledek. *Matice přechodu od jedné báze k druhé bázi je invertibilní.*

Důkaz. Podle uvedených definic matice přechodu od „staré“ báze k „nové“ bázi je totéž co matice identického zobrazení vzhledem k bázím „stará“ a „nová“. A identické zobrazení je izomorfismus. □

4.2. Změna matice lineárního zobrazení při změnách bází

Tvrzení 4.2.1. *Buď U vektorový prostor se starou bází $(e_1, \dots, e_n)$ a novou bází $(e'_1, \dots, e'_n)$, buď Q matice přechodu od staré báze k nové. Buď V vektorový prostor se starou bází $(f_1, \dots, f_m)$ a novou bází $(f'_1, \dots, f'_m)$, buď R matice přechodu od staré báze k nové. Buď $\alpha\colon U \to V$ lineární zobrazení. Buď A matice zobrazení α vzhledem k bázím $(e_1, \dots, e_n)$ a $(f_1, \dots, f_m)$. Buď A' matice zobrazení α vzhledem k bázím $(e'_1, \dots, e'_n)$ a $(f'_1, \dots, f'_m)$. Pak*

$$A' = RAQ^{-1}.$$

Důkaz. Situaci můžeme znázornit diagramem

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\begin{matrix} U \\ (e_1, \dots, e_n) \end{matrix}} \arrow[r, "\alpha", "A"'] \arrow[d, "\mathrm{id}_U"', "Q"] & \boxed{\begin{matrix} V \\ (f_1, \dots, f_m) \end{matrix}} \arrow[d, "\mathrm{id}_V"', "R"] \\
\boxed{\begin{matrix} U \\ (e'_1, \dots, e'_n) \end{matrix}} \arrow[r, "\alpha", "A'"'] & \boxed{\begin{matrix} V \\ (f'_1, \dots, f'_m) \end{matrix}}
\end{tikzcd}$$

V rozích stojí vektorové prostory s vyznačenými bázemi, šipky označují lineární zobrazení a jsou u nich uvedeny také matice těchto zobrazení. Platí $\mathrm{id}_V \circ \alpha = \alpha \circ \mathrm{id}_U$ a také $\alpha = \mathrm{id}_V \circ \alpha \circ \mathrm{id}_U^{-1}$. Podle Tvrzení 4.1.2 o matici složeného zobrazení potom

$$A'Q = RA \quad \text{a také} \quad A' = RAQ^{-1}. \qquad \square$$

Příklad. Mějme $\alpha\colon \boldsymbol{R}_3[x] \to \boldsymbol{R}_2[x]$, $f \mapsto f'$. Je to tedy zobrazení z prostoru polynomů stupně nejvýše 2 do prostoru polynomů stupně nejvýše 1, které polynomu přiřazuje jeho derivaci. Ověřte, že se jedná o lineární zobrazení.

(1) Nejprve uvažujme (staré) báze $(1, x, x^2)$ v $\boldsymbol{R}_3[x]$ a $(1, x)$ v $\boldsymbol{R}_2[x]$. Ověřte, že jsou to báze. Najdeme obrazy vektorů báze $(1, x, x^2)$ při zobrazení α a jejich souřadnice v bázi $(1, x)$.

$\alpha(1) = 0,$ souřadnice vektoru 0 v bázi $(1, x)$ jsou $(0, 0)$;

$\alpha(x) = 1,$ souřadnice vektoru 1 v bázi $(1, x)$ jsou $(1, 0)$;

$\alpha(x^2) = 2x,$ souřadnice vektoru $2x$ v bázi $(1, x)$ jsou $(0, 2)$.

Matice zobrazení α vzhledem k bázím $(1, x, x^2)$ a $(1, x)$ tedy je

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(2) Nyní uvažujme (nové) báze $(x^2, x+1, x)$ v $\boldsymbol{R}_3[x]$ a $(x+1, 1)$ v $\boldsymbol{R}_2[x]$. Ověřte, že jsou to báze. Najdeme obrazy vektorů báze $(x^2, x+1, x)$ při zobrazení α a jejich souřadnice v bázi $(x+1, 1)$.

$\alpha(x^2) = 2x,$ souřadnice vektoru $2x$ v bázi $(x+1, 1)$ jsou $(2, -2)$;

$\alpha(x+1) = 1,$ souřadnice vektoru 1 v bázi $(x+1, 1)$ jsou $(0, 1)$;

$\alpha(x) = 1,$ souřadnice vektoru 1 v bázi $(x+1, 1)$ jsou $(0, 1)$.

Matice zobrazení α vzhledem k bázím $(x^2, x+1, x)$ a $(x+1, 1)$ tedy je

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Například, $\alpha(3x^2 + 2x + 7) = 6x + 2$. Vektor $3x^2 + 2x + 7$ má staré souřadnice $x = (7, 2, 3)$ a nové souřadnice $x' = (3, 7, -5)$. Vektor $6x + 2$ má staré souřadnice $y = (2, 6)$ a nové souřadnice $y' = (6, -4)$. Ověřte. A platí

$$A_1 \cdot x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} = y$$

a

$$A_2 \cdot x' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix} = y'.$$

Matice přechodu od staré báze $(1, x, x^2)$ k nové bázi $(x^2, x+1, x)$ v $\boldsymbol{R}_3[x]$ je

$$Q_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Matice přechodu od staré báze $(1, x)$ k nové bázi $(x+1, 1)$ v $\boldsymbol{R}_2[x]$ je

$$Q_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

A platí

$$Q_2 \cdot A_1 \cdot Q_3^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = A_2. \qquad \blacksquare$$

6. přednáška, 21. 4. 2020, distančně

5. Vlastní vektory

Použité učební texty:
[Marvan, 14. Vlastní vektory]

5.1. Definice, příklady, základní vlastnosti

Buď V vektorový prostor nad polem P. Lineární zobrazení $f\colon V \to V$ nazveme *lineární transformace* vektorového prostoru V nebo též *lineární operátor* na vektorovém prostoru V. Každý vektor $v \in V$ se pak zobrazí na některý vektor $f(v)$ z téhož prostoru V. Může se stát, že obraz $f(v)$ je násobkem vektoru v. Případ $v = 0$ je ovšem triviální.

Definice. Vektor $v \in V \setminus \{0\}$ se nazývá *vlastní vektor* lineární transformace $f\colon V \to V$, když existuje skalár $\lambda \in P$ takový, že

$$f(v) = \lambda v.$$

Skalár λ se nazývá *vlastní hodnota* příslušná vlastnímu vektoru v. V případě číselného pole P (podpole pole $\boldsymbol{C}$) se λ nazývá *vlastní číslo*.

Analogicky jsou definovány vlastní vektory a vlastní hodnoty (čísla) čtvercové matice.

Definice. Buď A čtvercová matice řádu n. Uspořádaná n-tice (sloupcová matice, sloupcový vektor) x se nazývá *vlastní vektor* matice A, když existuje skalár $\lambda \in P$ takový, že

$$Ax = \lambda x.$$

Skalár λ se nazývá *vlastní hodnota* příslušná vlastnímu vektoru x. V případě číselného pole P (podpole pole $\boldsymbol{C}$) se λ nazývá *vlastní číslo*.

Příklad. (1) Identická transformace $\mathrm{id}\colon V \to V$, $\mathrm{id}(v) = v$. Každý vektor $v \in V \setminus \{0\}$ je vlastní s vlastní hodnotou 1, protože $\mathrm{id}(v) = 1 \cdot v$.
(2) Násobení skalárem $c \in P$ je transformace $f_c\colon V \to V$, $f_c(v) = cv$. Každý vektor $v \in V \setminus \{0\}$ je vlastní s vlastní hodnotou c.
(3) Rovnoběžné promítání $E^3 \to E^3$ podél vektoru $v \neq 0$ na rovinu $U \subset E^3$ procházející počátkem, $v \notin U$. Vektor v a všechny jeho nenulové násobky jsou vlastní s vlastní hodnotou 0. Vektory $u \in U \setminus \{0\}$ jsou vlastní s vlastní hodnotou 1. Jiné vlastní vektory nejsou.
(4) Rotace $E^2 \to E^2$ o úhel $0 \le \varphi < 2\pi$ je lineární transformace. Rozeznávejme tři případy:
(a) Je-li $\varphi = 0$, pak jde o identickou transformaci a každý vektor $v \in E^2 \setminus \{0\}$ je vlastní s vlastní hodnotou 1;
(b) je-li $\varphi = \pi$, pak jde o středovou symetrii $v \mapsto -v = (-1)v$ a každý vektor $v \in E^2 \setminus \{0\}$ je vlastní s vlastní hodnotou -1;
(c) v ostatních případech neexistuje žádný vlastní vektor.

(5) Rotace $E^3 \to E^3$ o úhel $0 \leq \varphi < 2\pi$ kolem zvolené pevné osy L procházející počátkem je lineární transformace. Označme $L^\perp$ rovinu procházející počátkem kolmo k L (tzv. ortogonální doplněk). Rozeznávejme tři případy:
(a) Je-li $\varphi = 0$, pak jde o identickou transformaci a každý vektor $v \in E^3 \setminus \{0\}$ je vlastní s vlastní hodnotou 1;
(b) je-li $\varphi = \pi$, pak každý vektor $v \in L \setminus \{0\}$ je vlastní s vlastní hodnotou 1, každý vektor $v \in L^\perp \setminus \{0\}$ je vlastní s vlastní hodnotou -1 a žádný jiný vlastní vektor neexistuje;
(c) v ostatních případech každý vektor $v \in L \setminus \{0\}$ je vlastní s vlastní hodnotou 1 a žádný jiný vlastní vektor neexistuje. ■

Cvičení. Určete všechny vlastní vektory následujících lineárních transformací vektorového prostoru $\boldsymbol{C}$ nad $\boldsymbol{R}$. Návod: Pomozte si geometrickou interpretací v Gaussově rovině.

(1) Zobrazení $\boldsymbol{C} \to \boldsymbol{C}$, $z \mapsto z^*$, kde z^* je číslo komplexně sdružené k číslu z.
(2) Zobrazení $\mathrm{re}\colon \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{R}$, $z \mapsto \mathrm{re}\, z = \frac{1}{2}(z + z^*)$ (reálná část čísla z).

V uvedených příkladech (a) existuje jen konečně mnoho vlastních hodnot; (b) vlastní vektory příslušné jedné a téže vlastní hodnotě tvoří, po přidání nulového vektoru, podprostor ve V; (c) vlastní vektory příslušné vlastním hodnotám jsou lineárně nezávislé.

Tvrzení (a), (b) i (c) postupně dokážeme. Nejdříve tvrzení (b).

Tvrzení 5.1.1. *Buď $f\colon V \to V$ lineární transformace vektorového prostoru V nad polem P. Buď $\lambda \in P$. Označme*

$$V_\lambda = \{v \in V \mid f(v) = \lambda v\}.$$

Pak

(1) V_λ je vektorový podprostor prostoru V;
(2) V_λ je nenulový podprostor právě tehdy, když λ je vlastní hodnota.

Důkaz. (1) (i) $0 \in V_\lambda$, protože $f(0) = 0 = \lambda \cdot 0$. (ii) Nechť $a, b \in V_\lambda$. Pak $a + b \in V_\lambda$, protože $f(a + b) = f(a) + f(b) = \lambda a + \lambda b = \lambda(a + b)$. (iii) Nechť $a \in V_\lambda$, $r \in P$. Pak $ra \in V_\lambda$, protože $f(ra) = rf(a) = r\lambda a = \lambda ra$.

(2) Zřejmé z definice vlastního vektoru a vlastní hodnoty. □

Vidíme, že $V_\lambda \setminus \{0\}$ je právě množina všech vlastních vektorů příslušných vlastní hodnotě λ.

Dále dokážeme tvrzení (c).

Tvrzení 5.1.2. *Buďte $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ různé vlastní hodnoty lineární transformace $f\colon V \to V$ vektorového prostoru V nad polem P. Buďte $v_1, \dots, v_n$ nějaké vlastní vektory příslušné po řadě vlastním hodnotám $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Pak množina $\{v_1, \dots, v_n\}$ je lineárně nezávislá.*

Důkaz. Nechť $x_1 v_1 + \dots + x_n v_n = 0$ pro nějaké skaláry $x_1, \dots, x_n \in P$. Aplikujme transformaci f:

$$\begin{aligned} 0 = f(0) &= f(x_1 v_1 + \dots + x_n v_n) = x_1 f(v_1) + \dots + x_n f(v_n) \\ &= x_1 \lambda_1 v_1 + \dots + x_n \lambda_n v_n. \end{aligned}$$

Aplikujeme transformaci f ještě jednou:

$$\begin{aligned} 0 &= f(0) = f(x_1\lambda_1 v_1 + \dots + x_n\lambda_n v_n) = x_1\lambda_1 f(v_1) + \dots + x_n\lambda_n f(v_n) \\ &= x_1\lambda_1^2 v_1 + \dots + x_n\lambda_n^2 v_n. \end{aligned}$$

Pro všechna $i \in \boldsymbol{N}$ tak postupně dostáváme $0 = x_1\lambda_1^i v_1 + \dots + x_n\lambda_n^i v_n$. Omezíme-li se na $i = 0, 1, \dots, n-1$, můžeme na tyto rovnosti pohlížet jako na soustavu n homogenních lineárních rovnic o n neznámých $x_1v_1, \dots, x_nv_n$. Determinant matice této soustavy je tzv. *Vandermondův determinant*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} = \Pi_{i<j}(\lambda_j - \lambda_i).$$

Jelikož vlastní hodnoty λ_i jsou navzájem různé, jsou všechny rozdíly $\lambda_j - \lambda_i$ nenulové, takže nenulový je i jejich součin, potažmo determinant naší soustavy. Tudíž, soustava má jen triviální řešení $x_1v_1 = 0, \dots, x_nv_n = 0$. Ale vektory $v_1, \dots, v_n$ jsou nenulové, takže $x_1 = 0, \dots, x_n = 0$. □

Cvičení. Dokažte vztah pro Vandermondův determinant uvedený v předcházejícím důkazu.

Návod: Počínaje zdola, od každého řádku (kromě prvního) odečtěte λ_1-násobek předchozího řádku. Tím se v prvním sloupci vynulují všechny pozice kromě první a podle věty o Laplaceově rozvoji je determinant roven svému minoru vzniklému vyškrtnutím prvního řádku a prvního sloupce. Z j-tého sloupce tohoto minoru lze vytknout $(\lambda_j - \lambda_1)$, načež vzniklý determinant řádu $n-1$ je opět Vandermondův determinant.

5.2. Hledání vlastních čísel a vlastních vektorů

Uvedeme návod k výpočtu vlastních čísel a vlastních vektorů v případě $\dim V = n < \infty$. Buď $(e_1, \dots, e_n)$ nějaká báze ve V. Vektory z V jsou jednoznačně určeny svými souřadnicemi, lineární zobrazení $f\colon V \to V$ je zase dáno svou maticí A, vše vzhledem k bázi $(e_1, \dots, e_n)$. Obraz $f(v)$ vektoru v o souřadnicích $x = (x^1, \dots, x^n)$ má souřadnice dané součinem matic Ax.

Podmínka, že x jsou souřadnice vlastního vektoru s vlastní hodnotou λ, potom zní

$$Ax = \lambda x.$$

Ekvivalentně,

$$(A - \lambda E)\, x = 0, \tag{5}$$

kde E je jednotková matice. Rovnice (5) představuje homogenní soustavu n lineárních rovnic s maticí $A - \lambda E$. Vlastní vektory (jejich souřadnice) jsou právě nenulová řešení této soustavy. Homogenní soustava však má nenulové řešení jen tehdy, je-li matice soustavy singulární (není regulární), tj. tehdy, je-li determinant matice soustavy nulový:

$$\det(A - \lambda E) = 0. \tag{6}$$

To je současně podmínka, že skalár λ je vlastní hodnota. Tudíž, vlastní hodnoty jsou právě řešení rovnice (6).

Rovnice (6) se nazývá *charakteristická rovnice* matice A. Levá strana té rovnice

$$\chi_A = \det(A - \lambda E)$$

je polynom n-tého stupně v λ, nazývá se *charakteristický polynom* matice A.

Shrňme: Vlastní hodnoty vypočteme jako kořeny charakteristického polynomu. Vlastní vektory (jejich souřadnice) se potom získají jako nenulová řešení soustavy (5) pro jednotlivé vlastní hodnoty λ.

Cvičení. Najděte vlastní hodnoty a vlastní vektory matice

$$\begin{pmatrix} 9 & 3 & 2 \\ -6 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

Vlastní hodnoty jsou $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 6$, $\lambda_3 = 9$. Příslušné vlastní vektory jsou $v_1 = (-1, 2, 0)$, $v_2 = (1, -1, 0)$, $v_3 = (1, -2, 3)$ a jejich nenulové násobky.

Cvičení. Najděte vlastní hodnoty a vlastní vektory matice

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Vlastní hodnoty jsou $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$. Příslušné vlastní vektory jsou $v_1 = (1, 0, -1)$, $v_2 = (1, 1, -1)$, $v_3 = (0, -1, 1)$ a jejich nenulové násobky.

Cvičení. Buď $\chi_A = c_n\lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + c_0$ charakteristický polynom matice A typu $n \times n$. Ukažte, že $c_n = (-1)^n$, $c_{n-1} = -(-1)^n \operatorname{tr} A$ a $c_0 = \det A$.

Cvičení. Lineární transformace f (resp. matice A) má vlastní číslo 0 právě tehdy, když f není injektivní (resp. A je singulární).

Cvičení. Je-li lineární transformace f invertibilní (izomorfismus), pak λ je její vlastní hodnotou právě tehdy, když λ^{-1} je vlastní hodnotou transformace f^{-1}. Vlastní vektory transformace f příslušné vlastní hodnotě λ jsou právě vlastní vektory transformace f^{-1} příslušné vlastní hodnotě λ^{-1}.

Cvičení. Je-li v vlastní vektor lineární transformace f (resp. matice A) s vlastní hodnotou λ, pak pro libovolné přirozené číslo n je v také vlastní vektor lineární transformace f^n (resp. matice A^n) s vlastní hodnotou λ^n.

5.3. Podobné matice, charakteristický polynom, diagonalizovatelná transformace

Zabývejme se nyní otázkou, jak závisí charakteristický polynom na volbě báze $(e_1, \ldots, e_n)$. Buď $(e'_1, \ldots, e'_n)$ jiná báze ve V, buď Q příslušná matice přechodu. Díky Tvrzení 4.2.1 víme, že zobrazení f má v nové bázi matici $A' = QAQ^{-1}$.

Vztah $A' = QAQ^{-1}$ mezi maticemi lineární transformace v různých bázích je konkrétní případ tzv. podobnosti matic:

Definice. Buďte A, B čtvercové matice. Říkáme, že matice B je *podobná* matici A, jestliže existuje invertibilní matice Q taková, že $B = QAQ^{-1}$. Zapisujeme $B \approx A$.

Zobrazení $A \mapsto QAQ^{-1}$ se nazývá *podobnostní transformace.*

Cvičení. Relace $\approx$ je relace ekvivalence. Dokažte.

Tvrzení 5.3.1. *Podobné matice mají tytéž charakteristické polynomy.*

Důkaz. Je-li $B = QAQ^{-1}$, pak

$$\begin{aligned}\chi_B &= \det(B - \lambda E) = \det(QAQ^{-1} - \lambda E) = \det(Q(A - \lambda E)Q^{-1}) \\ &= \det Q \cdot \det(A - \lambda E) \cdot \det Q^{-1} = \det Q \cdot \det(A - \lambda E) \cdot \frac{1}{\det Q} \\ &= \det(A - \lambda E) = \chi_A.\end{aligned}$$ □

Cvičení. Ukažte, že matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

si nejsou podobné. Návod: vypočtěte charakteristické polynomy.

Poznámka. Pozor! Obrácené tvrzení k předchozí větě neplatí. Například, matice

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mají stejný charakteristický polynom $(1 - \lambda)^2$, ale protože pro libovolnou invertibilní matici Q je $QEQ^{-1} = E$, nemohou si být podobné.

Definice. *Charakteristický polynom* lineární transformace $f\colon V \to V$ konečněrozměrného vektorového prostoru V, který označíme χ_f, je roven charakteristickému polynomu χ_A matice A lineárního zobrazení f v libovolně zvolené bázi.

Díky Tvrzení 5.3.1 je předchozí definice korektní.

A jako poslední dokážeme tvrzení (a).

Tvrzení 5.3.2. *Lineární transformace $f\colon V \to V$ vektorového prostoru V konečné dimenze n nad polem P má nejvýše n různých vlastních čísel.*

Důkaz. Charakteristický polynom je stupně n a proto má nejvýše n různých kořenů. □

Tvrzení 5.3.3. *Nechť $\dim V = n$ a nechť má charakteristický polynom χ_f lineární transformace $f\colon V \to V$ právě n různých kořenů $\xi_1, \dots, \xi_n$. Nechť jsou $v_1, \dots, v_n$ vlastní vektory příslušné po řadě vlastním hodnotám $\xi_1, \dots, \xi_n$. Pak vektory $v_1, \dots, v_n$ tvoří bázi prostoru V. Transformace f má v této bázi diagonální matici*

$$\begin{pmatrix} \xi_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \xi_2 & \dots & 0 \\ & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & \xi_n \end{pmatrix}.$$

Důkaz. Podle Tvrzení 5.1.2 je množina $\{v_1, \dots, v_n\}$ lineárně nezávislá, protože vlastní vektory přísluší různým vlastním hodnotám. Jejich lineární obal $[\![v_1, \dots, v_n]\!]$ je n-rozměrný podprostor n-rozměrného prostoru V. Podle Tvrzení 2.1.3 tedy $[\![v_1, \dots, v_n]\!] = V$ a $(v_1, \dots, v_n)$ je báze ve V. Matici transformace v této bázi získáme z vyjádření $f(v_i) = \xi_i v_i$. □

Lineární transformace, která splňuje podmínky předchozího tvrzení, se nazývá *diagonalizovatelná*.

Důsledek. *Nechť má charakteristický polynom χ_A matice A typu $n \times n$ právě n různých kořenů $\xi_1, \dots, \xi_n$. Pak je matice A podobná diagonální matici*

$$\begin{pmatrix} \xi_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \xi_2 & \dots & 0 \\ & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & \xi_n \end{pmatrix}.$$

Matice podobná diagonální matici se nazývá *diagonalizovatelná.*

Příklad.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

je diagonalizovatelná.

Podle předchozího tvrzení stačí zjistit, zda má matice tři různé vlastní hodnoty. V jednom z předchozích cvičení jsme ukázali, že A má tři vlastní hodnoty $1, 2, 3$. Příslušný diagonální tvar tedy je

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Platí vztah $D = QAQ^{-1}$, kde

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

je matice přechodu od kanonické báze $((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ prostoru $\boldsymbol{R}^3$ k nové bázi $((1,0,-1),(1,1,-1),(0,-1,1))$, složené z vlastních vektorů matice A, a

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

je matice přechodu od nové báze $((1,0,-1),(1,1,-1),(0,-1,1))$ ke kanonické bázi. ■

Cvičení. Uvažujme o zrcadlení ζ v prostoru E^3 vzhledem k rovině U procházející počátkem 0. Ukažte, že zobrazení ζ je diagonalizovatelné.

Návod: Vyberte bázi tak, aby vektory e_1, e_2 ležely v rovině U a vektor e_3 byl k rovině U kolmý.

Příklad. Mějme $f\colon \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2$, $f(x,y) = (2x+y, 3x+4y)$ (ověřte, že f je lineární) a na $\boldsymbol{R}^2$ uvažujme kanonickou bázi.

Matici zobrazení získáme tak, že do sloupců budeme psát souřadnice obrazů vektorů báze (v tomto případě souřadnice jsou stejné jako vektory).

Obrazy bázových vektorů jsou $f(1,0) = (2,3)$, $f(0,1) = (1,4)$, takže matice zobrazení f je

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Charakteristický polynom je

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-5)$$

a jeho kořeny, tedy vlastní čísla jsou $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 5$.

Podle Tvrzení 5.3.3 je matice A podobná matici

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Vlastní vektory získáme jako nenulová řešení soustavy (5) pro jednotlivé vlastní hodnoty.

Pro $\lambda_1 = 1$ řešíme soustavu

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{tedy} \qquad \begin{aligned} x + y &= 0 \\ 3x + 3y &= 0 \end{aligned}.$$

Množina všech řešení této soustavy je $[\![(1,-1)]\!]$ a příslušné vlastní vektory jsou tedy všechny nenulové násobky vektoru $v_1 = (1,-1)$. Vektor v_1 se skutečně zobrazí na svůj 1-násobek, $f(1,-1) = (1,-1)$.

Pro $\lambda_2 = 5$ řešíme soustavu

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{tedy} \qquad \begin{aligned} -3x + y &= 0 \\ 3x - y &= 0 \end{aligned}.$$

Množina všech řešení této soustavy je $[\![(1,3)]\!]$ a příslušné vlastní vektory jsou tedy všechny nenulové násobky vektoru $v_2 = (1,3)$. Vektor v_2 se skutečně zobrazí na svůj 5-násobek, $f(1,3) = (5,15)$.

Opět podle Tvrzení 5.3.3 vektory v_1, v_2 tvoří „novou" bázi prostoru $\boldsymbol{R}^2$.

Matice přechodu Q od kanonické báze k nové bázi (ve sloupcích jsou nové souřadnice vektorů kanonické báze) a matice k ní inverzní Q^{-1}, tedy matice přechodu od nové báze ke kanonické bázi (ve sloupcích jsou kanonické souřadnice vektorů nové báze) jsou

$$Q = \begin{pmatrix} 3/4 & -1/4 \\ 1/4 & 1/4 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

A skutečně

$$A' = Q \cdot A \cdot Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Poznámka. Při hledání vlastních vektorů tedy hledáme nenulové prvky jader lineárních transformací $f - \lambda \cdot \mathrm{id}$ pro jednotlivé hodnoty λ.

Pro $\lambda_1 = 1$ je $(f - \mathrm{id})(x,y) = (x+y, 3x+3y)$ a jádro tohoto zobrazení je

$$\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}) = [\![(1,-1)]\!].$$

Pro $\lambda_2 = 5$ je $(f - 5\,\mathrm{id})(x,y) = (-3x+y, 3x-y)$ a jádro tohoto zobrazení je

$$\mathrm{Ker}(f - 5\,\mathrm{id}) = [\![(1,3)]\!].$$

■

7. přednáška, 28. 4. 2020, distančně

6. První rozklad lineární transformace

Použité učební texty:
[Marvan, 18. První rozklad lineární transformace]

Úmluva. V této přednášce V je vektorový prostor (obvykle konečněrozměrný) nad polem P a $f\colon V \to V$ je lineární transformace.

První (primární) rozklad lineární transformace f je indukován rozkladem anulujícího (např. charakteristického) polynomu na nesoudělné součinitele. Geometricky jde o rozložení prostoru V na přímý součet tzv. invariantních podprostorů, s čímž je spojeno uvedení matice transformace f do blokově diagonálního tvaru. V případě $f\colon P^n \to P^n$, $f(u) = Au$, kde A je čtvercová matice, dostáváme jako výsledek blokově diagonální matici podobnou matici A.

6.1. Algebraická struktura na množině lineárních zobrazení

Na množině

$$\mathrm{Hom}_P(V, V) = \{f\colon V \to V | f \text{ je lineární zobrazení nad polem } P\}$$

existuje bohatá algebraická struktura.

Především, $\mathrm{Hom}_P(V, V)$ je monoid vzhledem k binární operaci $\circ$ skládání transformací s neutrálním prvkem id_V (ověřte). Avšak $\mathrm{Hom}_P(V, V)$, a také obecněji $\mathrm{Hom}_P(U, V)$, má též strukturu vektorového prostoru.

Definice. Buďte $f, g\colon V \to V'$ lineární zobrazení vektorových prostorů nad polem P.

(1) Zobrazení $f+g\colon V \to V'$, zadané předpisem $v \mapsto f(v)+g(v)$ pro libovolný vektor $v \in V$, se nazývá *součet* zobrazení f a g.
(2) Je-li $c \in P$, pak zobrazení $cf\colon V \to V'$, zadané předpisem $v \mapsto c \cdot f(v)$ pro libovolný vektor $v \in V$, se nazývá *c-násobek* zobrazení f.

Platí tedy

$$(f + g)(v) = f(v) + g(v),$$
$$(cf)(v) = c \cdot f(v)$$

pro každé $v \in V$.

Tvrzení 6.1.1. *Buďte $f, g\colon V \to V'$ lineární zobrazení vektorových prostorů nad polem P, buď $c \in P$. Pak jsou zobrazení $f + g$, cf lineární.*

Důkaz. Cvičení. □

Algebraická struktura na množině $\mathrm{Hom}_P(V, V)$ tedy zahrnuje binární operace sčítání $+$ a skládání $\circ$, operace násobení skalárem a dva neutrální prvky: 0 pro sčítání a id pro skládání.

Tvrzení 6.1.2. *Buď V vektorový prostor nad polem P. Pak $\mathrm{Hom}_P(V,V)$ je monoid a současně vektorový prostor nad polem P a pro libovolná $f, g, h \in \mathrm{Hom}_P(V,V)$ a $c \in P$ platí*

$$\begin{aligned} &f \circ (g+h) = f \circ g + f \circ h, \\ &f \circ (cg) = c(f \circ g), \\ &(f+g) \circ h = f \circ h + g \circ h, \\ &(cf) \circ g = c(f \circ g). \end{aligned}$$

Důkaz. Cvičení. □

Algebraická struktura, která je současně monoid i vektorový prostor nad polem P a platí pro ni identity uvedené v předchozím tvrzení, se nazývá *asociativní P-algebra*. Tudíž, $\mathrm{Hom}_P(V,V)$ je asociativní P-algebra.

Jiný příklad asociativní P-algebry dává množina $\mathrm{gl}(n,P)$ všech čtvercových matic typu $n \times n$ nad polem P vzhledem k binárním operacím násobení a sčítání matic a k operaci násobení skalárem (ověřte).

Tvrzení 6.1.3. *Buď V konečněrozměrný vektorový prostor nad polem P, buď $(e_1, \dots, e_n)$ jeho báze. Buďte f, g lineární transformace $V \to V$, buďte A, B jejich matice vzhledem k bázi $(e_1, \dots, e_n)$, buď c skalár. Pak platí*

(1) $A + B$ je matice součtu transformací $f + g$,
(2) cA je matice transformace cf,
(3) $A \cdot B$ je matice transformace $f \circ g$.

Důkaz. Cvičení. □

Podle uvedeného tvrzení je v konečněrozměrném případě P-algebra $\mathrm{Hom}_P(V,V)$ izomorfní P-algebře $\mathrm{gl}(n,P)$.

Pro libovolné celé nezáporné číslo k zaveďme lineární transformaci $f^k \colon V \to V$ předpisem $f^k(v) = \underbrace{f(f(\cdots f}_{k}(v)\cdots))$ pro libovolné $v \in V$, tj. $f^k = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{k}$.

Definice. Buď $p = a_m x^m + \cdots + a_1 x + a_0 \in P[x]$ polynom. Buď $f \colon V \to V$ lineární transformace vektorového prostoru V nad polem P. Položme $p(f) = a_m f^m + \cdots + a_1 f + a_0\,\mathrm{id}$. Říkáme, že lineární transformace $p(f)$ vznikla dosazením lineární transformace f do polynomu p. Hodnota takové transformace na vektoru $v \in V$ se zapisuje $p(f)(v)$.

Buď A čtvercová matice. Analogicky, položme $p(A) = a_m A^m + \cdots + a_1 A + a_0 E$, kde E je jednotková matice stejného rozměru jako matice A.

Příklad. Nechť $p = x^2 - 2x + 2$. Pak pro libovolnou lineární transformaci $f \colon V \to V$ máme $p(f) = f^2 - 2f + 2\,\mathrm{id}$ a pro libovolný vektor $v \in V$ máme $p(f)(v) = f(f(v)) - 2f(v) + 2v$. ■

Tvrzení 6.1.4. *Buď $p \in P[x]$ a buď A matice lineární transformace f vzhledem k nějaké bázi. Pak $p(A)$ je matice lineární transformace $p(f)$ vzhledem k téže bázi.*

Důkaz. Cvičení. □

Tvrzení 6.1.5. *Jsou-li $p, q \in P[x]$ polynomy, pak pro libovolnou lineární transformaci f resp. libovolnou čtvercovou matici A platí*

$$(p+q)(f) = p(f) + q(f), \qquad (pq)(f) = p(f) \circ q(f),$$
$$(p+q)(A) = p(A) + q(A), \qquad (pq)(A) = p(A)q(A).$$

Důkaz. Cvičení. □

Důsledek. *Buďte p, q polynomy. Pro libovolnou lineární transformaci f máme*

$$p(f) \circ q(f) = q(f) \circ p(f)$$

(říkáme, že $p(f)$ a $q(f)$ komutují). Podobně pro libovolnou čtvercovou matici A máme

$$p(A)q(A) = q(A)p(A),$$

tj. matice získané dosazením A do různých polynomů též komutují.

6.2. Invariantní podprostory

Je-li $U \subseteq V$ podprostor, pak symbolem fU označujeme jeho obraz při zobrazení f, to jest, podprostor $\{f(u) | u \in U\}$.

Definice. Podprostor $U \subseteq V$ se nazývá *invariantní* vzhledem k lineární transformaci f, jestliže $fU \subseteq U$, tj. když pro každé $u \in U$ je $f(u) \in U$.

Je-li U invariantní podprostor, pak zobrazení $U \to U$, zadané předpisem $u \mapsto f(u)$, nazýváme *restrikce* (česky *ohraničení* nebo *zúžení*) lineárního zobrazení f na invariantní podprostor U. Značí se $f|_U \colon U \to U$ a je zřejmě opět lineární (ověřte).

Příklad. (1) Celý prostor V a nulový podprostor jsou invariantní podprostory vzhledem ke každé lineární transformaci.

(2) Je-li $f \colon v \mapsto cv$, pak je každý podprostor invariantní.

(3) Je-li u vlastní vektor s vlastní hodnotou c, pak $[\![u]\!]$ je invariantní podprostor a $f|_{[\![u]\!]}$ je zobrazení $v \mapsto cv$.

(4) Mějme rotaci $\varphi \colon E^3 \to E^3$ kolem zvolené pevné osy L procházející počátkem 0 o úhel $\alpha \in (0, 2\pi)$. Invariantní podprostory jsou nulový podprostor $\{0\}$, osa rotace L, její ortogonální doplněk $L^\perp$ (rovina procházející počátkem kolmo k L) a celý prostor E^3. Libovolný vektor $u \in L$ se zobrazí sám na sebe, proto $\varphi|_L$ je identické zobrazení id_L. Libovolný vektor $v \in L^\perp$ zůstane v rovině $L^\perp$ a $\varphi|_{L^\perp}$ je otáčení roviny $L^\perp$ o úhel α.

(5) Mějme zrcadlení ζ v prostoru E^3 vzhledem k rovině U procházející počátkem 0. Invariantní podprostory jsou nulový podprostor $\{0\}$, rovina U a každý její podprostor $V \subseteq U$, ortogonální doplněk $U^\perp$ (přímka procházející počátkem kolmo k U) a celý prostor E^3. Zobrazení $\zeta|_V$ je identické zobrazení id_V. Zobrazení $\zeta|_{U^\perp}$ je zrcadlení přímky $U^\perp$ vzhledem k počátku 0. ■

Cvičení. (1) Jednorozměrný podprostor $[\![u]\!]$, $u \neq 0$, je invariantní právě tehdy, když u je vlastní vektor. Dokažte.

(2) Průnik a součet invariantních podprostorů jsou invariantní podprostory. Dokažte.

(3) $\mathrm{Ker}\, f$ je invariantní podprostor. Dokažte. Co je $f|_{\mathrm{Ker}\, f}$?

(4) $\mathrm{Im}\, f$ je invariantní podprostor. Dokažte.

(5) Buď $v \in V$ libovolný vektor. Dokažte, že $[\![v, f(v), f(f(v)), f(f(f(v))), \dots]\!]$ je invariantní podprostor.

(6) Nechť lineární transformace $f, g\colon V \to V$ komutují, to jest, $f \circ g = g \circ f$. Buď $U \subseteq V$ invariantní podprostor vzhledem k transformaci f. Pak gU je též invariantní podprostor vzhledem k transformaci f.

Rozklad prostoru V na přímý součet invariantních podprostorů vede ke zjednodušení matice transformace f.

Tvrzení 6.2.1. *Nechť existuje přímý rozklad $V = U_1 \dot{+} U_2$, kde U_1, U_2 jsou invariantní podprostory vzhledem k lineární transformaci f. Zvolme nějakou bázi $(e_1, \dots, e_m)$ podprostoru U_1 a nějakou bázi $(e_{m+1}, \dots, e_n)$ podprostoru U_2. Pak $(e_1, \dots, e_n)$ je báze prostoru V a transformace f v ní má matici tvaru*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{m+1,m+1} & \dots & a_{m+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{n,m+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Označíme-li

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_{m+1,m+1} & \dots & a_{m+1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,m+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

pak A_i je matice lineární transformace $f|_{U_i}$.

Důkaz. Ověřte, že $(e_1, \dots, e_n)$ je báze prostoru V.

Prvních m sloupců matice A je tvořeno souřadnicemi vektorů $f(e_1), \dots, f(e_m)$ v bázi $(e_1, \dots, e_n)$. Vektory $f(e_1), \dots, f(e_m)$ ovšem leží v U_1 s bází $(e_1, \dots, e_m)$, takže koeficienty u vektorů $e_{m+1}, \dots, e_n$ v příslušné lineární kombinaci budou nulové.

Ověřte, že A_1 je matice lineární transformace $f|_{U_1}$ vzhledem k bázi $(e_1, \dots, e_m)$.

Zbytek analogicky. □

O shora uvedené matici A říkáme, že je v *blokově diagonálním tvaru* s bloky A_1, A_2 na diagonále. Stručně zapisujeme

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}.$$

Říkáme též, že A je *přímý součet submatic* A_1 a A_2.

Podobně se v případě přímého součtu $V = U_1 \dot{+} \dots \dot{+} U_n$ invariantních podprostorů $U_1, \dots, U_n$ matice zobrazení f rozpadá na přímý součet submatic $A_1, \dots, A_n$ odpovídajících lineárním zobrazením $f|_{U_1}, \dots, f|_{U_n}$:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_n \end{pmatrix}.$$

O matici A rovněž pravíme, že je *blokově diagonální.*

V ideálním případě lze prostor V rozložit na přímý součet jednorozměrných invariantních podprostorů, generovaných vlastními vektory, což je nám již známý případ diagonalizovatelné matice.

6.3. Anulující polynom a první rozklad

Definice. Nechť $p \in P[x]$, $p \neq 0$. p je *anulující polynom* čtvercové matice A (resp. lineární transformace f), jestliže $p(A) = 0$ (resp. $p(f) = 0$).

Později uvidíme, že všechny čtvercové matice i všechny lineární transformace konečněrozměrného vektorového prostoru V mají anulující polynom. Nyní se budeme zabývat příslušným rozkladem prostoru V. Odpovídá rozkladu anulujícího polynomu na ireducibilní činitele.

Tvrzení 6.3.1. *Buď q anulující polynom lineární transformace $f\colon V \to V$ a nechť existuje rozklad $q = q_1 \cdots q_n$, kde $q_1, \dots, q_n$ jsou po dvou nesoudělné ($D(q_i, q_j) = 1$ pro $i \neq j$). Pro $i \in \{1, \dots, n\}$ označme $U_i = \operatorname{Ker} q_i(f)$. Pak platí:*

(1) každý podprostor U_i je invariantní;
(2) $V = U_1 \dot{+} \cdots \dot{+} U_n$;
(3) pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ polynom q_i je anulujícím polynomem transformace $f|_{U_i}$.

Důkaz. (1) Nechť $u \in U_i$, tj. $q_i(f)(u) = 0$. Potom

$$q_i(f)(f(u)) = (q_i(f) \circ f)(u) = (f \circ q_i(f))(u) = f(q_i(f)(u)) = f(0) = 0$$

(použili jsme to, že f a $q_i(f)$ spolu komutují podle Důsledku Tvrzení 6.1.5). Tudíž, $f(u) \in U_i$.

(2) Nejdříve případ $n = 2$. Nechť $q = q_1 q_2$ a $D(q_1, q_2) = 1$. Pak existují polynomy p_1, p_2 takové, že $1 = q_1 p_1 + q_2 p_2$. Dosazením f získáváme rovnost

$$\mathrm{id} = q_1(f) \circ p_1(f) + q_2(f) \circ p_2(f),$$

takže pro libovolný vektor $v \in V$ platí

$$v = q_1(f)(p_1(f)(v)) + q_2(f)(p_2(f)(v)). \tag{7}$$

Ukažme, že první sčítanec $q_1(f)(p_1(f)(v))$ z (7) leží v U_2. Označíme-li $w = p_1(f)(v)$, stačí ověřit, že $q_1(f)(w) \in \operatorname{Ker} q_2(f)$:

$$q_2(f)(q_1(f)(w)) = (q_2(f) \circ q_1(f))(w) = (q_2 q_1)(f)(w) = q(f)(w) = 0,$$

protože q je anulující polynom pro f. Podobně se ukáže, že druhý ze sčítanců leží v U_1. Tudíž, $v \in U_1 + U_2$. Protože v byl libovolný vektor z V, máme $V = U_1 + U_2$.

Ukažme ještě, že $U_1 \cap U_2 = 0$. Nechť tedy $v \in U_1 \cap U_2$, tj. $q_1(f)(v) = 0$ a $q_2(f)(v) = 0$. Rovnost (7) platí i po záměně $p \leftrightarrow q$ (protože $p_i(f)$ a $q_i(f)$ spolu komutují podle Důsledku Tvrzení 6.1.5), načež

$$v = p_1(f)(q_1(f)(v)) + p_2(f)(q_2(f)(v)) = p_1(f)(0) + p_2(f)(0) = 0,$$

protože $p_1(f), p_2(f)$ jsou lineární zobrazení. Dokázali jsme tedy, že $V = U_1 \dot{+} U_2$.

Obecný případ $n > 2$ se dokáže indukcí (cvičení).

(3) Polynom q_i je anulujícím polynomem transformace $f|_{U_i}$, protože $\operatorname{Ker} q_i(f) = U_i$, načež
$\operatorname{Ker} q_i(f|_{U_i}) = \operatorname{Ker}(q_i(f)|_{U_i}) = U_i \cap \operatorname{Ker} q_i(f) = U_i$, a tedy $q_i(f|_{U_i}) = 0$. □

K nalezení právě uvedeného rozkladu musíme znát aspoň jeden anulující polynom.

Připomenutí ze zimního semestru. Buď $A = (a_{ij})$ čtvercová matice. Označme

$A_{\setminus ij}$ matici, která vznikne z A vynecháním i-tého řádku a j-tého sloupce;
$\overline{A_{\setminus ij}}$ determinant matice $A_{\setminus ij}$ (nazývá se *minor*), tedy $\overline{A_{\setminus ij}} = \det A_{\setminus ij}$;
$\hat{A}_{ij}$ *kofaktor* (nebo také *algebraický doplněk*) prvku a_{ij}, tedy $\hat{A}_{ij} = (-1)^{i+j}\overline{A_{\setminus ij}}$;
$\hat{A}$ matici kofaktorů $\hat{A}_{ij}$;
$\operatorname{adj} A$ matici *adjungovanou* k matici A, tedy $\operatorname{adj} A = \hat{A}^T$.

Pak platí

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A, \qquad \text{tedy} \quad A \cdot \operatorname{adj} A = \det A \cdot E.$$

Tvrzení 6.3.2 (Cayleyho-Hamiltonova věta)**.** *Charakteristický polynom čtvercové matice je jejím anulujícím polynomem.*

Důkaz. Pro libovolnou čtvercovou matici B jsme v zimním semestru (viz připomenutí výše) odvodili vztah $B \cdot \operatorname{adj} B = \det B \cdot E$. Dosaďme za B matici $A - xE$:

$$(A - xE) \cdot \operatorname{adj}(A - xE) = \chi_A(x) \cdot E. \tag{8}$$

Je-li matice A typu $n \times n$, pak její charakteristický polynom χ_A je polynomem stupně n, řekněme $\chi_A = c_n x^n + \cdots + c_1 x + c_0$. Dále je (z definice adjungované matice) jasné, že prvky matice $\operatorname{adj}(A - xE)$ jsou polynomy stupně $n - 1$ v x. Sdružíme-li sčítance s týmiž mocnimani x, získáme vyjádření $\operatorname{adj}(A - xE) = C_{n-1}x^{n-1} + \cdots + C_1 x + C_0$, kde C_i jsou čtvercové matice typu $n \times n$.

Po dosazení do (8) máme

$$(A - xE) \cdot (C_{n-1}x^{n-1} + \cdots + C_1 x + C_0) = (c_n x^n + \cdots + c_1 x + c_0) \cdot E,$$

tj.

$$\begin{aligned} &- C_{n-1}x^n + (AC_{n-1} - C_{n-2})x^{n-1} + \cdots + (AC_1 - C_0)x + AC_0 \\ &\qquad = c_n E x^n + \cdots + c_1 E x + c_0 E. \end{aligned}$$

Porovnáním koeficientů u stejných mocnin x obdržíme

$$\begin{aligned} &- C_{n-1} = c_n E, \\ &- C_{n-2} + AC_{n-1} = c_{n-1}E, \\ &\quad\vdots \\ &- C_0 + AC_1 = c_1 E, \\ &AC_0 = c_0 E. \end{aligned}$$

Vynásobíme-li i-tou rovnost $(n + 1 - i)$-tou mocninou A^{n+1-i} matice A a vzniklé rovnosti sečteme, získáme

$$0 = c_n A^n + c_{n-1}A^{n-1} + \cdots + c_1 A + c_0 E,$$

což se mělo dokázat. □

Důsledek. *Charakteristický polynom lineární transformace je jejím anulujícím polynomem.*

Uvedená tvrzení nám nabízí
Postup pro hledání blokově diagonálního tvaru matice, resp. báze prostoru, vzhledem k níž je matice lineární transformace blokově diagonální:

(1) Tvrzení 6.3.2 nám dává anulující polynom.
(2) Podle Tvrzení 6.3.1 můžeme pomocí anulujícího polynomu najít invariantní podprostory, jejichž přímým součtem je celý prostor.
(3) Podle Tvrzení 6.2.1 matice transformace vzhledem k bázi, která je tvořena bázemi invariantních podprostorů, je blokově diagonální.

Příklad. Nechť

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Charakteristický polynom je $x^3-5x^2+9x-5 = (x-1)(x^2-4x+5)$ (ověřte). Vidíme, že polynom χ_A je součinem nesoudělných polynomů $q_1 = x-1$ a $q_2 = x^2-4x+5$.

Matice A představuje lineární zobrazení $\alpha\colon \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^3$, $u \mapsto Au$. Počítejme $U_1 = \operatorname{Ker} q_1(\alpha) = \operatorname{Ker}(\alpha - \mathrm{id})$. Jádro $\operatorname{Ker}(\alpha - \mathrm{id})$ vypočteme řešením rovnice $(\alpha - \mathrm{id})(u) = 0$, což je homogenní soustava s maticí

$$q_1(A) = A - E = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a fundamentálním řešením $e_1 = (1,1,1)$ (ověřte). Dostáváme jednorozměrný invariantní podprostor

$$U_1 = \operatorname{Ker} q_1(\alpha) = [\![(1,1,1)]\!].$$

Podobně $U_2 = \operatorname{Ker} q_2(\alpha) = \operatorname{Ker}(\alpha^2 - 4\alpha + 5\,\mathrm{id})$. Toto jádro vypočteme řešením rovnice

$$(\alpha^2 - 4\alpha + 5\,\mathrm{id})(u) = 0,$$

což je homogenní soustava s maticí

$$q_2(A) = A^2 - 4A + 5E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a fundamentálním řešením $e_2 = (0,0,1), e_3 = (1,-1,0)$ (ověřte). Dostáváme dvourozměrný invariantní podprostor

$$U_2 = \operatorname{Ker} q_2(\alpha) = [\![(0,0,1),(1,-1,0)]\!].$$

Získali jsme (a) přímý rozklad $\boldsymbol{R}^3 = U_1 \dot{+} U_2$ na invariantní podprostory U_1 a U_2; (b) „novou“ bázi (e_1, e_2, e_3). Matici přechodu od „staré“ kanonické báze k „nové“ bázi označme Q. Inverzní matice Q^{-1} je matice přechodu od „nové“ báze ke kanonické bázi. Tedy

$$Q = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & -1/2 & 1 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Matice zobrazení α vzhledem k „nové“ bázi je tedy blokově diagonální matice

$$QAQ^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}. \qquad \blacksquare$$

Příklad. Nechť $\alpha\colon \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^3$ je lineární zobrazení, jehož matice vzhledem ke kanonické („staré“) bázi $((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ je

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Charakteristický polynom matice A je $\chi_A = -x^2(x-2)$ a můžeme jej zapsat jako součin nesoudělných polynomů $q_1 = -x^2$ a $q_2 = x - 2$. Vlastní čísla jsou $\lambda_1 = 0$ a $\lambda_2 = 2$.

Tedy

$$q_1(A) = -A^2 = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -4 \\ -6 & 6 & -12 \\ -4 & 4 & -8 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad q_2(A) = A - 2E = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 3 & -5 & 6 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Potom $U_1 = \operatorname{Ker} q_1(A) = \operatorname{Ker}(-A^2)$ je množina všech řešení homogenní soustavy lineárních rovnic s maticí $-A^2$ a $U_2 = \operatorname{Ker} q_2(A) = \operatorname{Ker}(A - 2E)$ je množina všech řešení homogenní soustavy lineárních rovnic s maticí $A - 2E$. Tedy $U_1 = [\![(-2,0,1),(1,1,0)]\!]$ a $U_2 = [\![(1,3,2)]\!]$.

Takže prostor $\boldsymbol{R}^3$ je přímým součtem invariantních podprostorů U_1, U_2 a vektory $(-2,0,1),(1,1,0),(1,3,2)$ tvoří „novou“ bázi prostoru $\boldsymbol{R}^3$. Matice přechodu od „staré“ báze k „nové“ bázi je

$$Q = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -3/2 & 5/2 & -3 \\ 1/2 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad Q^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

a matice zobrazení α vzhledem k „nové“ bázi je

$$A' = Q \cdot A \cdot Q^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \qquad \blacksquare$$

6.4. Minimální polynom

Příklad. Matice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

má charakteristický polynom $\chi_A = x^3 - x^2 - x + 1 = (x+1)(x-1)^2$, ale $q = x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$ je také anulující polynom matice A (ověřte). $\blacksquare$

Poslední příklad ukazuje, že charakteristický polynom může mít netriviálního dělitele, který je rovněž anulujícím polynomem. Ukažme, že mezi anulujícími polynomy existuje jeden, který dělí všechny ostatní.

Definice. Anulující polynom se nazývá *minimální polynom*, je-li normovaný a nejmenšího stupně ze všech anulujících polynomů.

Tvrzení 6.4.1. *Každý anulující polynom je dělitelný minimálním polynomem.*

Důkaz. Buď f anulující polynom matice A, buď g minimální polynom matice A. Dělme se zbytkem: $f = qg + r$, kde buď $r = 0$ nebo $\deg r < \deg g$. Do rovnosti dosadíme A a dostaneme

$$0 = f(A) = q(A)g(A) + r(A) = r(A),$$

protože f a g jsou anulující polynomy. Kdyby $r \neq 0$, byl by to anulující polynom nižšího stupně než minimální polynom g, což je spor, a proto $r = 0$ a g je dělitelem f. $\square$

Důsledek. *Ke každé lineární transformaci konečněrozměrného vektorového prostoru resp. ke každé čtvercové matici existuje minimální polynom a je jediný.*

Cvičení. Dokažte jednoznačnost minimálního polynomu.

8. přednáška, 5. 5. 2020, distančně

7. Druhý rozklad lineární transformace

Použité učební texty:
[Marvan, 19. Druhý rozklad lineární transformace]

Úmluva. Všude $P = \boldsymbol{C}$.

V přednášce o vlastních vektorech jsme se seznámili s diagonalizovatelnými transformacemi. V bázi složené z vlastních vektorů v_i mají diagonální matici s vlastními čísly λ_i na diagonále.

Obecná lineární transformace nemusí mít bázi složenou z vlastních vektorů. Nicméně, jak ukážeme, lze zkonstruovat jinou významnou bázi—Jordanovu. Matice lineární transformace v Jordanově bázi je tzv. Jordanova matice. Opět má na diagonále vlastní čísla, ale může obsahovat i nenulové prvky v řadě sousedící s diagonálou (všechny ovšem rovny 1).

Východiskem pro nalezení Jordanovy báze bude první rozklad, příslušný rozkladu charakteristického polynomu (nebo libovolného jiného anulujícího polynomu) χ_f na nesoudělné součinitele. Při $P = \boldsymbol{C}$ ovšem existuje rozklad na kořenové činitele

$$\chi_f = (x - \xi_1)^{k_1} \cdots (x - \xi_s)^{k_s}, \quad \xi_i \neq \xi_j \text{ pro } i \neq j,$$

a pro $i \neq j$ jsou polynomy $(x - \xi_i)^{k_i}$ a $(x - \xi_j)^{k_j}$ nesoudělné. Invariantní podprostory prvního rozkladu pak jsou

$$U_i = \operatorname{Ker}(f - \xi_i \operatorname{id})^{k_i}.$$

Na jednotlivých invariantních podprostorech vznikají restrikce $f|_{U_i} \colon U_i \to U_i$. Označíme-li $g_i = f - \xi_i \operatorname{id}$, pak $\operatorname{Ker} g_i^{k_i} = U_i$, a tedy $(g|_{U_i})^{k_i} = 0$.

Má tedy smysl studovat transformace $f \colon U \to U$ takové, že pro některé číslo ξ transformace $g = f - \xi \operatorname{id}$ splňuje $g^k = 0$. Výsledky použijeme pro $U = U_i$ a $g = f|_{U_i} - \xi_i \operatorname{id}_{U_i}$, $i = 1, \ldots, s$.

7.1. Rozklad na součet cyklických podprostorů

Definice. Transformace $g \colon U \to U$ (resp. čtvercová matice B) se nazývá *nilpotentní*, jestliže existuje celé číslo $k \geq 1$ takové, že $g^k = 0$ (resp. $B^k = 0$).

Cvičení. Transformace g je nilpotentní právě tehdy, když je její matice B (v libovolné bázi) nilpotentní.

Definice. Podprostor $T \subseteq U$ se nazývá *cyklický* vzhledem k transformaci $g \colon U \to U$, jestliže má bázi $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ takovou, že

$$g(e_1) = e_2, \quad g(e_2) = e_3, \quad \ldots, \quad g(e_{n-1}) = e_n, \quad g(e_n) = 0.$$

Bázi $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ nazýváme *cyklická báze*.

Schematicky,

$$e_1 \xrightarrow[g]{} e_2 \xrightarrow[g]{} \cdots e_{n-1} \xrightarrow[g]{} e_n \xrightarrow[g]{} 0.$$

Definice. Matice

$$J_1(\xi) = (\xi), \quad J_2(\xi) = \begin{pmatrix} \xi & 0 \\ 1 & \xi \end{pmatrix}, \quad J_3(\xi) = \begin{pmatrix} \xi & 0 & 0 \\ 1 & \xi & 0 \\ 0 & 1 & \xi \end{pmatrix},$$

$$J_4(\xi) = \begin{pmatrix} \xi & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \xi & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \xi & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \xi \end{pmatrix}, \quad \text{atd.}$$

se nazývají *Jordanovy bloky* (též *Jordanovy buňky*).

Tvrzení 7.1.1. *Buď T cyklický podprostor nilpotentní transformace g, buď $f = g + \xi\,\mathrm{id}$. Pak*

(1) T je invariantní vzhledem k lineárním transformacím g i f;
(2) $g|_T$ má v cyklické bázi matici $J_n(0)$;
(3) $f|_T$ má v cyklické bázi matici $J_n(\xi)$.

Důkaz. Cvičení. □

Často se setkáváme s odlišnou definicí Jordanových buněk—jedničky stojí v řadě těsně *nad* diagonálou. To odpovídá opačnému pořadí vektorů cyklické báze, tj. $(e_n, \dots, e_2, e_1)$.

Lemma. *Buď $h \colon U \to V$ lineární zobrazení mezi konečněrozměrnými vektorovými prostory. Zvolme libovolně bázi v $\operatorname{Ker} h$ a doplňme ji do báze v U nějakými vektory $e_1, \dots, e_m$. Pak vektory $h(e_1), \dots, h(e_m)$ tvoří bázi v $\operatorname{Im} h$.*

Důkaz. Cvičení (viz důkaz formule $\dim U = \dim \operatorname{Ker} h + \dim \operatorname{Im} h$ v Tvrzení 3.2.3). □

Tvrzení 7.1.2. *Buď $g \colon U \to U$ nilpotentní transformace. Pak existují cyklické podprostory $T_1, \dots, T_r \subseteq U$ takové, že $U = T_1 \dotplus \dots \dotplus T_r$.*

Důkaz. Tvrzení dokážeme uvedením praktického algoritmu pro nalezení cyklických podprostorů a jejich cyklických bází. Popis algoritmu tvoří věty psané kurzívou.

Máme $U = \operatorname{Ker} g^k$ pro jisté k (protože g je nilpotentní). Bez újmy na obecnosti je číslo k minimální, to jest, $g^{k-1} \neq 0$, a tudíž $\operatorname{Ker} g^{k-1} \neq U$.

1. *Zvolíme libovolně bázi v $\operatorname{Ker} g^{k-1}$ a doplníme ji do báze v $U = \operatorname{Ker} g^k$ nějakými vektory $e_1, \dots, e_{m_1}$.*

   Podle lemmatu vektory $g^{k-1}(e_1), \dots, g^{k-1}(e_{m_1})$ tvoří bázi v $\operatorname{Im} g^{k-1}$ a jsou tedy lineárně nezávislé. Navíc, jelikož $g^k = 0$, máme $g(e_1), \dots, g(e_{m_1}) \in \operatorname{Ker} g^{k-1}$.

2. *Zvolíme libovolně bázi v $\operatorname{Ker} g^{k-2}$ a přidáme k ní vektory $g(e_1), \dots, g(e_{m_1}) \in \operatorname{Ker} g^{k-1}$.*

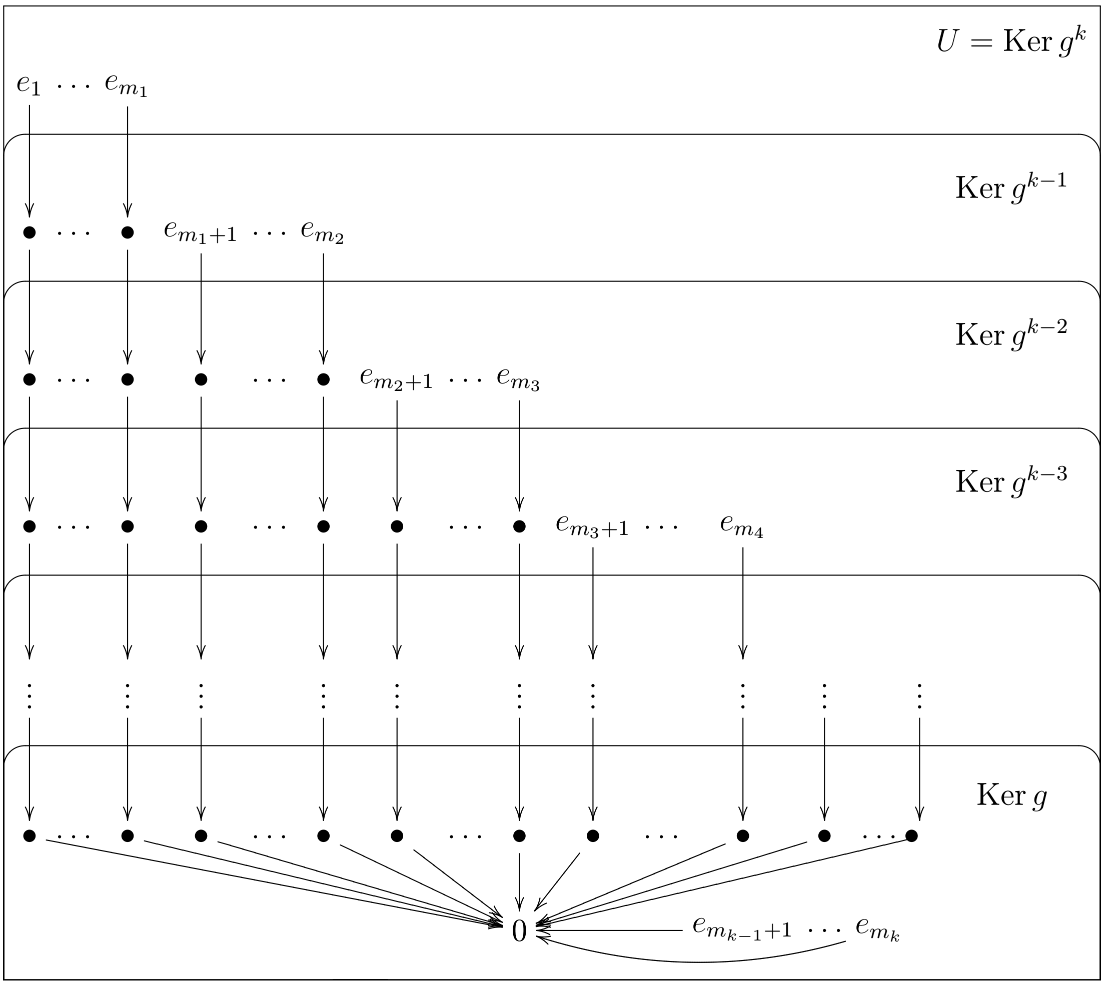
   Tato sestava je lineárně nezávislá. Skutečně, vezměme si lineární kombinaci všech vektorů z této sestavy, která je rovna nulovému vektoru. Máme tedy skaláry $c_1, \dots, c_{m_1}$, takové, že $c_1 g(e_1) + \dots + c_{m_1} g(e_{m_1}) \in \operatorname{Ker} g^{k-2}$. Pak ovšem $0 = g^{k-2}(c_1 g(e_1) + \dots + c_{m_1} g(e_{m_1})) = c_1 g^{k-1}(e_1) + \dots + c_{m_1} g^{k-1}(e_{m_1})$, a tedy $c_1 = \dots = c_{m_1} = 0$, protože vektory $g^{k-1}(e_1), \dots, g^{k-1}(e_{m_1})$ jsou lineárně nezávislé (viz výše). A potom také ostatní koeficienty v uvažované lineární kombinaci jsou nulové, protože příslušné vektory tvoří bázi.

Sestavu doplníme do báze v $\operatorname{Ker} g^{k-1}$ nějakými vektory $e_{m_1+1}, \dots, e_{m_2}$.

Tím se vlastně báze v $\operatorname{Ker} g^{k-2}$ doplní do báze v $\operatorname{Ker} g^{k-1}$ vektory $g(e_1), \ldots, g(e_{m_1}), e_{m_1+1}, \ldots, e_{m_2}$. Z lemmatu potom vyplývá, že vektory $g^{k-1}(e_1), \ldots, g^{k-1}(e_{m_1}), g^{k-2}(e_{m_1+1}), \ldots, g^{k-2}(e_{m_2})$ tvoří bázi v $\operatorname{Im}(g^{k-2}|_{\operatorname{Ker} g^{k-1}})$ a jsou tedy lineárně nezávislé.

3. *Zvolíme libovolně bázi v* $\operatorname{Ker} g^{k-3}$ *a připojíme k ní vektory* $g^2(e_1), \ldots, g^2(e_{m_1}), g(e_{m_1+1}), \ldots, g(e_{m_2}) \in \operatorname{Ker} g^{k-2}$.

Tato sestava je lineárně nezávislá. Skutečně, vezměme si lineární kombinaci všech vektorů z této sestavy, která je rovna nulovému vektoru. Máme tedy skaláry $c_1, \ldots, c_{m_1}, c_{m_1+1}, \ldots, c_{m_2}$, takové, že $c_1 g^2(e_1) + \cdots + c_{m_1} g^2(e_{m_1}) + c_{m_1+1} g(e_{m_1+1}) + \cdots + c_{m_2} g(e_{m_2}) \in \operatorname{Ker} g^{k-3}$. Pak ovšem $0 = g^{k-3}(c_1 g^2(e_1) + \cdots + c_{m_1} g^2(e_{m_1}) + c_{m_1+1} g(e_{m_1+1}) + \cdots + c_{m_2} g(e_{m_2})) = c_1 g^{k-1}(e_1) + \cdots + c_{m_1} g^{k-1}(e_{m_1}) + c_{m_1+1} g^{k-2}(e_{m_1+1}) + \cdots + c_{m_2} g^{k-2}(e_{m_2})$, a tedy $c_1 = \cdots = c_{m_1} = c_{m_1+1} = \cdots = c_{m_2} = 0$, protože vektory $g^{k-1}(e_1), \ldots, g^{k-1}(e_{m_1}), g^{k-2}(e_{m_1+1}), \ldots, g^{k-2}(e_{m_2})$ jsou lineárně nezávislé (viz výše). A potom také ostatní koeficienty v uvažované lineární kombinaci jsou nulové, protože příslušné vektory tvoří bázi.



Sestavu doplníme do báze v $\operatorname{Ker} g^{k-2}$ *nějakými vektory* $e_{m_2+1}, \dots, e_{m_3}$.

Tím jsme tedy bázi v $\operatorname{Ker} g^{k-3}$ doplnili do báze v $\operatorname{Ker} g^{k-2}$ vektory $g^2(e_1), \dots, g^2(e_{m_1}), g(e_{m_1+1}), \dots, g(e_{m_2}), e_{m_2+1}, \dots, e_{m_3}$. A potom vektory $g^{k-1}(e_1), \dots, g^{k-1}(e_{m_1}), g^{k-2}(e_{m_1+1}), \dots, g^{k-2}(e_{m_2}), g^{k-3}(e_{m_2+1}), \dots, g^{k-3}(e_{m_3})$ tvoří podle lemmatu bázi v $\operatorname{Im}(g^{k-3}|_{\operatorname{Ker} g^{k-2}})$ a jsou tedy lineárně nezávislé.

Podobných kroků provedeme k (v posledním kroku doplňujeme bázi podprostoru $\operatorname{Ker} g^0 = \operatorname{Ker} \mathrm{id} = \{0\}$ do báze v podprostoru $\operatorname{Ker} g$).

Z uvedeného postupu vyplývá, že celkově získáme bázi

$$
\begin{aligned}
&e_1, \dots, e_{m_1},\\
&g(e_1), \dots, g(e_{m_1}), e_{m_1+1}, \dots, e_{m_2},\\
&g^2(e_1), \dots, g^2(e_{m_1}), g(e_{m_1+1}), \dots, g(e_{m_2}), e_{m_2+1}, \dots, e_{m_3},\\
&\dots\\
&g^{k-1}(e_1), \dots, g^{k-1}(e_{m_1}), g^{k-2}(e_{m_1+1}), \dots, g^{k-2}(e_{m_2}),\\
&\qquad g^{k-3}(e_{m_2+1}), \dots, g^{k-3}(e_{m_3}), \dots, e_{m_{k-1}+1}, \dots, e_{m_k}
\end{aligned}
$$

v prostoru U. Podprostory

$$
\begin{aligned}
&[\![e_1, g(e_1), \dots, g^{k-1}(e_1)]\!], \dots, [\![e_{m_1}, g(e_{m_1}), \dots, g^{k-1}(e_{m_1})]\!],\\
&[\![e_{m_1+1}, g(e_{m_1+1}), \dots, g^{k-2}(e_{m_1+1})]\!], \dots, [\![e_{m_2}, g(e_{m_2}), \dots, g^{k-2}(e_{m_2})]\!],\\
&\dots\\
&[\![e_{m_{k-1}+1}]\!], \dots, [\![e_{m_k}]\!]
\end{aligned}
$$

jsou pak cyklické podprostory s příslušnými cyklickými bázemi.

Označíme-li počet těchto cyklických podprostorů $r := \sum_{j=1}^{k} m_j$ a jednotlivé podprostory T_i pro $i = 1, \dots, r$, dostáváme $U = T_1 + \dots + T_r$. Jelikož $\dim T_1 + \dots + \dim T_r = \dim(T_1 + \dots + T_r)$, podle Tvrzení 3.4.1 se jedná o přímý součet podprostorů. $\square$

Nalezli jsme cyklické podprostory a v každém z nich cyklickou bázi. Situaci můžeme znázornit diagramem, jehož vrcholy jsou vektory cyklických bází a šipky znamenají zobrazení g:

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
\bullet & \bullet & \bullet & & & & & & & & & & \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & & & & & & & & & & \\
\bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & & & & & & \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & & & & & \\
\bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet
\end{array}
\tag{9}
$$

Sloupce znamenají jednotlivé cyklické podprostory. Vektory spodní řady se zobrazují na nulový vektor. Tvoří vlastně bázi v $\operatorname{Ker} g = \operatorname{Ker}(f - \xi\,\mathrm{id}) = V_\xi$, což je prostor vlastních vektorů s vlastním číslem ξ (doplněný nulovým vektorem). Tudíž, počet sloupců = počet cyklických podprostorů = $\dim V_\xi$.

Vektory dolních j řádků tvoří bázi v $\operatorname{Ker} g^j$. V j-tém řádku zdola je proto právě

$$
n_j = \dim \operatorname{Ker} g^j - \dim \operatorname{Ker} g^{j-1} = \sum_{i=1}^{k+1-j} m_i \tag{10}
$$

bodů, kde m_i jsou koeficienty z důkazu předchozího tvrzení. Čísla $n_1 \ge n_2 \ge \dots \ge n_k$ jednoznačně určují délky řádků diagramu, a tím i počty cyklických podprostorů příslušných dimenzí.

Formule (10) ukazuje, že čísla $n_1 \geq n_2 \geq \cdots \geq n_k$ závisí jen a jen na nilpotentní transformaci g a nikoliv na konkrétním postupu, kterým byly získány jednotlivé cyklické báze. Jsou to *invarianty lineární transformace* g.

Důsledek. *Buď* $g\colon U \to U$ *nilpotentní transformace. Pak existuje báze prostoru* U *taková, že*

(1) transformace g *má blokově diagonální matici, která je přímým součtem Jordanových bloků* $J_s(0)$*;*

(2) transformace $f = g + \xi\,\mathrm{id}$ *má blokově diagonální matici, která je přímým součtem Jordanových bloků* $J_s(\xi)$.

Důkaz. Báze sestavená z cyklických bází cyklických podprostorů v důkazu předchozího tvrzení má požadované vlastnosti. □

Příklad. Uvažujme lineární transformaci $\boldsymbol{C}^5 \to \boldsymbol{C}^5$, $v \mapsto Av$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ -3 & -4 & -4 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & -3 & 3 \\ 4 & 1 & 1 & -6 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Anulující polynom nejmenšího stupně je $x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = (x + 2)^3$, s jediným kořenem -2, což je současně jediná vlastní hodnota matice A. První rozklad má proto jediného sčítance $U = \boldsymbol{C}^5$ a

$$B = A + 2E = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ -3 & -2 & -4 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & -3 & 3 \\ 4 & 1 & 1 & -4 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

je nilpotentní matice, $B^3 = 0$. Spočítáme

$$B^2 = \begin{pmatrix} -4 & -1 & -2 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & -2 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

načež $\operatorname{Ker} B^2 = [\![(5, 0, 0, 0, -4), (0, 5, 0, 0, -1), (0, 0, 5, 0, -2), (0, 0, 0, 5, 4)]\!]$. Tento čtyřrozměrný podprostor můžeme doplnit do báze v $\boldsymbol{C}^5$ libovolným vektorem, který v něm neleží, zvolme například

$$e_1 = (0, 0, 0, 0, 1).$$

Tím je ukončen první krok. Ve druhém kroku spočítáme

$$\operatorname{Ker} B = [\![(1, 0, 0, 1, 0), (0, -5, 1, -2, -1)]\!],$$

a přidáme vektor

$$Be_1 = (0, 0, 3, 4, 2).$$

Získanou sestavu tří lineárně nezávislých vektorů je třeba doplnit do báze ve čtyřrozměrném $\operatorname{Ker} B^2$ jedním vektorem; zvolme například

$$e_2 = (0, 0, 0, 5, 4)$$

(mohli jsme zvolit kterýkoliv ze shora uvedených generátorů podprostoru $\operatorname{Ker} B^2$). Tím je ukončen druhý krok. Ve třetím kroku je $\operatorname{Ker} B^0 = \operatorname{Ker} E = 0$ a doplňujeme tedy dva vektory

$$B^2 e_1 = (-5, 0, 0 - 5, 0) \quad \text{a} \quad Be_2 = (-10, 15, -3, -4, 3)$$

do báze v dvourozměrném $\operatorname{Ker} B$, což ovšem nevyžaduje žádný doplňující vektor a jsme hotovi.

Hledaná báze prostoru $\boldsymbol{C}^5$ je proto $(e_1, Be_1, B^2e_1, e_2, Be_2)$. Příslušný diagram je

$$\begin{array}{cc}
\bullet & \\
\downarrow & \\
\bullet & \bullet \\
\downarrow & \downarrow \\
\bullet & \bullet
\end{array}$$

a jeho dva sloupce odpovídají dvěma Jordanovým blokům rozměrů 3 a 2. Dostáváme blokově diagonální matice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{resp.} \quad \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

(při obráceném pořadí vektorů v cyklických bázích by jedničky stály nad diagonálou; odlišné může být i pořadí Jordanových bloků). ■

7.2. Druhý rozklad a Jordanův tvar matice

Vraťme se nyní k obecné transformaci $f\colon V \to V$ a prvnímu rozhladu $V = U_1 \dotplus \cdots \dotplus U_s$ podle některého anulujícího polynomu. Pro každý z prostorů U_l, $l = 1, \ldots, s$ dostáváme rozklad na cyklické podprostory $T_{l,i}$, kde $i = 1, \ldots, k_l$, celkem tedy

$$V = T_{1,1} \dotplus \cdots \dotplus T_{1,k_1} \dotplus \cdots \dotplus T_{s,1} \dotplus \cdots \dotplus T_{s,k_s}.$$

Definice. Tento rozklad se nazývá *druhý rozklad* prostoru lineární transformace.

Připomeňme, že cyklické podprostory $T_{i,j}$ jsou invariantní a zobrazení $f|_{T_{i,j}}$ mají v cyklické bázi matici tvaru $J_r(\xi)$, $r = \dim T_{i,j}$.

Definice. Matice, která je přímým součtem Jordanových bloků, se nazývá *matice v Jordanově tvaru.*

Příklad. Matice

$$
\left(\begin{array}{ccc|cccc||cccccc}
2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3
\end{array}\right)
$$

je v Jordanově tvaru. Bloky prvního rozkladu jsou vyznačeny dvojitou čarou. Blokům druhého rozkladu odpovídají diagramy

$$
\begin{array}{ccccccccc}
\bullet & & & & & & & & \\
\downarrow & & & & & & & & \\
\bullet & \bullet & \bullet & \quad\text{resp.}\quad & \bullet & \bullet & & \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & & \\
\bullet & \bullet & \bullet & & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet
\end{array}
$$

Šipky zde znamenají zobrazení $f - 2\,\mathrm{id}$ resp. $f - 3\,\mathrm{id}$. Délky spodních řádků jsou dimenze prostorů vlastních vektorů s vlastními hodnotami 2 resp. 3. ∎

Důsledek. *Buď $f\colon V \to V$ lineární transformace. Pak existuje báze prostoru V, vzhledem k níž f má matici v Jordanově tvaru.*

Definice. Báze z předchozího důsledku se nazývá *Jordanova báze* a získáme ji sjednocením cyklických bází v jednotlivých cyklických podprostorech $T_{i,j}$.

Při praktickém převodu na Jordanův tvar nejdříve nalezneme invariantní podprostory $U = \operatorname{Ker} g^k = \operatorname{Ker}(f - \xi\,\mathrm{id})^k$ prvního rozkladu, pro každou vlastní hodnotu ξ zvlášť. V každém z nich pak hledáme cyklické podprostory a cyklické báze postupem uvedeným v důkazu Tvrzení 7.1.2.

Zbývá rozhodnout, nakolik je Jordanův tvar matice lineární transformace určen jednoznačně. Postup k nalezení Jordanovy báze, který jsme popsali, udává jednoznačně všechny Jordanovy buňky $J_r(\xi)$. Čísla ξ probíhají všechny vlastní hodnoty, rozměr r je určen prostřednictvím diagramů (9) a počet buněk s daným rozměrem je určen prostřednictvím čísel $n_1 \geq n_2 \geq \cdots \geq n_k$, která jsou zase jednoznačně určena formulemi (10), kde $g = f - \xi\,\mathrm{id}$. Neurčeno pak zůstává pouze pořadí Jordanových buněk.

Cvičení. Spočtěte Jordanův tvar transponované matice A^T. (Výsledek: je týž.)

7.3. Minimální polynom

Minimální polynom můžeme jednoduše stanovit z Jordanova tvaru jako polynom

$$(x - \xi_1)^{\mu_1} \cdots (x - \xi_s)^{\mu_s},$$

kde $\xi_1, \dots, \xi_s$ jsou vlastní hodnoty lineární transformace, resp. matice a $\mu_1, \dots, \mu_s$ jsou výšky (maximální délky sloupců) diagramů (9) pro jednotlivé vlastní hodnoty $\xi_1, \dots, \xi_s$. (Dokažte jako cvičení.)

Příklad. Matice z posledního příkladu má minimální polynom $(x-2)^3(x-3)^2$. ■

7.4. Kritérium podobnosti matic

Připomeňme, že dvě čtvercové matice A, B jsou podobné, jestliže existuje invertibilní matice Q taková, že $B = QAQ^{-1}$. Zapisujeme $A \approx B$. Dále připomeňme, že matice jedné a téže lineární transformace v různých bázích jsou si podobné (maticí Q je v tomto případě matice přechodu mezi bázemi).

Tvrzení 7.4.1. *Každá čtvercová komplexní matice je podobná matici v Jordanově tvaru.*

Důkaz. Buď A čtvercová komplexní matice typu $n \times n$. Potom A je maticí lineární transformace $f \colon \boldsymbol{C}^n \to \boldsymbol{C}^n$, $u \mapsto Au$. V Jordanově bázi má transformace f matici B v Jordanově tvaru. Pak $B \approx A$. □

Definice. Matice B z předchozího důkazu se nazývá *Jordanův tvar matice A.*

Jordanův tvar je určen jednoznačně až na pořadí bloků a rozhoduje o podobnosti matic:

Tvrzení 7.4.2. *Matice jsou si podobné právě tehdy, když mají stejný Jordanův tvar až na pořadí Jordanových bloků.*

Důkaz. Jsou-li si matice A', A'' podobné, pak zobrazení $u \mapsto A'u$, $u \mapsto A''u$ mají stejné charakteristické polynomy, stejné vlastní hodnoty a stejné jsou i dimenze a počty invariantních podprostrorů určené diagramy (9) a formulemi (10) (cvičení). Proto jsou stejné i Jordanovy tvary.

Naopak, buďte $B' \approx A'$ a $B'' \approx A''$ Jordanovy tvary matic A' a A''. Jestliže se B' a B'' liší jen pořadím Jordanových bloků, pak jsou si podobné (cvičení), načež $A' \approx B' \approx B'' \approx A''$. □

Cvičení. Dokažte, že pro libovolnou čtvercovou matici platí $A \approx A^T$.
Návod: Dokažte postupně

(i) $J \approx J^T$ pro libovolnou Jordanovu matici J (stačí zpřeházet vektory v Jordanově bázi);
(ii) je-li $A \approx J$, pak $A^T \approx J^T$.

9. přednáška, 12. 5. 2020, distančně

8. Skalární součin

Viz [Marvan, 16. Skalární součin]

10. přednáška, 19. 5. 2020, distančně

---

9. Bilineární a kvadratické formy

Viz [Marvan, 17. Bilineární a kvadratické formy]

11. přednáška, 26. 5. 2020, distančně

12. přednáška, 2. 6. 2020, distančně

---

10. Tenzory

Zobecněním bilineární formy jsou polylineární formy. Nazývají se též kovariantní tenzory. Hojně se vyskytují ve fyzice spolu s tenzory kontravariantními a smíšenými. Omezíme se na reálný případ. Opět používáme Einsteinovu sumační konvenci.

Definice. Buď V vektorový prostor nad polem $\boldsymbol{R}$. Buď p přirozené číslo, označme $V^p = V \times \cdots \times V$ (p-krát). Zobrazení $f \colon V^p \to \boldsymbol{R}$, splňující pro libovolné vektory $u_i, u_i', u_i'' \in V$, libovolný skalár $a \in \boldsymbol{R}$ a každý index $i = 1, \dots, p$ podmínky

$$\begin{aligned} &f(u_1, \dots, u_{i-1}, u_i' + u_i'', u_{i+1}, \dots, u_p) \\ &\qquad = f(u_1, \dots, u_{i-1}, u_i', u_{i+1}, \dots, u_p) + f(u_1, \dots, u_{i-1}, u_i'', u_{i+1}, \dots, u_p), \\ &f(u_1, \dots, u_{i-1}, a u_i, u_{i+1}, \dots, u_p) = a f(u_1, \dots, u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, \dots, u_p) \end{aligned}$$

(linearita v i-tém argumentu), se nazývá *p-lineární forma* nebo též *kovariantní tenzor řádu p* na V

1-lineární forma je lineární zobrazení $V \to \boldsymbol{R}$, 2-lineární forma je bilineární forma.

Příklad. Nechť $V = \boldsymbol{R}^n$. Pro vektory $x_1 = (x_1^1, \dots, x_1^n), \dots, x_n = (x_n^1, \dots, x_n^n) \in \boldsymbol{R}^n$ položme

$$\epsilon(x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} x_1^1 & \dots & x_1^n \\ \vdots & & \vdots \\ x_n^1 & \dots & x_n^n \end{vmatrix}.$$

Z vlastností determinantu vyplývá, že ϵ je n-linerání forma na $\boldsymbol{R}^n$ (cvičení). ■

Definice. Buď V konečněrozměrný vektorový prostor s bází $(e_1, \dots, e_n)$, buď f p-lineární forma na V. Čísla $f_{i_1 \dots i_p} := f(e_{i_1}, \dots, e_{i_p})$ se nazývají *složky* formy f vzhledem k bázi $(e_1, \dots, e_n)$.

Příklad. Složky bilineární formy jsou právě prvky její matice: $B_{ij} = f(e_i, e_j)$. ■

Cvičení. Složky n-formy ϵ zadané determinantem jsou (ve standardní bázi prostoru $\boldsymbol{R}^n$)

$$\epsilon_{i_1 \dots i_n} = \begin{cases} \operatorname{sgn}(i_1, \dots, i_n) & \text{jsou-li } i_1, \dots, i_n \text{ po dvou různá čísla,} \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Tvrzení 10.0.3. *Buď V konečněrozměrný vektorový prostor s bází $(e_1, \dots, e_n)$, buď f p-lineární forma na V, která má vzhledem k uvedené bázi složky $f_{i_1 \dots i_p}$. Buďte $u_1, \dots, u_p$ libovolné vektory, které mají v bázi $(e_1, \dots, e_n)$ souřadnice po řadě $(x_1^1, \dots, x_1^n), \dots, (x_p^1, \dots, x_p^n)$. Pak platí*

$$f(u_1, \dots, u_p) = f_{i_1 \dots i_p} x_1^{i_1} \cdots x_p^{i_p}. \tag{11}$$

Důkaz.

$$\begin{aligned} f(u_1, \dots, u_p) &= f(x_1^{i_1} e_{i_1}, \dots, x_p^{i_p} e_{i_p}) = x_1^{i_1} \cdots x_p^{i_p} f(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}) \\ &= f_{i_1 \dots i_p} x_1^{i_1} \cdots x_p^{i_p} \end{aligned}$$ □

Při změně báze $(e_1, \dots, e_n)$ se mění i složky $f_{i_1 \dots i_p}$.

Tvrzení 10.0.4. *Buď Q matice přechodu od báze $(e_1, \dots, e_n)$ k bázi $(e'_1, \dots, e'_n)$. Složky p-lineární formy f vzhledem k bázi $(e_1, \dots, e_n)$ buďte $f_{i_1 \dots i_p}$, složky téže formy vzhledem k bázi $(e'_1, \dots, e'_n)$ buďte $f'_{i_1 \dots i_p}$. Pak platí*

$$f'_{i_1 \dots i_p} = Q_{i_1}^{j_1} \cdots Q_{i_p}^{j_p} f_{i_1 \dots i_p}. \tag{12}$$

Důkaz. Cvičení. □

Ve fyzice se obvykle zavádí kovariantní tenzorové pole jako soubor n^p funkcí $f_{i_1 \dots i_p}$, jež se při změně báze transformují podle formule (12). Takový soubor funkcí určuje p-lineární zobrazení vztahem (11).

Množinu všech p-lineárních forem na vektorovém prostoru V označujeme $T_p V$. Zaveďme algebraické operace s p-lineárními formami.

Definice. Buďte f a g p-lineární formy. *Součet* forem f a g definujeme jako zobrazení $f + g \colon V^p \to \boldsymbol{R}$ zadané předpisem

$$(f + g)(u_1, \dots, u_p) = f(u_1, \dots, u_p) + g(u_1, \dots, u_p).$$

Je-li $a \in \boldsymbol{R}$ skalár, definujeme *a-násobek* formy f jako zobrazení $af \colon V^p \to \boldsymbol{R}$ zadané předpisem

$$(af)(u_1, \dots, u_p) = af(u_1, \dots, u_p).$$

Snadno se ověří (cvičení), že $f + g$ a af jsou zase p-lineární formy. Dokonce jsou splněny axiomy vektorového prostoru:

Důsledek. *Množina $T_p V$ všech p-lineárních forem na prostoru V je vektorový prostor vzhledem ke sčítání forem a násobení skalárem.*

Definice. *Tenzorový součin* forem $f \in T_p V$ a $g \in T_q V$ definujeme jako zobrazení $f \otimes g \colon V^{p+q} \to \boldsymbol{R}$ zadané předpisem

$$(f \otimes g)(u_1, \dots, u_{p+q}) = f(u_1, \dots, u_p) \cdot g(u_{p+1}, \dots, u_{p+q}).$$

Snadno se ověří (cvičení), že tenzorový součin p-lineární formy a q-lineární formy je $(p + q)$-lineární forma.

Tvrzení 10.0.5. *Nechť $f \in T_p V, g \in T_q V, h \in T_r V, a \in \boldsymbol{R}$. Pak platí:*
(1) $(f \otimes g) \otimes h = f \otimes (g \otimes h)$;
(2) $(f + g) \otimes h = f \otimes h + g \otimes h$;
(3) $f \otimes (g + h) = f \otimes g + f \otimes h$;
(4) $(af) \otimes h = a(f \otimes h) = f \otimes (ah)$.

Důkaz. Cvičení. □

Obecně však tenzorový součin není komutativní: $f \otimes g \neq g \otimes f$.

Cvičení. Dokažte formule pro složky:

$$\begin{aligned} (f + g)_{i_1 \dots i_p} &= f_{i_1 \dots i_p} + g_{i_1 \dots i_p}, \\ (f \otimes g)_{i_1 \dots i_{p+q}} &= f_{i_1 \dots i_p} \cdot g_{i_{p+1} \dots i_{p+q}}. \end{aligned}$$

Prostor T_1V se alternativně označuje V^* a nazývá se *duální* prostor k prostoru V. Ukážeme, že s každou bází prostoru V je spojena jistá báze prostoru V^*.

Buď $(e_1, \dots, e_n)$ nějaká báze prostoru V. Souřadnice vektoru $x \in V$ v bázi $(e_1, \dots, e_n)$ označme $(x^1, \dots, x^n)$ (pak platí $x = x^j e_j$). Pro $1 \le i \le n$ zaveďme zobrazení $e^i \colon V \to \boldsymbol{R}$ předpisem $x \mapsto x^i$. To jest,

$$e^i(x^j e_j) = x^i.$$

Zobrazení e^i jsou lineární (cvičení), a proto $e^i \in V^*$. Máme

$$e^i(e_j) = \delta^i_j,$$

kde δ^i_j je známé Kroneckerovo delta:

$$\delta^i_j = \begin{cases} 1 & \text{je-li } i = j, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Tvrzení 10.0.6. *Buď $(e_1, \dots, e_n)$ báze prostoru V, buď $f \in V^*$ libovolná 1-forma se složkami $f_i = f(e_i)$. Pak*

$$f = f_i e^i.$$

Důkaz. Podle formule (11) je $f(x) = f(x^i e_i) = x^i f_i = f_i e^i(x) = (f_i e^i)(x)$. □

Tvrzení 10.0.7. *Buď $(e_1, \dots, e_n)$ báze prostoru V. Pak formy $e^1, \dots, e^n$ tvoří bázi prostoru V^*.*

Důkaz. Podle předchozího tvrzení je každá 1-forma f lineární kombinací 1-forem e^i (koeficienty jsou složky f_i). Tudíž, formy e^i generují V^*.

Zároveň jsou nezávislé: Nechť $c_i e^i = 0$ pro nějaké koeficienty $c_i \in \boldsymbol{R}$. Dosazením e_j obdržíme $0 = c_i e^i(e_j) = c_j$. □

Báze $(e^1, \dots, e^n)$ se nazývá *duální* k bázi $(e_1, \dots, e_n)$.

Důsledek. *Je-li prostor V konečněrozměrný, pak* $\dim V^* = \dim V$.

Podobně najdeme báze v prostorech T_pV.

Tvrzení 10.0.8. *Buď $(e_1, \dots, e_n)$ báze prostoru V, buď $f \in T_pV$ libovolná p-forma se složkami $f_{i_1 \dots i_p} = f(e_{i_1}, \dots, e_{i_p})$. Pak*

$$f = f_{i_1 \dots i_p} e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_p}.$$

Důkaz. Podle formule (11) je opět

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_p) &= f(x_1^{i_1} e_{i_1}, \dots, x_p^{i_p} e_{i_p}) = x_1^{i_1} \cdots x_p^{i_p} f_{i_1 \dots i_p} \\ &= f_{i_1 \dots i_p} e^{i_1}(x_1) \cdots e^{i_p}(x_p) \\ &= (f_{i_1 \dots i_p} e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_p})(x_1, \dots, x_p). \end{aligned}$$ □

Tvrzení 10.0.9. *Buď $(e_1, \dots, e_n)$ báze prostoru V. Pak formy $e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_p}$ tvoří bázi prostoru T_pV.*

Důkaz. Podle předchozího tvrzení je každá p-forma f lineární kombinací p-forem $e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_p}$ (koeficienty jsou složky $f_{i_1 \dots i_p}$). Tudíž, formy $e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_p}$ generují T_pV.

Zároveň jsou nezávislé: Nechť $c_{i_1 \dots i_p} e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_p} = 0$ pro nějaké koeficienty $c_{i_1 \dots i_p} \in \boldsymbol{R}$. Dosazením $e_{j_1}, \dots, e_{j_p}$ obdržíme $0 = c_{i_1 \dots i_p} e^{i_1}(e_{j_1}) \cdots e^{i_p}(e_{j_p}) = c_{j_1 \dots j_p}$. □

Důsledek. *Je-li prostor V konečněrozměrný, pak* $\dim T_p V = (\dim V)^p$.

Literatura

[Marvan] M. Marvan, Algebra I a II, Učební texty Matematického ústavu v Opavě, Slezská univerzita v Opavě, dostupné na https://www.slu.cz/math/cz/knihovnaucebnitextymu.