ALGEBRAICKÉ VLASTNOSTI MATIC

Mějme matice A, B typu $m \times n$.

SOUČET matice A, B je matice C typu $m \times n$ taková, že $C_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$.

Př.: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

α-NÁSOBEK matice A je matice C taková, že

$$C_{ij} = \alpha A_{ij}.$$

Př.: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\alpha = 3$

$$\alpha \cdot A = C = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 9 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

A, $\alpha = -1$

$-1 \cdot A = -A$ je OPAČNÁ matice k matici A

$A + (-A) = O$ ... nulová matice

Tvrzení: nechť A, B, C matice nad polem P stejného typu. Potom platí:

1) $A+B=B+A$
2) $A+(B+C)=(A+B)+C$
3) $A+O=A$
4) $A+(-A)=O$
5) $1\cdot A=A$
6) $c\cdot(A+B)=cA+cB$
7) $(c+b)A=cA+bA$
8) $c(bA)=(cb)A$

Mějme matici A typu $r \times s$ a matici B typu $s \times t$ nad polem P.
SOUČIN matic A, B je matice $A \cdot B$ typu $r \times t$ daná předpisem

$$(A\cdot B)_{kl} = A_{k1} B_{1l} + A_{k2} B_{2l} + \dots + A_{ks} B_{sl} =$$

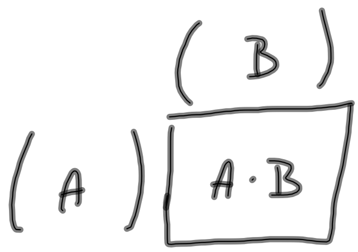
$$= \sum_{i=1}^{s} A_{ki} B_{il}$$

<u>Příklad</u> $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1\cdot 2 + 2\cdot(-1) & 1\cdot 0 + 2\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$(A\cdot B)_{11} = A_{11} B_{11} + A_{12} B_{21}$$

$$(A\cdot B)_{12} = A_{11} B_{12} + A_{12} B_{22}$$



$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ & & \\ & & \end{pmatrix} = A \cdot B$$

Násobení matic není komutativní.

<u>Tvrzení</u> Nechť A, B, C jsou matice nad polem P. Pak platí:

1) $A(BC) = (AB)C$

2) $AE = EA = A$

3) $A(B+C) = AB + AC$

4) $(A+B)C = AC + BC$

INVERZNÍ MATICE

Buď A čtvercová matice nad polem P. Matice X stejného typu taková, že $A\cdot X = X\cdot A = E$, se nazývá INVERZNÍ matice k matici A, označuje se A^{-1}.

Matice, k níž existuje inverzní matice, se nazývá INVERTIBILNÍ.

Příklad: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$$A\cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E, \quad X\cdot A = E. \quad X = A^{-1}$$

Tvrzení: Ke každé matici existuje nejvýše jedna inverzní matice.

Důkaz: Předp., že B', B'' jsou inverzní matice k matici A. $\Rightarrow A\cdot B' = B'\cdot A = E = B''\cdot A = A\cdot B''$.

$$B' = E\cdot B' = \underbrace{B''\cdot A}_{E}\cdot B' = B''\cdot E = B''. \quad \square$$

<u>Tvrzení</u> Nechť A, B jsou invertibilní matice takové, že $A \cdot B = E$. Potom $A = B^{-1}$ a $B = A^{-1}$.

<u>Důkaz</u> $B = E \cdot B = A^{-1} A \cdot B = A^{-1} \cdot E = A^{-1}$,

$$A = AE = A \cdot B \cdot B^{-1} = E \cdot B^{-1} = B^{-1}. \qquad \square$$

<u>Tvrzení</u> Nechť A, B jsou invertibilní matice.

1) $A \cdot B$ je invertibilní a $(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

2) A^{-1} je invertibilní a $(A^{-1})^{-1} = A$.

<u>Důkaz</u> 1) $E = \underbrace{A \cdot B} \cdot \underbrace{B^{-1} \cdot A^{-1}} \Rightarrow (A \cdot B) = B^{-1} \cdot A^{-1}$

2) $E = A \cdot A^{-1} \Rightarrow (A^{-1})^{-1} = A$. $\square$

ELEMENTÁRNÍ MATICE

$$E_{ij}(c) = \begin{array}{c} \left(\begin{matrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & & & \\ 0 & \cdots & 0\,1\,0 & \cdots & 0\,c\,0 & \cdots & & 0 \\ \vdots & & & & & & & \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0\,1\,0 & \cdots & & 0 \\ \vdots & & & & & & & \\ 0 & \cdots & & & & & 0 & 1 \end{matrix}\right) \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ i\text{-tý řádek} \\ \\ j\text{-tý řádek} \\ \\ i \neq j \end{array}$$

$$E_i(c) = \left(\begin{matrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & 0 & \\ & & c & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{matrix}\right) \begin{array}{l} \\ \\ i\text{-tý řádek} \\ \\ \\ \end{array}, \quad c \neq 0$$

$$E_{ij} = \left(\begin{matrix} 1 & & & 0 & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ \cdots & & 0 & \cdots & 1 & \cdots \\ 0 & & & \ddots & & 0 \\ \cdots & & 1 & \cdots & 0 & \cdots \\ & & & & & \ddots \\ 0 & & 0 & & & 1 \end{matrix}\right) \begin{array}{l} \\ \\ i\text{-tý řádek} \\ \\ j\text{-tý řádek} \\ \\ \\ \end{array}$$

Tvrzení Buďte A, A' matice stejného typu. Následující výroky jsou ekvivalentní:

1) A' vznikne z A jednou elementární řádkovou úpravou

2) existuje elementární matice Q taková, že $A' = Q \cdot A$.

Tvrzení Čtvercová matice je invertibilní právě tehdy, když je řádkově ekvivalentní s jednotkovou maticí.

Nalezení inverzní matice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$(A|E) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \qquad A^{-1} = \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}}_{A^{-1}}$$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ není invertibilní.