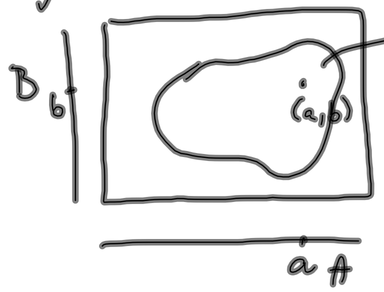
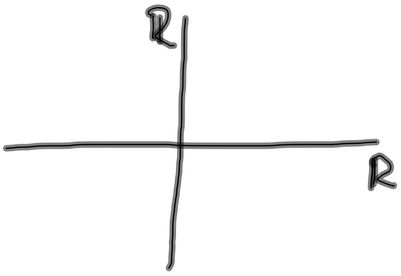
Kartézký součin $A \times B$



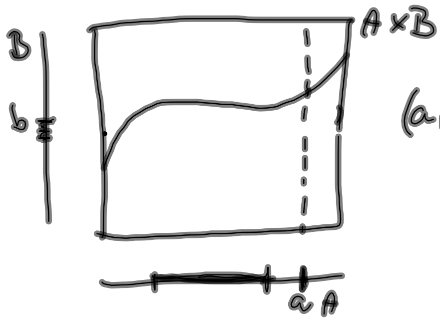
$\rho \subset A \times B$

$(a,b) \in \rho \Leftrightarrow a \rho b$

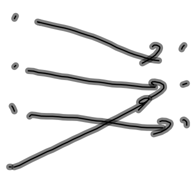


Zobrazení

$f : A \longrightarrow B \qquad \forall a \in A \ \exists !\, b \in B : (a,b) \in f$



$(a,b) \in f \Leftrightarrow f(a) = b$



$f : A \longrightarrow B, \ g : B \longrightarrow C$

$g \circ f : A \longrightarrow C \qquad g \circ f \subset A \times C$

$\{(a,c) \in A \times C \mid \exists b \in B : (a,b) \in f, (b,c) \in g\}$

$f(a) = b \quad g(b) = c$

Relace ekvivalence

$\rho \subset A \times A$ je

- REFLEXIVNÍ $\forall a \in A$ platí $a \rho a$
- SYMETRICKÁ $a \rho b \Rightarrow b \rho a$
- TRANZITIVNÍ $(a \rho b \wedge b \rho c) \Rightarrow a \rho c$

Relace, která má tyto 3 vlastnosti, se nazývá RELACE EKVIVALENCE.

POLE

Množina P

a) $P\times P \to P$, $(a,b)\mapsto a+b$

b) $P\times P \to P$, $(a,b)\mapsto a\cdot b$

c) $0,1\in P$, $0\neq 1$

d) $P\to P$, $a\mapsto -a$

e) $P\setminus\{0\}\to P\setminus\{0\}$, $a\mapsto a^{-1}$

$\forall a,b,c\in P$

1) $a+b=b+a$

2) $a+(b+c)=(a+b)+c$

3) $a+0=a$

4) $a+(-a)=0$

5) $a\cdot b=b\cdot a$

6) $a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$

7) $a\cdot 1=a$

8) $a\neq 0 \Rightarrow a\cdot a^{-1}=1$

9) $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$

Pak P je POLE.

MATICE

MATICE TYPU $r \times s$ (r/s) nad polem P je tabulka o r řádcích a s sloupcích obsahující prvky pole P.

$$A : \{1, \dots, r\} \times \{1, \dots, s\} \longrightarrow P$$

$$\{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\} \longrightarrow P$$

$$A : (i,j) \longmapsto A_{ij} \in P \quad (a_{ij},\ a^i_j)$$

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2s} \\ \vdots & & & \\ A_{r1} & A_{r2} & \dots & A_{rs} \end{pmatrix}$$

Př. Nulová matice $A_{ij} = 0 \ \forall i, \forall j$

čtvercová matice $r = s$

Jednotková matice je čtvercová a taková, že

$$A_{ii} = 1 \quad \text{a} \quad A_{ij} = 0 \text{ pro } i \neq j$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Elementární úpravy

Elementární řádkové úpravy:

1) výměna dvou řádků
2) vynásobení řádku nenulovým číslem
3) přičtení nějakého násobku jednoho řádku k jinému řádku

$A_{i1}\ A_{i2} \dots A_{is}$

$A_{j1}\ A_{j2} \dots A_{js}$

Přičtením c-násobku i-tého řádku k j-tému řádku bude j-tý řádek vypadat takto:

$$A_{j1} + cA_{i1} \quad A_{j2} + cA_{i2} \quad \dots \quad A_{js} + cA_{is}$$

Elementární sloupcové úpravy ... analogicky.

Př.: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -2 & 2 \end{pmatrix} \overset{(-2)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -6 & 0 \end{pmatrix}$

Matice A, B jsou ŘÁDKOVĚ EKVIVALENTNÍ, jestliže B obdržíme z A konečnou posloupností elementárních řádkových úprav. Ozn. $A \sim B$.

Matice ve schodovitém tvaru

1) každý nenulový řádek, kromě prvního, začíná zleva více nulami než řádek předchozí

2) za nulovým řádkem následují jen nulové řádky

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

nejlevější nenulový prvek každého řádku se nazývá HLAVNÍ PRVEK tohoto řádku.

Matice je v Gauss-Jordanově tvaru, je-li ve schodovitém tvaru a navíc

3) hlavní prvek každého nenulového řádku je 1

4) všechny prvky ve sloupci nad (nejen pod) každým hlavním prvkem jsou 0.