HOMOMORFISMY

Buďte $(A,*)$, $(B,+)$ pologrupy.
Zobrazení $f: A \to B$ takové, že
$\forall a_1, a_2 \in A$ platí

$$f(a_1 * a_2) = f(a_1) + f(a_2),$$

se nazývá HOMOMORFISMUS POLOGRUP.
Značí se $f: (A,*) \to (B,+)$.

Buďte $(A,*,e_A)$, $(B,+,e_B)$ monoidy.
Zobrazení $f: A \to B$ takové, že je to homomorfismus pologrup $(A,*)$, $(B,+)$ a platí

$$f(e_A) = e_B,$$

se nazývá HOMOMORFISMUS MONOIDŮ.

$f: (A,*,e_A) \to (B,+,e_B)$.

Buďte $(A,*,e_A,{}^{-1})$, $(B,+,e_B,{}^{-1})$ grupy.
Zobrazení $f: A \to B$ takové, že je to homomorfismus monoidů $(A,*,e_A)$, $(B,+,e_B)$ a $\forall a \in A$ platí

$$f(a^{-1}) = (f(a))^{-1},$$

se nazývá HOMOMORFISMUS GRUP.

$f: (A,*,e_A,{}^{-1}) \to (B,+,e_B,{}^{-1})$.

Př: $(\mathbb{Z},+,0,-)$ grupa

$f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $n \mapsto 2n$.

$f: (\mathbb{Z},+,0,-) \to (\mathbb{Z},+,0,-)$ je homomorfismus grup

$$f(m+n) = f(m) + f(n)$$

$$2(m+n) = 2m + 2n$$

$$f(0) = 2 \cdot 0 = 0$$

$$f(-m) = -(f(m)) = -(2m) = -2m$$

$$2\cdot(-m) = -2m \quad \checkmark$$

__Tvrzení__ Buďte $f: A \to B$, $g: B \to C$ homomorfismy pologrup (monoidů, grup). Pak složení $g \circ f: A \to C$ je homomorfismus pologrup (monoidů, grup).

__Tvrzení__ Buďte $(A, *, e_A, {}^{-1})$, $(B, +, e_B, {}^{-1})$ grupy. Buď $f: A \to B$ homomorfismus pologrup $(A, *) \to (B, +)$. Pak f je homomorfismus grup $(A, *, e_A, {}^{-1}) \to (B, +, e_B, {}^{-1})$.

IZOMORFISMY

IZOMORFISMUS pologrup (monoidů, grup) A, B je homomorfismus $f: A \to B$ pologrup (monoidů, grup), který je bijektivní.

Tvrzení Buďte $f: A \to B$ izomorfismy pologrup (monoidů, grup). Pak $f^{-1}: B \to A$ je také izomorfismus pologrup (monoidů, grup).

Př.: 1) Identické zobrazení je izomorfismus.

2) Označme $\mathbb{R}_{>0} := \{r \in \mathbb{R} \mid r > 0\}$. Pak $(\mathbb{R}_{>0}, \cdot, 1, ^{-1})$ je grupa.

Zobrazení $\exp: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$, $x \mapsto e^x$, je homomorfismus grup $(\mathbb{R}, +, 0, -) \to (\mathbb{R}_{>0}, \cdot, 1, ^{-1})$, protože $\forall x, y \in \mathbb{R}$ platí

$$\exp(x+y) = e^{x+y} = \exp(x) \cdot \exp(y) = e^x \cdot e^y.$$

a je to bijekce.

Řekneme, že pologrupy (monoidy, grupy) A, B jsou IZOMORFNÍ, jestliže existuje izomorfismus $A \to B$. Zapisujeme $A \cong B$.

<u>Tvrzení</u> Pro libovolné pologrupy (monoidy, grupy) A, B, C platí

i) $A \cong A$

ii) $A \cong B$, pak $B \cong A$

iii) $A \cong B$, $B \cong C \Rightarrow A \cong C$

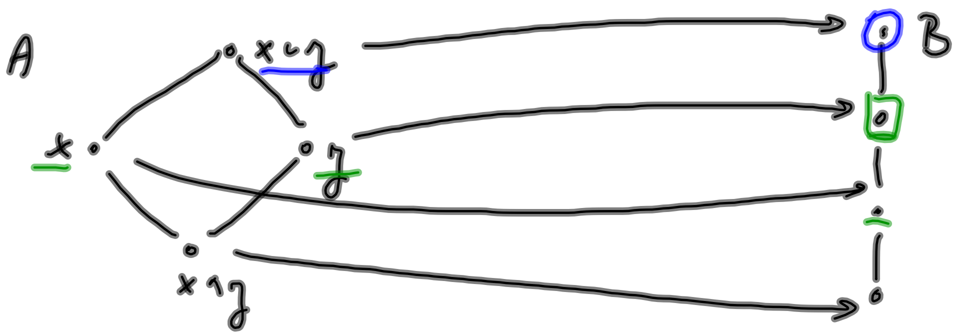
HOMOMORFISMY OKRUHŮ, POLÍ

HOMOMORFISMY SVAZŮ

Buďte $(X, \wedge, \vee)$, $(Y, \wedge, \vee)$ svazy. Zobrazení $f : X \to Y$ se nazývá HOMOMORFISMUS SVAZŮ, jestliže $\forall\, a, b \in X$ platí
$f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b)$, $f(a \vee b) = f(a) \vee f(b)$.

Tvrzení: Homomorfismus svazů je izotonní zobrazení.

Př.: Zobrazení f



f je izotonní

$$f(x \vee y) \neq f(x) \vee f(y)$$

f není homomorfismus svazů