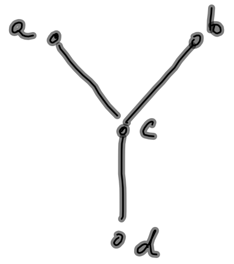
USPOŘÁDÁNÍ



$a \geq a$

$a \geq c$

$a \geq d$

Buď $(M, \leq)$ usp. množina. Prvek $x \in M$ se nazývá

- NEJMENŠÍ, je-li $x \leq a \ \forall a \in M$,
- NEJVĚTŠÍ, je-li $a \leq x \ \forall a \in M$,
- MAXIMÁLNÍ, neexistuje-li $a \in M$ tak, že $a > x$,
- MINIMÁLNÍ, neexistuje-li $a \in M$ tak, že $x > a$

V každé uspořádané množině existuje nejvýše jeden největší prvek a nejvýše jeden nejmenší prvek.

Existuje-li nejmenší prvek, pak je jediným minimálním prvkem.
Existuje-li největší prvek, pak je jediným maximálním prvkem.

Buď $(M, \leq)$ usp. množina, $A \subseteq M$.
Prvek $x \in M$ se nazývá

- DOLNÍ ZÁVORA množiny A, je-li $x \leq a$ pro všechna $a \in A$.
- HORNÍ ZÁVORA množiny A, je-li $x \geq a$ pro všechna $a \in A$.
- SUPREMUM množiny A, je-li x nejmenší prvek množiny všech horních závor množiny A.
- INFIMUM množiny A, je-li x největší prvek množiny všech dolních závor množiny A.

Př.: $M = \mathbb{R}$, $A = (0;1)$

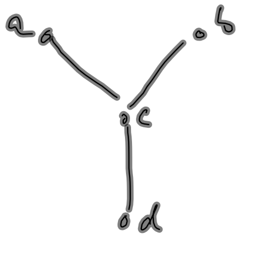
množina dolních závor mn. $A = (-\infty; 0]$

množina horních závor mn. $A = [1; \infty)$

$\sup A = 1$

$\inf A = 0$.

Př.:

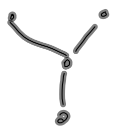


$\inf\{a,b\} = c$

$\{a,b\}$ nemá supremum

SVAZY

Buď $(M, \leq)$ usp. množina. Nechť pro každé dva prvky $x, y \in M$ existuje $\inf\{x,y\}$ a $\sup\{x,y\}$. Pak říkáme, že M je SVAZOVĚ USPOŘÁDANÁ MNOŽINA.

Př.:  není svazově uspořádaná

Př.: Buď M množina. Označme $P(M)$ množinu všech podmnožin množiny M.
Pak $(P(M), \subseteq)$ je svazově uspořádaná množina.
$\forall A, B \in P(M)$ množina horních závor mn. $\{A,B\}$ je rovna množině všech nadmnožin mn. A, B.

$\sup\{A,B\} = A \cup B.$

$\inf\{A,B\} = A \cap B.$

<u>Tvrzení</u> Buď $(M, \leq)$ svazově uspořádaná množina. Označme $x \vee y := \sup\{x,y\}$, $x \wedge y := \inf\{x,y\}$.

Pak

$$\begin{array}{ll} x \vee x = x & x \wedge x = x \\ x \vee y = y \vee x & x \wedge y = y \wedge x \\ x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z & x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z \\ x \vee (y \wedge x) = x & x \wedge (y \vee x) = x \end{array} \qquad (*)$$

pro libovolná $x, y, z \in M$.

Algebraická struktura $(M, \wedge, \vee)$ se dvěma binárními operacemi $\wedge$ a $\vee$ se nazývá SVAZ, jestliže jsou splněny podmínky $(*)$.

Binární operace $\wedge$ se nazývá PRŮSEK,
binární operace $\vee$ se nazývá SPOJENÍ.

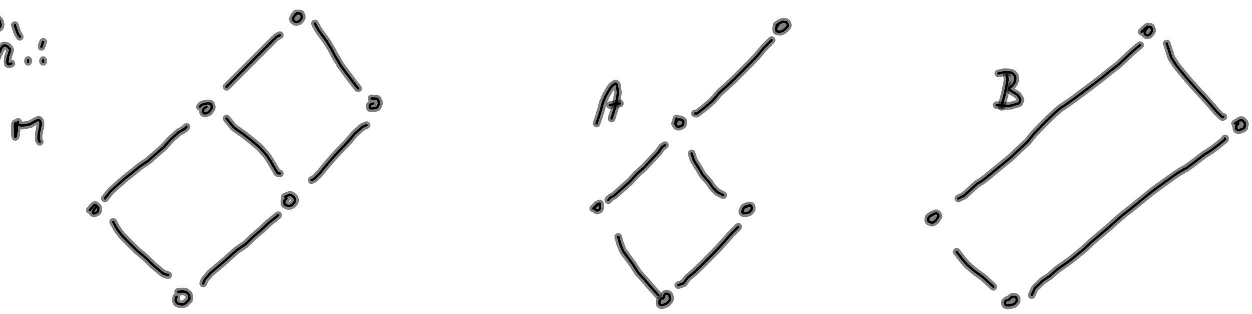
Buď $(M, \wedge, \vee)$ svaz.
Položme $x \leq_\wedge y$ právě tehdy, když $x \wedge y = x$. Pak $\leq_\wedge$ je svazové uspořádání a platí $\sup\{x,y\} = x \vee y$, $\inf\{x,y\} = x \wedge y$.

<u>Tvrzení</u> Pro každé tři prvky x, a, b svazu L platí

1) jestliže $a \leq b$, pak $a \wedge x \leq b \wedge x$,
2) jestliže $a \leq b$, pak $a \vee x \leq b \vee x$,
3) jestliže $x \leq a$, $x \leq b$, pak $x \leq a \wedge b$,
4) jestliže $x \geq a$, $x \geq b$, pak $x \geq a \vee b$.

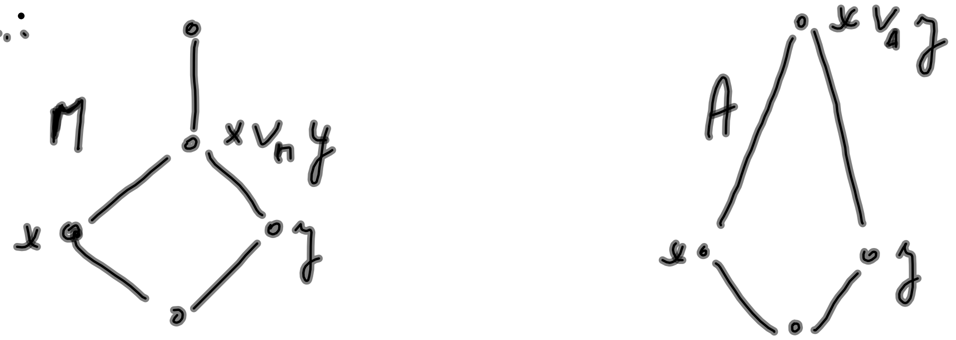
PODSVAZ svazu $(M, \wedge, \vee)$ je podmnožina $A \subseteq M$ taková, že pro každé $x, y \in A$ platí $x \wedge y \in A$ a $x \vee y \in A$.

Př.:



A, B jsou podsvazy svazu M.

Př.:



ÚPLNÉ SVAZY

Svaz L je ÚPLNÝ, má-li každá podmnožina v L supremum i infimum.

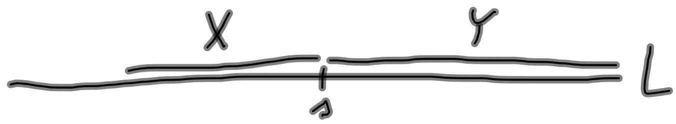
Př.: 1) Každý konečný svaz je úplný.

2) $(P(M), \subseteq)$ je úplný svaz. Infima jsou průniky, suprema jsou sjednocení.

3) $(\mathbb{N}, \leq)$ není úplný svaz. Např. $\mathbb{N}$ nemá supremum.

<u>Tvrzení</u> Buď L uspořádaná množina, jejíž každá podmnožina má infimum. Pak L je úplný svaz.

<u>Důkaz</u> Buď $X \subseteq L$. Označme Y množinu všech horních závor mn. X. Položme $s = \inf Y$ a dokážeme, že $s = \sup X$.



Buď $x \in X$ libovolné. Pro každé $y \in Y$ platí $y \geq x$. Tedy x je dolní závora množiny Y a $x \leq s$. To znamená $s \in Y$. Protože $s = \inf Y$, je s nejmenší prvek množiny Y. Tedy $s = \sup X$.

IZOTONNÍ ZOBRAZENÍ

Buďte $(M,\le)$, $(N,\le)$ uspořádané množiny.

Zobrazení $f: M \to N$ se nazývá IZOTONNÍ, jestliže platí $\forall a,b \in M$

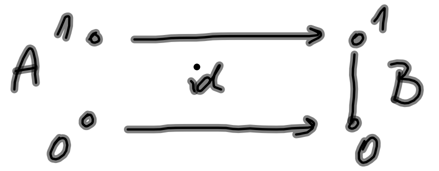
$$a \le b \Rightarrow f(a) \le f(b).$$

Je-li zobrazení f bijektivní a f i f^{-1} jsou izotonní, pak f je IZOMORFISMUS uspořádaných množin a usp. mn. $(M,\le)$, $(N,\le)$ jsou IZOMORFNÍ.

Př.: $id : (\mathbb{N}, |) \longrightarrow (\mathbb{N}, \le)$ je izotonní zobrazení.

$id : (\mathbb{N}, \le) \longrightarrow (\mathbb{N}, |)$ není izotonní zobrazení.

Př.: $A = B = \{0, 1\}$



id je izotonní bijekce.

$id : B \to A$ není izotonní.