EUKLEIDŮV ALGORITMUS

VSTUP: nenulové polynomy $f, g \in P[x]$

Sestavíme posloupnost polynomů

$r_0, r_1, r_2, \dots,$

kde $r_0 = f$, $r_1 = g$ a jsou-li známy členy r_i, r_{i+1}, pak r_{i+2} získáme neúplným dělením polynomu r_i polynomem r_{i+1}:

$$r_i = r_{i+1} q_i + r_{i+2}, \quad r_{i+2} = 0 \text{ nebo } \deg r_{i+2} < \deg r_{i+1},$$

pro všechna $i = 0, \dots, N-2$.

VÝSTUP: polynom $r_{N-1} \neq 0$ takový, že $r_N = 0$.

<u>Tvrzení</u> Rovnosti $r_N = 0$ je dosaženo po konečném počtu kroků a platí

$$r_{N-1} = D(f, g).$$

REDUCIBILNÍ polynom je nekonstantní polynom, který je součinem dvou nekonstantních polynomů.
IREDUCIBILNÍ polynom je nekonstantní polynom, který není reducibilní.

Tvrzení Buď $f \in P[x]$ normovaný polynom. Pak existují normované ireducibilní polynomy $g_1, \dots, g_n$ takové, že $f = g_1 \cdots g_n$.
Tento rozklad je jediný.

Příklad $x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$

$x^2+1 \in \mathbb{R}[x]$ ireducibilní

$x^2+1 \in \mathbb{C}[x]$ $\quad x^2+1 = (x+i)(x-i)$ $\quad i^2 = -1$

KOŘENY

Buď $f \in P[x]$ a $\xi \in P$. Pokud $f(\xi) = 0$, ξ je KOŘEN polynomu f.

nenulový polynom

Tvrzení Buď $f \in P[x]$ a $\xi \in P$. Následující podmínky jsou ekvivalentní.

(1) ξ je kořen polynomu f.

(2) $(x-\xi) \mid f$.

Prvek $\xi \in P$ se nazývá ASPOŇ k-NÁSOBNÝ KOŘEN polynomu $f \in P[x]$, jestliže platí $(x-\xi)^k \mid f$.

Prvek $\xi \in P$ se nazývá k-NÁSOBNÝ KOŘEN polynomu $f \in P[x]$, jestliže $(x-\xi)^k \mid f$, ale neplatí $(x-\xi)^{k+1} \mid f$.

Základní věta algebry

Každý nekonstantní polynom $f \in \mathbb{C}[x]$ má aspoň jeden kořen.

Tvrzení (Viètovy vzorce)
Buď $f = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{C}[x]$ normovaný polynom a $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ jeho kořeny (nemusí být všechny různé). Potom

$$a_{n-1} = -\sum_{i=1}^{n} \xi_i$$

$$a_{n-2} = \xi_1\xi_2 + \xi_1\xi_3 + \dots + \xi_1\xi_n + \xi_2\xi_3 + \dots + \xi_2\xi_n + \dots + \xi_{n-1}\xi_n = \sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{n} \xi_i \xi_j$$

$$\vdots$$

$$a_0 = (-1)^n \xi_1 \xi_2 \cdots \xi_n$$

Příklad $x^2 - 5x + 6$

$n = 2$, $a_1 = -5$, $a_0 = 6$

$a_1 = -(\xi_1 + \xi_2)$, $a_0 = \xi_1 \xi_2$

$\xi_1 = 2$, $\xi_2 = 3$.

Tvrzení Buďte $f = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ polynom s celočíselnými koeficienty a p, q nesoudělná celá čísla. Jestliže $\frac{p}{q}$ je kořenem polynomu f, potom a_0 je dělitelné p a a_n je dělitelné q.

Hornerovo schéma pro hledání kořenů polynomů.

Mějme polynom $f = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{C}[x]$.

Polynom $f' = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \dots + a_1 \in \mathbb{C}[x]$

se nazývá DERIVACE polynomu f.

Tvrzení (1) $(f+g)' = f' + g'$

(2) $(fg)' = f'g + fg'$

(3) $(f^k)' = k f^{k-1} f'$.

Tvrzení Buď $k \geq 2$, $f \in \mathbb{C}[x]$ a $\xi \in \mathbb{C}$ je jeho k-násobný kořen. Potom

1) ξ je $(k-1)$-násobný kořen f',

2) ξ je $(k-1)$-násobný kořen největšího společného dělitele polynomů f, f' ($D(f,f')$).

Tvrzení Buď $f \in \mathbb{C}[x]$ a $\xi \in \mathbb{C}$ jeho kořen. Potom ξ je 1-násobný kořen polynomu

$$\frac{f}{D(f,f')} \in \mathbb{C}[x]$$

Důsledek Buď $f \in \mathbb{C}[x]$.

1) množina všech kořenů polynomu $\frac{f}{D(f,f')}$ je rovna množině všech kořenů polynomu f.

2) Všechny kořeny polynomu $\frac{f}{D(f,f')}$ jsou 1-násobné.

Polynomy s reálnými koeficienty

Mějme polynom $f = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{C}[x]$.

Přiřadíme mu polynom $f^* = a_n^* x^n + \dots + a_1^* x + a_0^* \in \mathbb{C}[x]$.

$z \in \mathbb{C}$, $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$

$$z^* = a - bi$$

Tvrzení 1) $(f+g)^* = f^* + g^*$

2) $(fg)^* = f^* g^*$.

Tvrzení Buď $f \in \mathbb{R}[x]$ a $\xi \in \mathbb{C}$ je jeho kořen. Pak komplexně sdružené číslo ξ^* je také kořen stejné násobnosti.

Tvrzení Každý polynom $f \in \mathbb{R}[x]$ lichého stupně má aspoň jeden reálný kořen.
