POLYNOMY

Buď P pole (např. $\mathbb{R}$), $n \in \mathbb{N}$, $a_1, \dots, a_n \in P$, $x \notin P$. POLYNOM jedné neurčité x nad polem P je výraz tvaru

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 .$$

Množina všech polynomů neurčité x nad polem P se označuje $P[x]$.

a_0 se nazývá ABSOLUTNÍ ČLEN.

Polynom se všemi koeficienty nulovými se nazývá NULOVÝ POLYNOM (ozn. 0).

STUPEŇ polynomu $f = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ je největší číslo r takové, že $a_r \neq 0$. Značí $\deg f$.

Koeficient a_r se nazývá VEDOUCÍ KOEFICIENT, značí se $a_r = \operatorname{lc} f$.

Když $f = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \in P[x]$ a $\xi \in P$, položíme $f(\xi) = a_n \xi^n + a_{n-1} \xi^{n-1} + \dots + a_1 \xi + a_0 \in P$.

Prvek $\xi \in P$ se nazývá KOŘEN polynomu $f \in P[x]$, jestliže $f(\xi) = 0$.

Buďte $f = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ a $g = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0$ polynomy $\in P[x]$.

Položme $p = \max\{m, n\}$ a pro $k \in \{0, \dots, p\}$ nechť

$$c_k = a_k + b_k .$$

SOUČET polynomů f, g je polynom

$$f + g = c_p x^p + \dots + c_1 x + c_0 .$$

Polynom OPAČNÝ k polynomu f je polynom

$$-f = -a_n x^n - a_{n-1} x^{n-1} - \dots - a_1 x - a_0 .$$

Položme $p = m + n$ a pro $k \in \{0, \dots, p\}$ nechť

$$c_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \dots + a_{k-1} b_1 + a_k b_0 = \sum_{i+j=k} a_i b_j .$$

SOUČIN polynomů f, g je polynom

$$f \cdot g = fg = c_p x^p + c_{p-1} x^{p-1} + \dots + c_1 x + c_0 .$$

Př.: $f = 3x + 2 \in \mathbb{R}[x] \ni g = x^2 + 3x - 1$.

$$f + g = (0+1)x^2 + (3+3)x + (2-1) = x^2 + 6x + 1$$

$$f \cdot g = (a_0 b_3 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_0) x^3 + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) x^2 +$$
$$+ (a_0 b_1 + a_1 b_0) x + a_0 b_0 =$$
$$= (2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 + 0 \cdot 3 + 0 \cdot (-1)) x^3 + (2 \cdot 1 + 3 \cdot 3 + 0 \cdot (-1)) x^2 +$$
$$+ (2 \cdot 3 + 3 \cdot (-1)) x + 2 \cdot (-1) = 3x^3 + 11x^2 + 3x - 2 .$$

<u>Tvrzení</u> Pro polynomy $f, g \in P[x]$ a lib. $\xi \in P$ platí

$$(f+g)(\xi) = f(\xi) + g(\xi)$$

$$(-f)(\xi) = -f(\xi)$$

$$(fg)(\xi) = f(\xi) \cdot g(\xi).$$

<u>Tvrzení</u> Buďte $f, g, h \in P[x]$. Potom

1) $f+g = g+f$
2) $f+(g+h) = (f+g)+h$
3) $f+0 = f$
4) $f+(-f) = 0$
5) $f \cdot g = g \cdot f$
6) $f \cdot (g \cdot h) = (f \cdot g) \cdot h$
7) $f \cdot 1 = f$
8) $f \cdot (g+h) = f \cdot g + f \cdot h$.

<u>Tvrzení</u> Součin nenulových polynomů f, g je nenulový polynom a platí

$$\deg(fg) = \deg f + \deg g$$

$$lc(fg) = lc\, f \cdot lc\, g.$$

<u>Tvrzení</u> Nechť $f, g, h \in P[x]$, $fg = fh$ a $f \neq 0$. Pak $g = h$.

Důkaz.

$$fg = fh \Rightarrow fg - fh = f(g-h) = 0$$

$$\Rightarrow g-h = 0 \Rightarrow g = h. \qquad \square$$

Polynom $g \in P[x]$ DĚLÍ polynom $f \in P[x]$, jestliže existuje polynom $h \in P[x]$ takový, že $f = g \cdot h$. Zapisujeme $g \mid f$. Říká se, že g je DĚLITEL polynomu f nebo že f je DĚLITELNÝ polynomem g.

Př.: $g = x+1$, $f = x^2-1$, $h = x-1$

$$g \cdot h = (x+1)(x-1) = x^2 - 1 = f .$$

Polynom $f \in P[x]$ se nazývá NORMOVANÝ, je-li $f \neq 0$ a $\operatorname{lc} f = 1$.

Je-li $f = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 \in P[x]$ s $\operatorname{lc} f = a_n \neq 0$, pak

$$\frac{f}{\operatorname{lc} f} = \frac{1}{a_n} \cdot f = x^n + \frac{a_{n-1}}{a_n} x^{n-1} + \ldots + \frac{a_1}{a_n} x + \frac{a_0}{a_n}$$

je normovaný polynom.

Lemma Buďte $f, g \in P[x]$ normované polynomy. Násl. podmínky jsou ekvivalentní:

1) $f \mid g$ a zároveň $g \mid f$.

2) $f = g$.

Buďte $f, g \in P[x]$ polynomy. Polynom $d \in P[x]$ se nazývá NEJVĚTŠÍ SPOLEČNÝ DĚLITEL polynomů f, g, jestliže

1) d je normovaný,
2) $d \mid f$ a $d \mid g$,
3) když $h \in P[x]$, $h \mid f$ a $h \mid g$, pak $h \mid d$.

Zapisujeme $d = D(f,g)$.

Tvrzení: Největší společný dělitel polynomů je jediný.

Polynomy $f, g \in P[x]$ takové, že $D(f,g) = 1$, se nazývají NESOUDĚLNÉ.

Tvrzení: Buďte $f, g \in P[x]$, $g \neq 0$. Pak existují polynomy $q, r \in P[x]$ tak, že

1) $f = g \cdot q + r$,
2) $r = 0$ nebo $\deg r < \deg g$.

Polynomy q, r jsou jednoznačně určeny.

Příklad $f = x^5 + 2x^3 + 7$, $g = x^3 - x^2 + 1$

$$(x^5+2x^3+7):(x^3-x^2+1) = \underbrace{x^2+x+3}_{q}$$
$$\underline{-(x^5-x^4+x^2)}$$
$$x^4+2x^3-x^2+7$$
$$\underline{-(x^4-x^3+x)}$$
$$3x^3-x^2-x+7$$
$$\underline{-(3x^3-3x^2+3)}$$
$$\underbrace{2x^2-x+4}_{r}$$

$$f = x^5+2x^3+7 = g\cdot q + r = (x^3-x^2+1)(x^2+x+3)+(2x^2-x+4) =$$
$$= x^5+x^4+3x^3-x^4-x^3-3x^2+x^2+x+3+2x^2-x+4 =$$
$$= x^5+2x^3+7$$

Tvrzení: Buďte $f, g \in P[x]$ nenulové polynomy. Pak existuje jejich největší společný dělitel d a polynomy $u, v \in P[x]$ tak, že $d = fu + gv$.