SOUSTAVY LINEÁRNÍCH ROVNIC

Nechť P je pole (např. $\mathbb{R}$).
Nechť $m, n, i, j \in \mathbb{N}$, $i \in \{1, \dots, m\}$, $j \in \{1, \dots, n\}$ a pro každé i, j nechť $a^i_j, b^i \in P$. Potom

$$
\begin{aligned}
a^1_1 x^1 + a^1_2 x^2 + \dots + a^1_n x^n &= b^1 \\
a^2_1 x^1 + a^2_2 x^2 + \dots + a^2_n x^n &= b^2 \\
&\vdots \\
a^m_1 x^1 + a^m_2 x^2 + \dots + a^m_n x^n &= b^m
\end{aligned}
$$

je SOUSTAVA m LINEÁRNÍCH ROVNIC O n NEZNÁMÝCH $x^1, \dots, x^n$.

$A = (a^i_j)$ je MATICE SOUSTAVY, $b = (b^i)$ je sloupec pravých stran, $\bar{A} = (a^i_j \mid b^i)$ je ROZŠÍŘENÁ MATICE SOUSTAVY, $x = (x^i)$ je sloupec neznámých.

$$A x = b.$$

n-tice $x_0 = (x_0^1, \dots, x_0^n)$ je ŘEŠENÍ soustavy, jestliže platí rovnost

$$A x_0^T = b.$$

Množina všech řešení soustavy lin. r. se nazývá OBECNÉ ŘEŠENÍ soustavy.
Soustavy lin. rovnic jsou EKVIVALENTNÍ, jestliže mají stejná obecná řešení.

<u>Věta</u> Elementární řádkové úpravy rozšířené matice soustavy nemění množinu všech řešení.

<u>Důkaz</u> Máme soustavu $Ax = b$.
Provedeme úpravu, tedy vynásobení elementární maticí U zleva. Dostaneme $UAx = Ub$.
Buď x_0 řešení původní soustavy, tedy $Ax_0 = b$.
$UAx_0 = Ub$.
Druhá inkluze analogicky. $\square$

<u>Frobeniova věta</u> Soustava lineárních rovnic má aspoň jedno řešení právě tehdy, když hodnost matice soustavy se rovná hodnosti rozšířené matice soustavy.

$$\left(\begin{array}{c|c} A & b \end{array}\right) \qquad \begin{array}{ccccc|c} \text{—} & \text{—} & \text{—} & \text{—} & \text{—} & - \\ & \text{—} & \text{—} & \text{—} & \text{—} & - \\ & & \text{—} & \text{—} & \text{—} & - \\ & & & & \text{—} & - \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & 0 \end{array}$$

HOMOGENNÍ SOUSTAVY LINEÁRNÍCH ROVNIC

Soustava se nazývá HOMOGENNÍ, pokud všechny pravé strany se rovnají 0, tedy $b = 0$.

<u>Věta</u> Lineární kombinace řešení homogenní soustavy je také řešení této soustavy.

<u>Důkaz</u> Nechť x_1, x_2 jsou řešení soustavy, $\alpha_1, \alpha_2 \in P$. $Ax_1^T = 0$, $Ax_2^T = 0$.

$$A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)^T = A(\alpha_1 x_1)^T + A(\alpha_2 x_2)^T =$$

$$= \alpha_1 \underbrace{A x_1^T}_{0} + \alpha_2 \underbrace{A x_2^T}_{0} = 0.$$

$\square$

FUNDAMENTÁLNÍ SYSTÉM ŘEŠENÍ je taková množina řešení homogenní soustavy rovnic, která je lin. nezávislá a každé řešení lze vyjádřit jako lin. kombinaci řešení z této množiny.

<u>Věta</u> Fundamentální systém řešení soustavy rovnic $Ax = 0$ o n neznámých má $n - \operatorname{rank} A$ prvků.

NEHOMOGENNÍ SOUSTAVY LINEÁRNÍCH ROVNIC

Buď $Ax = b$, potom $Ax = 0$ se nazývá HOMOGENIZOVANÁ SOUSTAVA.

<u>Věta</u> Nechť x_p je nějaké řešení soustavy $Ax = b$. Potom každé řešení x této soustavy lze psát ve tvaru $x = x_p + x_0$, kde x_0 je řešení homogenizované soustavy.

Množina všech řešení soustavy tedy je

$$\{x_p + x_0 \mid x_0 \text{ je řešení homogenizované soustavy}\}.$$

<u>Věta</u> Soustava $Ax = b$ s invertibilní maticí A má pro každou pravou stranu jediné řešení

$$x = A^{-1} b.$$

<u>Věta</u> (Cramerovo pravidlo). Buď $Ax = b$ soustava s invertibilní maticí A a řešením $x = (x^1, \dots, x^n)$. Pak pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$

$$x^i = \frac{\det A_i}{\det A},$$

kde A_i je matice, která vznikne z A záměnou i-tého sloupce za sloupec pravých stran b.

Příklad

- $x + y = 0$ $\quad \left(1 \quad 1 \,\middle|\, 0\right)$

  $\{(-t, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$

- $x = 1$ má jediné řešení

- $x = 0$

  $x = 1$

  $$\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right)$$

  nemá řešení.