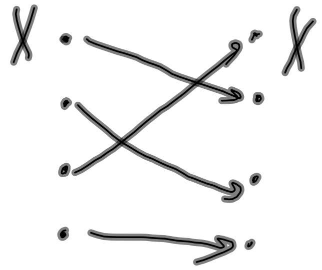
PERMUTACE

X … konečná množina

$\sigma: X \longrightarrow X$ bijektivní

se nazývá PERMUTACE.

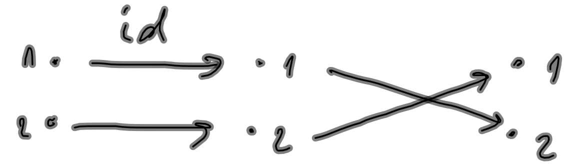


$I_n = \{1, \dots, n\}$, označujeme $\sigma(i) = \sigma_i$

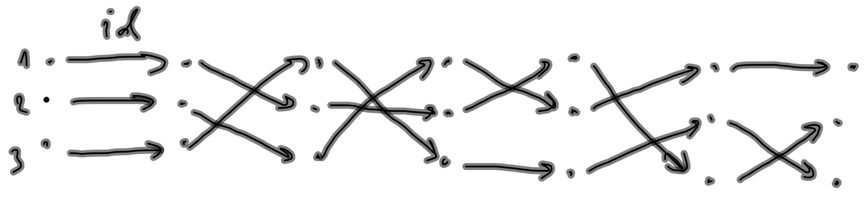
S_n označuje množinu všech permutací na I_n.

I_1

I_2



I_3



Počet permutací na n-prvkové množině je roven $n!$

Buď σ permutace na množině I_n. Nechť $i, j \in I_n$, $i < j$ a zároveň $\sigma(i) > \sigma(j)$. Pak říkáme, že $(\sigma(i), \sigma(j))$ tvoří INVERZI permutace σ.

$\operatorname{inv} \sigma$ označuje počet inverzí permutace σ.

$\operatorname{sgn} \sigma = (-1)^{\operatorname{inv} \sigma}$ se nazývá ZNAMÉNKO permutace.

DETERMINANT

Definice Buď A čtvercová matice typu $n \times n$ nad polem P. Položme

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \cdot a_{1\sigma_1} \cdot a_{2\sigma_2} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma_n}$$

Pak $\det A \in P$ se nazývá DETERMINANT matice A. Číslo n se nazývá ŘÁD determinantu.

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Příklad • $n = 1$ $\quad A = (a_{11}) \quad \det A = a_{11}$

• $n = 2$ $\quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

$id: 1 \to 1,\ 2 \to 2 \quad \operatorname{inv} id = 0$

$\sigma: 1 \to 2,\ 2 \to 1 \quad \operatorname{inv} \sigma = 1$

$$\det A = \operatorname{sgn} id \cdot a_{1id_1} \cdot a_{2id_2} + \operatorname{sgn} \sigma \cdot a_{1\sigma_1} \cdot a_{2\sigma_2} =$$

$$= 1 \cdot a_{11} \cdot a_{22} + (-1) \cdot a_{12} a_{21} =$$

$$= a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

• $n = 3$ $\quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

$id: 1 \to 1,\ 2 \to 2,\ 3 \to 3 \quad \operatorname{inv} id = 0$

$\sigma_1: 1 \to 1,\ 2 \to 3,\ 3 \to 2 \quad \operatorname{inv} \sigma_1 = 1$

$\sigma_2: 1 \to 2,\ 2 \to 1,\ 3 \to 3 \quad \operatorname{inv} \sigma_2 = 1$

$\sigma_3: 1 \to 2,\ 2 \to 3,\ 3 \to 1 \quad \operatorname{inv} \sigma_3 = 2$

$\sigma_4: 1 \to 3,\ 2 \to 1,\ 3 \to 2 \quad \operatorname{inv} \sigma_4 = 2$

$\sigma_5: 1 \to 3,\ 2 \to 2,\ 3 \to 1 \quad \operatorname{inv} \sigma_5 = 3$

$$\det A = \operatorname{sgn} id\ a_{1id(1)} \cdot a_{2id(2)} \cdot a_{3id(3)}$$

$$+ \operatorname{sgn} \sigma_1 \cdot a_{1\sigma_1(1)} \cdot a_{2\sigma_1(2)} \cdot a_{3\sigma_1(3)}$$

$$+ \cdots + \operatorname{sgn} \sigma_5\, a_{1\sigma_5(1)} \cdot a_{2\sigma_5(2)} \cdot a_{3\sigma_5(3)} =$$

$$= a_{11} a_{22} a_{33} + (-1) a_{11} a_{23} a_{32} +$$

$$+ (-1) a_{12} a_{21} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} +$$

$$+ a_{13} a_{21} a_{32} + (-1) a_{13} a_{22} a_{31}$$

$$+ \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad -$$
$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{matrix}$$

Sarrusovo pravidlo

<u>Věta</u> Je-li některý řádek matice A nulový, pak $\det A = 0$.

<u>Věta</u> Jsou-li některé dva řádky matice A stejné, pak $\det A = 0$.

<u>Věta</u> 1) Přičtením c-násobku j-tého řádku k i-tému řádku se determinant nezmění.

2) Vynásobením i-tého řádku prvkem $c \in P$ se determinant vynásobí prvkem c.

3) Výměnou i-tého a j-tého řádku determinant změní znaménko.

<u>Věta</u> $\det E = 1$

<u>Věta</u> $\det A = \det A^T$

<u>Věta</u> Matice ve schodovitém tvaru má determinant roven součinu prvků na diagonále.

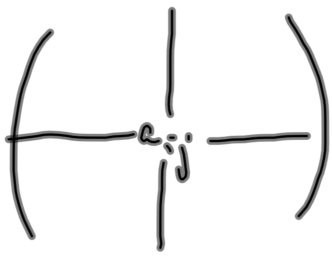
<u>Věta</u> $\det A \cdot B = \det A \cdot \det B$.

<u>Věta</u> Matice je regulární právě tehdy, když její determinant je různý od nuly a to je právě tehdy, když A je invertibilní.

<u>Věta</u> Jestliže existuje A^{-1}, pak $\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$.

__Definice__ Mějme $A = (a_{ij})$.

ALGEBRAICKÝ DOPLNĚK k prvku a_{ij} (ozn. $\mathcal{A}_{ij}$) je $(-1)^{i+j}$-násobek determinantu matice, která vznikne z A vynecháním i-tého řádku a j-tého sloupce.



__Věta__ (Laplaceův rozvoj)

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} \mathcal{A}_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \mathcal{A}_{ik}$$