INVERZNÍ MATICE

Elementární matice

$$E_{ij}(c) = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccccccccc} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & & & \\ 0 & \dots & 0\,1\,0 & \dots & 0 & c & 0 \dots & 0 \\ \vdots & & & & & & & \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 \dots & 0 \\ \vdots & & & & & & & \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{array}\right) \\ \quad\quad\quad\quad j \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ i \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \qquad i = j, c \neq 0$$

$$E_i(c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & \dots & \dots & c & 0 \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \qquad c \neq 0$$

$$E_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \qquad i \neq j$$

$E_{ij} A$

Lemma Buďte A, A' matice téhož typu. Následující výroky jsou ekvivalentní:

1) matice A' vznikne z A jednou z elementárních řádkových úprav.
2) existuje elementární matice Q taková, že $A' = QA$.

<u>Věta</u> Čtvercová matice A je invertibilní právě tehdy, když je řádkově ekvivalentní s jednotkovou maticí.

<u>Nalezení inverzní matice</u>

Matici A upravujeme elementárními řádkovými úpravami na jednotkovou matici. Stejné úpravy provádíme na jednotkové matici E. Výsledná matice je inverzní matice k matici A.

<u>Příklad</u>

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \\ 0 & 1 & \end{array} \underbrace{\boxed{\begin{matrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{matrix}}}_{A^{-1}}\right)$$

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>Příklad</u> $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ \boxed{0 \quad 0} & & -3 & 1 \end{array}\right)$$

neexistuje inverzní matice k matici A.

TRANSPONOVANÁ MATICE

Matice $A = (a_{ij})$ typu $m \times n$.

Matice $B = (b_{ij})$ typu $n \times m$, kde

$b_{ij} = a_{ji}$, se nazývá matice TRANSPONOVANÁ k matici A a značí se A^T.

<u>Příklad</u>

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

<u>Věta</u> $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$.

<u>Důkaz</u> $((A \cdot B)^T)_{ij} = (B^T \cdot A^T)_{ij}$

<u>Věta</u> Buď A čtvercová matice typu $n \times n$. Když A je invertibilní, potom také A^T je invertibilní a $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

LINEÁRNÍ ZÁVISLOST

Matice A typu $m \times n$

označíme si řádky matice A jako $r_1, \dots, r_m$.

(Tzn., $r_1 = (a_{11}\ a_{12}\ \dots\ a_{1n})$).

Nechť $c_1, \dots, c_m \in P\ (= \mathbb{R})$.

Potom $c_1 r_1 + \dots + c_m r_m$ je LINEÁRNÍ KOMBINACE ŘÁDKŮ $r_1, \dots, r_m$ s koeficienty $c_1, \dots, c_m$.

Příklad $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ $\quad r_1 = (1\ 2\ 5)$, $r_2 = (3\ 4\ 6)$

$c_1 = 2$, $c_2 = -1$.

$$c_1 \cdot r_1 + c_2 \cdot r_2 = 2 \cdot (1\ 2\ 5) + (-1)(3\ 4\ 6) = (2\ 4\ 10) + (-3\ -4\ -6) = (-1\ 0\ 4)$$

Řádky $r_1, \dots, r_m$ nazýváme LINEÁRNĚ NEZÁVISLÉ, jestliže platí implikace

$$c_1 r_1 + \dots + c_m r_m = 0 \Rightarrow c_1 = c_2 = \dots = c_m = 0.$$

Řádky $r_1, \dots, r_m$ jsou LINEÁRNĚ ZÁVISLÉ, jestliže nejsou lin. nezávislé. Tzn., že existují $c_1, \dots, c_m$ takové, že $c_1 r_1 + \dots + c_m r_m = 0$ a aspoň jedno c_i je různé od nuly.

Příklad $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad r_1 = (1\ 2)$, $r_2 = (3\ 4)$

$$\cancel{c_1 r_1 + c_2 r_2} = c_1 (1\ 2) + c_2 (3\ 4) = (c_1\ 2c_1) + (3c_2\ 4c_2) = (c_1 + 3c_2\ \ 2c_1 + 4c_2) = (0\ 0)$$

$c_1 + 3c_2 = 0 \qquad c_1 = -3c_2 = 0$

$2c_1 + 4c_2 = 0 \qquad -6c_2 + 4c_2 = 0$

$-2c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = 0$

Příklad $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ $\quad r_1 = (1\ 2)$, $r_2 = (3\ 6)$

$$c_1 r_1 + c_2 r_2 = (c_1\ 2c_1) + (3c_2\ 6c_2) = (c_1 + 3c_2\ \ 2c_1 + 6c_2) = (0\ 0)$$

$c_1 + 3c_2 = 0 \qquad \boxed{c_1 = -3c_2}$

$2c_1 + 6c_2 = 0 \qquad -6c_2 + 6c_2 = 0$

například $c_2 = 1$, $c_1 = -3$.

$$-3(1\ 2) + 1 \cdot (3\ 6) = (-3\ -6) + (3\ 6) = (0\ 0)$$

HODNOST MATICE

Maximální počet lineárně nezávislých řádků matice A se nazývá HODNOST matice A a značí se $\operatorname{rank} A = \operatorname{rk} A$.

Věta Elementární řádkové úpravy nemění hodnost matice.

Příklad $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ $\quad r_1 = (1 \quad 2)$ $\quad r_2 = (3 \quad 6)$

$c_1 r_1 = (c_1 \quad 2c_1) = (0 \quad 0) \quad c_1 = 0$

$\operatorname{rank} A = 1.$

Příklad $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ $\operatorname{rank} A = 2.$

Věta Pokud je matice A řádkově ekvivalentní matici B ve schodovitém tvaru, potom $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} B$ a to je rovno počtu nenulových řádků v matici B.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & & \end{pmatrix}$$

Tvrzení $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} A^T$

Definice Matice, jejíž hodnost je rovna počtu řádků, se nazývá REGULÁRNÍ.
Matice, která není regulární, se nazývá SINGULÁRNÍ.

Věta Každá regulární matice je řádkově ekvivalentní jednotkové matici.

Věta Násobení regulární maticí nemění hodnost.