Matice – elementární úpravy

Def: Matice A typu $r \times s$ nad polem $\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$) je lib. zobr. $A: \{1,\dots,r\} \times \{1,\dots,s\} \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$. Hodnota zobrazení A na dvojici (i,j) se značí A_{ij}. Zapisujeme

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2s} \\ \vdots & & & \vdots \\ A_{r1} & A_{r2} & \dots & A_{rs} \end{pmatrix}$$

Př: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 4 & 2 & 5 \\ -10 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ typu 3×3 nad $\mathbb{R}$

$(1,3) \to -3$

$(2,2) \to 2$

Def: A, A' … matice typu $r \times s$. Řekneme, že A' vznikla z A jednou z elementárních řádkových úprav, jestliže jsme

1) vynásobili řádek A číslem c $(\neq 0)$
2) přehodili 2 řádky
3) přičetli c-násobek jednoho řádku k druhému.

Př:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ -2 & -3 & -6 \\ 15 & 8 & 12 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot 2 \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & -8 \\ -2 & -3 & -6 \\ 15 & 8 & 12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & -8 \\ 15 & 8 & 12 \\ -2 & -3 & -6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot(-1) \\ + \\ \\ \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & -8 \\ -15 & 8 & 20 \\ -2 & -3 & -6 \end{pmatrix}$$

Ke každé el. řádk. úpravě $\exists$ úprava inverzní.

Def: Matice A, B jsou řádkově ekvivalentní $\Leftrightarrow$ B vznikla z A nějakou konečnou posloupností elem. řádk. úprav. Značíme $A \sim B$

Tvrzení: Řádková ekvivalence matic je relací ekvivalence.

Důkaz:
1) reflexivní $A \sim A$ (žádná úprava)
2) symetrická $A \sim B \Rightarrow B \sim A$ (provedeme posloupnost inverzních úprav)
3) tranzitivní $A \sim B \wedge B \sim C \Rightarrow A \sim C$ (k úprav od A k B, m úprav od B k C $\Rightarrow$ $k+m$ úprav od A k C) $\square$

Def: Matice A je ve schodovitém tvaru $\Leftrightarrow$
1) každý nenulový řádek začíná zleva více nulami než řádek předchozí
2) za nulovým řádkem následují pouze nulové řádky

Matice A je v Gauss-Jordanově tvaru $\Leftrightarrow$ je ve schodovitém tvaru a navíc
3) hlavní prvek (první nenulový) každého řádku je 1
4) všechny prvky ve sloupci nad a pod hl. prvkem jsou 0

Př:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

schodovitý tvar G-J tvar

Řešení soustav lineárních rovnic

(Gaussova eliminační metoda)

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1s}x_s &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2s}x_s &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \dots + a_{rs}x_s &= b_r \end{aligned}$$

Př:

$$\begin{aligned} 2x + y - z &= -4 \\ x + 2z &= 12 \\ 3y - 3z &= -24 \end{aligned}$$

„rozšířená matice soustavy"

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & -4 \\ 1 & 0 & 2 & 12 \\ 0 & 3 & -3 & -24 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 12 \\ 2 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 3 & -3 & -24 \end{array}\right) \begin{matrix} \cdot(-2) \\ + \\ \\ \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 12 \\ 0 & 1 & -5 & -28 \\ 0 & 3 & -3 & -24 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \cdot(-3) \\ + \end{matrix}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 12 \\ 0 & 1 & -5 & -28 \\ 0 & 0 & 12 & 60 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ \cdot\frac{1}{12} \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 12 \\ 0 & 1 & -5 & -28 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \begin{matrix} + \\ \\ \cdot(-2) \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -5 & -28 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ + \\ \cdot 5 \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \\ x \quad y \quad z \qquad \end{array} \qquad \boxed{\begin{aligned} x &= 2 \\ y &= -3 \\ z &= 5 \end{aligned}}$$

Tvrzení: Elementární řádkové úpravy nemění množinu řešení soustavy.

Pozn.: Každá matice je řádkově ekvivalentní s maticí v G-J tvaru.