POSLOUPNOSTI

1. Posloupnosti

Uvažujme množinu $\boldsymbol{N}$ přirozených čísel s přirozeným uspořádáním. Tato množina se zmíněným uspořádáním je úplně uspořádána. Libovolné zobrazení $S\colon \boldsymbol{N} \to X$ je *posloupnost* prvků množiny X. Prvkům množiny $\boldsymbol{N}$ říkáme indexy. Posloupnost S bude také označována symbolem $S = (x_i)_{i \in \boldsymbol{N}}$, nebo prostě $S = (x_i)$. V tomto značení x_i je bod $S(i) \in X$, přiřazený indexu $i \in \boldsymbol{N}$ zobrazením $S\colon \boldsymbol{N} \to X$.

Buď $A \subset X$. Řekneme, že posloupnost $S = (x_i)$ *leží v množině* A, jestliže pro každé $i \in \boldsymbol{N}$ je $x_i \in A$. Posloupnost S se nazývá *konstantní*, jestliže $x_i = x$ pro jistý bod $x \in X$ a každé $i \in \boldsymbol{N}$.

Posloupnost $T = (y_i)$ se nazývá *podposloupnost* posloupnosti $S = (x_i)$, jestliže existuje zobrazení $\varphi\colon \boldsymbol{N} \to \boldsymbol{N}$ splňující tyto podmínky:

(1) $T = S \circ \varphi$, tj. $y_i = x_{\varphi(i)}$ pro každé $i \in \boldsymbol{N}$.
(2) Ke každému $i_0 \in \boldsymbol{N}$ existuje $j_0 \in \boldsymbol{N}$ tak, že pro každé $j \geq j_0$ platí $\varphi(j) \geq i_0$.

2. Konvergentní posloupnosti

Buď X topologický prostor, $S = (x_i)$ posloupnost v množině X. Bod $x \in X$ se nazývá *limitním bodem* posloupnosti S, jestliže ke každému jeho okolí U existuje index i_0 tak, že $x_i \in U$ pro všechna $i \geq i_0$. Limitní bod posloupnosti S nazýváme také *limitou* posloupnosti S. Je-li x limitní bod posloupnosti S, říkáme, že S *konverguje* k bodu x. Množinu limitních bodů posloupnosti S označujeme $\lim S$. Posloupnost S se nazývá *konvergentní*, platí-li $\lim S \neq \emptyset$. Libovolný limitní bod posloupnosti $S = (x_i)$ označujeme symbolem $\lim_{i \in \boldsymbol{N}} x_i$ nebo prostě $\lim x_i$.

Z definice ihned vyplývá, že každá konstantní posloupnost $S = (x_i)$ v topologickém prostoru X taková, že $x_i = x$, konverguje k bodu x.

3. Konvergence v prostorech prvního typu spočetnosti

Následující tvrzení ukazuje, jak lze pomocí konvergentních posloupností zkonstruovat uzávěr podmnožiny topologického prostoru prvního typu spočetnosti; jeho důsledek podává přímou charakteristiku uzavřených množin.

Věta 3.1 (Věta 4.4.9(a) v [1])**.** *Buď A neprázdná množina v topologickém prostoru X prvního typu spočetnosti. Bod $x \in X$ patří uzávěru množiny A tehdy a jen tehdy, když existuje posloupnost v A konvergující k tomuto bodu.*

Důkaz. Předpokládejme, že $x \in \operatorname{cl} A$ a zvolme spočetnou lokální bázi topologie (U_i) v bodě x. Můžeme předpokládat, že $U_1 \supset U_2 \supset U_3 \supset \dots$ (Věta 10 odst. 1.5.). Pro každé i platí $U_i \cap A \neq \emptyset$ a tedy existuje bod $x_i \in U_i \cap A$. Takto získaná posloupnost $S = (x_i)$ bodů množiny A konveguje k bodu x, tj. $x \in \lim S$.

Buď $x \in X$ a předpokládejme, že existuje posloupnost $S = (x_i)$ bodů v A konvegující k x. Pro libovolné okolí U bodu x podle předpokladu existuje index i_0 tak, že $x_i \in U \cap A$ pro každé $i \geq i_0$. Množina $U \cap A$ je tedy neprázdná. Z libovolnosti U vyplývá, že $x \in \operatorname{cl} A$. $\square$

Věta 3.2 (Věta 4.4.9(b) v [1])**.** *Buď X topologický prostor prvního typu spočetnosti. Množina $A \subset X$ je uzavřená tehdy a jen tehdy, když obsahuje limitní body každé posloupnosti svých bodů.*

Důkaz. Věta je přímým důsledkem Věty 3.1. $\square$

Věta 3.3 (Věta 4.2.3 v [1])**.** *Nechť S je posloupnost v topologickém prostoru X. Předpokládejme, že S nekonverguje k $x \in X$. Pak existuje podposloupnost T posloupnosti S taková, že žádná podposloupnost posloupnosti T nekonverguje k bodu x.*

Důkaz. Předpokládejme, že posloupnost $S = (x_i)$ v X nekonverguje k bodu x. Existuje tedy okolí U bodu x takové, že k libovolnému indexu i lze najít index $\varphi(i) \geq i$ splňující podmínku $x_{\varphi(i)} \notin U$. Výběrem takového indexu dostáváme zobrazení $\boldsymbol{N} \ni i \mapsto \varphi(i) \in \boldsymbol{N}$. Toto zobrazení splňuje podmínky z definice podposloupnosti. Prověříme podmínku (2). Buď i_0 libovolný index. Položme $j_0 = \varphi(i_0)$. Buď i index takový, že $i \geq j_0$. Pak $\varphi(i) \geq i \geq j_0 = \varphi(i_0) \geq i_0$, což jsme chtěli ukázat.
Dále klademe $T = S \circ \varphi$, tj. $T = (x_{\varphi(i)})$. Podle definice je T podposloupnost posloupnosti S a žádný z bodů $x_{\varphi(i)}$ neleží v okolí U. T je tedy posloupnost v uzavřené množině $X \setminus U$ (Věta 3.1). Zároveň limitní bod každé podposloupnosti posloupnosti T musí patřit množině $X \setminus U$. □

Při vyšetřování spojitosti zobrazení topologických prostorů, jehož definiční obor je topologický prostor prvního typu spočetnosti, nám také mohou posloužit konvergentní posloupnosti.

Věta 3.4 (Věta 4.4.9(c) v [1])**.** *Buď X topologický prostor prvního typu spočetnosti, Y topologický prostor. Zobrazení $f\colon X \to Y$ je spojité v bodě $x_0 \in X$ tehdy a jen tehdy, když pro každou posloupnost (x_i) v X konvergující k bodu x_0 posloupnost $(f(x_i))$ v Y konverguje k bodu $f(x_0)$.*

Důkaz. Buď f spojité v x_0, (x_i) posloupnost v X konvergující k x_0 a U libovolné okolí bodu $f(x_0)$. Potom existuje okolí V bodu x_0 takové, že $f(V) \subset U$, a existuje index i_0 tak, že $x_i \in V$ pro každé $i \geq i_0$. Pak tedy $f(x_i) \in U$ pro každé $i \geq i_0$ a $f(x_0)$ je limitní bod posloupnosti $(f(x_i))$.
Předpokládejme, že zobrazení f není spojité v bodě x_0. Buď (U_i) spočetná lokální báze topologie v bodě x_0 a předpokládejme, že $U_1 \supset U_2 \supset U_3 \supset \dots$ (Věta 10 odst. 1.5.). Existuje tedy okolí V bodu $f(x_0)$ takové, že ke každému i existuje bod $x_i \in U_i$ s vlastností $f(x_i) \notin V$. Ovšem posloupnost (x_i) konverguje k x_0 a přitom posloupnost $(f(x_i))$ nekonverguje k $f(x_0)$. □

Věta 3.5 (Důsledek Věty 4.4.9 v [1])**.** *Buďte τ_1, τ_2 dvě topologie na množině X a předpokládejme, že topologické prostory $(X, \tau_1), (X, \tau_2)$ jsou prvního typu spočetnosti. Dále předpokládejme, že posloupnost (x_i) v X je konvergentní v (X, τ_1) tehdy a jen tehdy, když je konvergentní v (X, τ_2). Pak $\tau_1 = \tau_2$.*

Důkaz. Podle Věty 3.4 je zobrazení id_X homeomorfismus (X, τ_1) na (X, τ_2). □

Věta 3.6 (Věta 4.4.10 v [1])**.** *Topologický prostor prvního typu spočetnosti X je oddělitelný tehdy a jen tehdy, když každá posloupnost v X má nejvýše jeden limitní bod.*

Důkaz. Buď (x_i) posloupnost v X, y, z její různé limitní body, U libovolné okolí bodu y a V libovolné okolí bodu z. Existuje index i_0 tak, že $x_i \in U$ a $x_i \in V$ pro každé $i \geq i_0$. Takže $U \cap V \neq \emptyset$. Body y, z tedy nelze oddělit otevřenými množinami.
Předpokládejme, že X není oddělitelný a zvolme dva zůzné body $y, z \in X$, které nelze oddělit otevřenými množinami. Buď (U_i) spočetná lokální báze topologie v bodě y a (V_i) spočetná lokální báze topologie v bodě z. Můžeme předpokládat, že $U_1 \supset U_2 \supset U_3 \supset \dots$ a $V_1 \supset V_2 \supset V_3 \supset \dots$ (Věta 10 odst. 1.5.). Pro každé i je množina $U_i \cap V_i$ neprázdná a navíc $U_i \cap V_i \supset U_{i+1} \cap V_{i+1}$. Zvolme libovolně bod $x_i \in U_i \cap V_i$; dostáváme posloupnost (x_i) v X. Pro libovolné okolí U bodu y existuje index i_0 tak, že $U_{i_0} \subset U$. Tedy pro každé $i \geq i_0$ platí $x_i \in U_i \cap V_i \subset U_{i_0} \cap V_{i_0} \subset U_{i_0} \subset U$ a (x_i) konverguje k y. Analogicky dostaneme, že (x_i) konverguje k z. □

Reference

[1] D. Krupka, O. Krupková. *Topologie a geometrie I: Obecná topologie*, SPN Praha, 1989