

POSLOUPNOSTI

1. POSLOUPNOSTI

Uvažujme množinu N přirozených čísel s přirozeným uspořádáním. Tato množina se zmíněným uspořádáním je úplně uspořádána. *Posloupnost* prvků množiny X je libovolné zobrazení $S : N \rightarrow X$. Prvkům množiny N říkáme indexy. Posloupnost S bude také označována symbolem $S = (x_i)_{i \in N}$, nebo prostě $S = (x_i)$. V tomto značení x_i je bod $S(i) \in X$, přiřazený indexu $i \in N$ zobrazením $S : N \rightarrow X$.

Řekneme, že posloupnost $S = (x_i)_{i \in N}$ *leží v množině* $A \subset X$, jestliže $x_i \in A$ pro každé $i \in N$. Posloupnost S se nazývá *konstantní*, jestliže $x_i = x$ pro jistý bod $x \in X$ a každé $i \in N$.

Posloupnost $T = (y_j)_{j \in N}$ se nazývá *podposloupnost* posloupnosti $S = (x_i)_{i \in N}$ v X , jestliže existuje rostoucí zobrazení $\varphi : N \rightarrow N$ takové, že $T = S \circ \varphi$, tj. $y_j = x_{\varphi(j)}$ pro každé $j \in N$.

2. KONVERGENTNÍ POSLOUPNOSTI

Bud' X topologický prostor, $S = (x_i)_{i \in N}$ posloupnost v množině X . Bod $x \in X$ se nazývá *limitním bodem* posloupnosti S , jestliže ke každému jeho okolí U existuje index $i_0 \in N$ tak, že $x_i \in U$ pro všechna $i \geq i_0$. Limitní bod posloupnosti S nazýváme také *limitou* posloupnosti S . Je-li x limitní bod posloupnosti S , říkáme, že S *konverguje* k bodu x . Množinu limitních bodů posloupnosti S označujeme $\lim S$. Posloupnost S se nazývá *konvergentní*, platí-li $\lim S \neq \emptyset$. Libovolný limitní bod posloupnosti $S = (x_i)_{i \in N}$ označujeme symbolem $\lim_{i \in N} x_i$ nebo prostě $\lim x_i$.

Z definice ihned vyplývá, že každá konstantní posloupnost $S = (x_i)_{i \in N}$ v topologickém prostoru X taková, že $x_i = x$, konverguje k bodu x .

3. KONVERGENCE V PROSTORECH PRVNÍHO TYPU SPOČETNOSTI

Následující tvrzení ukazuje, jak lze pomocí konvergentních posloupností zkonstruovat uzavěr podmnožiny topologického prostoru prvního typu spočetnosti; jeho důsledek podává přímou charakteristiku uzavřených množin.

3.1 Věta (4.4.9(a)/148–9 v [1]) *Bud' A neprázdná množina v topologickém prostoru X prvního typu spočetnosti. Bod $x \in X$ patří uzávěru $\text{cl}A$ množiny A tehdy a jen tehdy, když existuje posloupnost v A konvergující k tomuto bodu.*

Důkaz. Předpokládejme, že $x \in \text{cl}A$ a zvolme spočetnou lokální bázi topologie (U_i) v bodě x . Můžeme předpokládat, že $U_1 \supset U_2 \supset U_3 \supset \dots$ (Věta 10 odst. 1.5.). Pro každé i platí $U_i \cap A \neq \emptyset$ a tedy existuje bod $x_i \in U_i \cap A$. Posloupnost $S = (x_i)$ bodů množiny A konverguje k bodu x , tj. $x \in \lim S$.

Nechť $x \in X$ a předpokládejme, že existuje posloupnost $S = (x_i)$ bodů v A konvergující k x . Bud' U libovolné okolí bodu x . Podle předpokladu existuje index $i_0 \in N$ tak, že $x_i \in U \cap A$ pro každé $i \geq i_0$. Množina $U \cap A$ je tedy neprázdná. Z libovolnosti U vyplývá, že $x \in \text{cl}A$. Q.E.D.

3.2 Věta (4.4.9(b)/148–9 v [1]) *Bud' X topologický prostor prvního typu spočetnosti. Množina $A \subset X$ je uzavřená tehdy a jen tehdy, když obsahuje limitní body každé posloupnosti svých bodů.*

Důkaz. Věta je přímým důsledkem Věty 3.1. Q.E.D.

3.3 Věta (4.2.3/142 v [1]) *Bud' X topologický prostor prvního typu spočetnosti, S posloupnost v X . Předpokládejme, že S nekonverguje k $x \in X$. Pak existuje podposloupnost T posloupnosti S taková, že žádná podposloupnost posloupnosti T nekonverguje k bodu x .*

Důkaz. Předpokládejme, že posloupnost $S = (x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ v X nekonverguje k bodu x , tj. $x \notin \lim S$. Existuje tedy okolí U bodu x takové, že k libovolnému indexu $i \in \mathbb{N}$ lze najít index $\varphi(i) \geq i$ splňující podmínku $x_{\varphi(i)} \notin U$. Výběrem takového indexu dostáváme zobrazení $\mathbb{N} \ni i \mapsto \varphi(i) \in \mathbb{N}$. Toto zobrazení splňuje podmínky z definice podposloupnosti. Prověříme podmínku (2). Bud' $i_0 \in \mathbb{N}$ libovolný index. Položme $\kappa_0 = \varphi(i_0)$. Bud' $i \in \mathbb{N}$ index takový, že $i \geq \kappa_0$. Pak $\varphi(i) \geq i \geq \kappa_0 = \varphi(i_0) \geq i_0$, což jsme chtěli ukázat.

Dále klademe $T = S \circ \varphi$, tj. $T = (x_{\varphi(i)})_{i \in \mathbb{N}}$. Podle definice je T podposloupnost posloupnosti S a žádný z bodů $x_{\varphi(i)}$ neleží v okolí U . T je tedy posloupnost v uzavřené množině $X \setminus U$ (Věta 3.1). Zároveň limitní bod každé podposloupnosti posloupnosti T musí patřit množině $X \setminus U$. Q.E.D.

Při vyšetřování spojitosti zobrazení topologických prostorů, jehož definiční obor je topologický prostor prvního typu spočetnosti, nám také mohou posloužit konvergentní posloupnosti.

3.4 Věta (4.4.9(c)/148–9 v [1]) *Bud' X topologický prostor prvního typu spočetnosti, Y topologický prostor. Zobrazení $f : X \rightarrow Y$ je spojitě v bodě $x_0 \in X$ tehdy a jen tehdy, když pro každou posloupnost $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ v X konvergující k bodu x_0 posloupnost $(f(x_i))_{i \in \mathbb{N}}$ v Y konverguje k bodu $f(x_0)$.*

Důkaz. Bud' f spojitě v x_0 , (x_i) posloupnost v X konvergující k x_0 a U libovolné okolí bodu $f(x_0) \in Y$. Takže existuje okolí $V \subset f^{-1}(U)$ bodu x_0 a existuje také index i_0 tak, že $x_i \in V$ pro každé $i \geq i_0$. Potom $f(x_i) \in U$ pro každé $i \geq i_0$ a $f(x_0)$ je tedy limitní bod posloupnosti $(f(x_i))$.

Předpokládejme, že zobrazení f není spojitě v bodě x_0 . Bud' (U_i) spočetná lokální báze topologie v bodě x_0 a předpokládejme, že $U_1 \supset U_2 \supset U_3 \supset \dots$ (Věta 10 odst. 1.5.). Existuje tedy okolí V bodu $f(x_0)$ takové, že ke každému i existuje bod $x_i \in U_i$ s vlastností $f(x_i) \notin V$. Ovšem posloupnost (x_i) konverguje k x_0 a přitom posloupnost $(f(x_i))$ nekonverguje k $f(x_0)$. Q.E.D.

3.5 Věta (4.4.Důsledek/149 v [1]) *Bud' τ_1, τ_2 dvě topologie na množině X a předpokládejme, že topologické prostory $(X, \tau_1), (X, \tau_2)$ jsou prvního typu spočetnosti. Dále předpokládejme, že posloupnost (x_i) v X je konvergentní v (X, τ_1) tehdy a jen tehdy, když je konvergentní v (X, τ_2) . Pak $\tau_1 = \tau_2$.*

Důkaz. Podle Věty 3.4 je zobrazení id_X homeomorfismus (X, τ_1) na (X, τ_2) . Q.E.D.

3.6 Věta (4.4.10/150 v [1]) *Topologický prostor prvního typu spočetnosti X je oddělitelný tehdy a jen tehdy, když každá posloupnost v X má nejvýše jeden limitní bod.*

Důkaz. Bud' $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ posloupnost v X , y_1, y_2 její různé limitní body, U_1 libovolné okolí bodu y_1 a U_2 libovolné okolí bodu y_2 . Existuje index i_0 tak, že $x_i \in U_1$ a $x_i \in U_2$ pro každé $i \geq i_0$. Takže $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$. Body y_1, y_2 tedy nelze oddělit otevřenými množinami. Předpokládejme, že X není oddělitelný a zvolme dva zůzné body $y_1, y_2 \in X$, které nelze oddělit otevřenými množinami. Bud' (U_i) spočetná lokální báze topologie v bodě y_1 a (V_i) spočetná lokální báze topologie v bodě y_2 . Můžeme předpokládat, že $U_1 \supset U_2 \supset U_3 \supset \dots$ a $V_1 \supset V_2 \supset V_3 \supset \dots$ (Věta 10 odst. 1.5.). Pro každé i je množina $U_i \cap V_i$ neprázdná a navíc $U_i \cap V_i \supset U_{i+1} \cap V_{i+1}$. Zvolme libovolně bod $x_i \in U_i \cap V_i$; dostáváme posloupnost (x_i) v X . Pro libovolné okolí U bodu y_1 existuje index i_0 tak, že $U_{i_0} \subset U$. Tedy pro každé $i \geq i_0$ platí $x_i \in U_i \cap V_i \subset U_{i_0} \cap V_{i_0} \subset U_{i_0} \subset U$ a (x_i) konverguje k y_1 . Analogicky dostaneme, že (x_i) konverguje k y_2 . Q.E.D.

REFERENCE

- [1] D. Krupka, O. Krupková. *Topologie a geometrie I: Obecná topologie*, SPN Praha, 1989