POSLOUPNOSTI

1. Posloupnosti

Uvažujme množinu $\boldsymbol{N}$ přirozených čísel s přirozeným uspořádáním. Tato množina se zmíněným uspořádáním je úplně uspořádána. *Posloupnost* prvků množiny X je libovolné zobrazení $S : \boldsymbol{N} \to X$. Prvkům množiny $\boldsymbol{N}$ říkáme indexy. Posloupnost S bude také označována symbolem $S = (x_i)_{i \in \boldsymbol{N}}$, nebo prostě $S = (x_i)$. V tomto značení x_i je bod $S(i) \in X$, přiřazený indexu $i \in \boldsymbol{N}$ zobrazením $S : \boldsymbol{N} \to X$.
Řekneme, že posloupnost $S = (x_i)_{i \in \boldsymbol{N}}$ *leží v množině* $A \subset X$, jestliže $x_i \in A$ pro každé $i \in \boldsymbol{N}$. Posloupnost S se nazývá *konstantní*, jestliže $x_i = x$ pro jistý bod $x \in X$ a každé $i \in \boldsymbol{N}$.
Posloupnost $T = (y_j)_{j \in J}$ se nazývá *podposloupnost* posloupnosti $S = (x_i)_{i \in \boldsymbol{N}}$ v X, jestliže existuje zobrazení $\varphi : J \to \boldsymbol{N}$ splňující tyto podmínky:

(1) $T = S \circ \varphi$, tj. $y_j = x_{\varphi(j)}$ pro každé $j \in J$.
(2) Ke každému $i_0 \in \boldsymbol{N}$ existuje index $j_0 \in J$ tak, že pro každé $j \geq j_0$ platí $\varphi(j) \geq i_0$.

2. Konvergentní posloupnosti

Buď X topologický prostor, $S = (x_i)_{i \in \boldsymbol{N}}$ posloupnost v množině X. Bod $x \in X$ se nazývá *limitním bodem* posloupnosti S, jestliže ke každému jeho okolí U existuje index $i_0 \in \boldsymbol{N}$ tak, že $x_i \in U$ pro všechna $i \geq i_0$. Limitní bod posloupnosti S nazýváme také *limitou* posloupnosti S. Je-li x limitní bod posloupnosti S, říkáme, že S *konverguje* k bodu x. Množinu limitních bodů posloupnosti S označujeme $\lim S$. Posloupnost S se nazývá *konvergentní*, platí-li $\lim S \neq \emptyset$.
Libovolný limitní bod posloupnosti $S = (x_i)_{i \in \boldsymbol{N}}$ označujeme symbolem $\lim_{i \in \boldsymbol{N}} x_i$ nebo prostě $\lim x_i$.
Z definice ihned vyplývá, že každá konstantní posloupnost $S = (x_i)_{i \in \boldsymbol{N}}$ v topologickém prostoru X taková, že $x_i = x$, konverguje k bodu x.

3. Konvergence v prostorech prvního typu spočetnosti

Následující tvrzení ukazuje, jak lze pomocí konvergentních posloupností zkonstruovat uzávěr podmnožiny topologického prostoru prvního typu spočetnosti; jeho důsledek podává přímou charakteristiku uzavřených množin.

3.1 Věta (4.4.9(a)/148–9 v [1]) *Buď A neprázdná množina v topologickém prostoru X prvního typu spočetnosti. Bod $x \in X$ patří uzávěru* $\mathrm{cl}A$ *množiny A tehdy a jen tehdy, když existuje posloupnost v A konvergující k tomuto bodu.*

Proof. Předpokládejme, že $x \in \mathrm{cl}A$ a zvolme spočetnou lokální bázi topologie (U_i) v bodě x. Můžeme předpokládat, že $U_1 \supset U_2 \supset U_3 \supset \dots$ (Věta 10 odst. 1.5.). Pro každé i platí $U_i \cap A \neq \emptyset$ a tedy existuje bod $x_i \in U_i \cap A$. Posloupnost $S = (x_i)$ bodů množiny A konveguje k bodu x, tj. $x \in \lim S$.
Nechť $x \in X$ a předpokládejme, že existuje posloupnost $S = (x_i)$ bodů v A konvegující k x. Buď U libovolné okolí bodu x. Podle předpokladu existuje index $i_0 \in \boldsymbol{N}$ tak, že $x_i \in U \cap A$ pro každé $i \geq i_0$. Množina $U \cap A$ je tedy neprázdná. Z libovolnosti U vyplývá, že $x \in \mathrm{cl}A$. Q.E.D.

3.2 Věta (4.4.9(b)/148–9 v [1]**)** *Buď X topologický prostor prvního typu spočetnosti. Množina $A \subset X$ je uzavřená tehdy a jen tehdy, když obsahuje limitní body každé posloupnosti svých bodů.*

Proof. Věta je přímým důsledkem Věty 3.1. Q.E.D.

3.3 Věta (4.2.3/142 v [1]**)** *Buď X topologický prostor prvního typu spočetnosti, S posloupnost v X. Předpokládejme, že S nekonverguje k $x \in X$. Pak existuje podposloupnost T posloupnosti S taková, že žádná podposloupnost posloupnosti T nekonverguje k bodu x.*

Proof. Předpokládejme, že posloupnost $S = (x_i)_{i \in \boldsymbol{N}}$ v X nekonverguje k bodu x, tj. $x \notin \lim S$. Existuje tedy okolí U bodu x takové, že k libovolnému indexu $i \in \boldsymbol{N}$ lze najít index $\varphi(i) \geq i$ splňující podmínku $x_{\varphi(i)} \notin U$. Výběrem takového indexu dostáváme zobrazení $\boldsymbol{N} \ni i \mapsto \varphi(i) \in \boldsymbol{N}$. Toto zobrazení splňuje podmínky z definice podposloupnosti. Prověříme podmínku (2). Buď $i_0 \in \boldsymbol{N}$ libovolný index. Položme $\kappa_0 = \varphi(i_0)$. Buď $i \in \boldsymbol{N}$ index takový, že $i \geq \kappa_0$. Pak $\varphi(i) \geq i \geq \kappa_0 = \varphi(i_0) \geq i_0$, což jsme chtěli ukázat.
Dále klademe $T = S \circ \varphi$, tj. $T = (x_{\varphi(i)})_{i \in \boldsymbol{N}}$. Podle definice je T podposloupnost posloupnosti S a žádný z bodů $x_{\varphi(i)}$ neleží v okolí U. T je tedy posloupnost v uzavřené množině $X \setminus U$ (Věta 3.1). Zároveň limitní bod každé podposloupnosti posloupnosti T musí patřit množině $X \setminus U$. Q.E.D.

Při vyšetřování spojitosti zobrazení topologických prostorů, jehož definiční obor je topologický prostor prvního typu spočetnosti na také mohou posloužit konvergentní posloupnosti.

3.4 Věta (4.4.9(c)/148–9 v [1]**)** *Buď X topologický prostor prvního typu spočetnosti, Y topologický prostor. Zobrazení $f : X \to Y$ je spojité v bodě $x_0 \in X$ tehdy a jen tehdy, když pro každou posloupnost $(x_i)_{i \in \boldsymbol{N}}$ v X konvergující k bodu x_0 posloupnost $(f(x_i))_{i \in \boldsymbol{N}}$ v Y konverguje k bodu $f(x_0)$.*

Proof. Buď f spojité v x_0, buď (x_i) posloupnost v X konvergující k x_0. Pro libovolné okolí U bodu $f(x_0) \in Y$ je $f^{-1}(U)$ okolí bodu x_0 a tedy existuje index i_0 tak, že $x_i \in f^{-1}(U)$ pro každé $i \geq i_0$. Pak tedy $f(x_i) \in U$ pro každé $i \geq i_0$ a $f(x_0)$ je limitní bod posloupnosti $(f(x_i))$.
Předpokládejme, že pro libovolnou posloupnost (x_i) v X konvergující k x_0 posloupnost $(f(x_i))$ konverguje k $f(x_0)$. Buď (U_i) spočetná lokální báze topologie v bodě x_0 a předpokládejme, že $U_1 \supset U_2 \supset U_3 \supset \dots$ (Věta 10 odst. 1.5.). K tomu,

aby zobrazení $f : X \to Y$ bylo spojité v bodě x_0 stačí, aby k libovolnému okolí V bodu $f(x_0)$ existoval index i tak, že $f(U_i) \subset V$. Předpokládejme opak, tj. předpokládejme, že pro jisté okolí V bodu $f(x_0)$ pro každé i platí $f(U_i) \not\subset V$. Ke každému i tedy existuje bod $x_i \in U_i$ tak, že $f(x_i) \notin V$. Ovšem posloupnost (x_i) konverguje k x_0 a tedy posloupnost $(f(x_i))$ konverguje podle předpokladu k $f(x_0)$. Pro jisté i musí tedy platit $f(U_i) \subset V$, což dokazuje, že zobrazení je spojité v bodě x_0. Q.E.D.

3.5 Věta (4.4.Důsledek/149 v [1]**)** *Buďte τ_1, τ_2 dvě topologie na množině X a předpokládejme, že topologické prostory $(X, \tau_1), (X, \tau_2)$ jsou prvního typu spočetnosti. Dále předpokládejme, že posloupnost (x_i) v X je konvergentní v (X, τ_1) tehdy a jen tehdy, když je konvergentní v (X, τ_2). Pak $\tau_1 = \tau_2$.*

Proof. Podle Věty 3.4 je zobrazení $\mathrm{id}_X : X \to X$ homeomorfismus (X, τ_1) na (X, τ_2). Q.E.D.

3.6 Věta (4.4.10/150 v [1]**)** *Topologický prostor prvního typu spočetnosti X je oddělitelný tehdy a jen tehdy, když každá posloupnost v X má nejvýše jeden limitní bod.*

Proof. Předpokládejme, že X je oddělitelný. Buď $S = (x_i)_{i \in \boldsymbol{N}}$ posloupnost v X, $y_1, y_2 \in \lim S$ její limitní body. Zvolme okolí U_1 bodu y_1 a okolí U_2 bodu y_2. Existuje index i_0 tak, že $x_i \in U_1$ a $x_i \in U_2$ pro každé $i \geq i_1, i_2$. Z definice vyplývá, že množina indexů i je neprázdná, takže $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$. Body y_1, y_2 tedy nelze oddělit otevřenými množinami a z předpokladu oddělitelnosti plyne $y_1 = y_2$.

Předpokládejme, že X není oddělitelný a zvolme dva zůzné body $y_1, y_2 \in X$, které nelze oddělit otevřenými množinami. Buď (U_i) spočetná lokální báze topologie v bodě y_1 a (V_i) spočetná lokální báze topologie v bodě y_2. Můžeme předpokládat, že $U_1 \supset U_2 \supset U_3 \supset \ldots$ a $V_1 \supset V_2 \supset V_3 \supset \ldots$ (Věta 10 odst. 1.5.). Pro každé $i \in \boldsymbol{N}$ je množina $U_i \cap V_i$ neprázdná a navíc $U_i \cap V_i \supset U_{i+1} \cap V_{i+1}$. Zvolme libovolně bod $x_i \in U_i \cap V_i$; dostáváme posloupnost (x_i) v X. Pro libovolné okolí U bodu y_1 existuje index i_0 tak, že $U_{i_0} \subset U$. Tedy pro každé $i \geq i_0$ platí $x_i \in U_i \cap V_i \subset U_{i_0} \cap V_{i_0} \subset U_{i_0} \subset U$ a (x_i) konverguje k y_1. Analogicky dostaneme, že (x_i) konverguje k y_2. Neexistuje-li tedy v X posloupnost, konvergující ke dvěma různým bodům, X musí být oddělitelný. Q.E.D.

References

[1] D. Krupka, O. Krupková. *Topologie a geometrie I: Obecná topologie*, SPN Praha, 1989