MATEMATICKÝ ÚSTAV
Slezská univerzita
Na Rybníčku 1, 746 01 Opava
DENNÍ STUDIUM

Analytická geometrie

Téma 5.: Shodná zobrazení

Definice 5.1. Zobrazení *f* euklidovského prostoru $\mathbb{E}$ do euklidovského prostoru $\mathbb{E}'$ se nazývá *shodné* (*izometrické*), jestliže zachovává vzdálenost bodů, tj. pro každé dva body X, Y $\in \mathbb{E}$ je $|f(X), f(Y)| = |X, Y|$.

Věta 5.2. Každé shodné zobrazení je prosté a afinní, tj. zobrazuje navzájem různé kolineární body opět na různé kolineární body a zachovává dělící poměr tří bodů.

Věta 5.3. Afinní zobrazení euklidovského prostoru $\mathbb{E}(\mathbf{V})$ do euklidovského prostoru $\mathbb{E}'(\mathbf{V}')$ je shodné právě tehdy, když jeho asociované zobrazení φ zachovává velikost vektoru, tj. $\mathbf{u} \in \mathbf{V} \Rightarrow |\varphi(\mathbf{u})| = |\mathbf{u}|$.

Věta 5.4. Afinní zobrazení *f*: $\mathbb{E}(\mathbf{V}) \rightarrow \mathbb{E}'(\mathbf{V}')$ je shodné právě tehdy, když jeho asociované zobrazení φ zachovává skalární součin, tj. pro každé dva vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$ platí
$\varphi(\mathbf{u}) \cdot \varphi(\mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$.

Věta 5.5. Každé shodné zobrazení zachovává velikost úhlu.

Definice 5.6. Dvě neprázdné množiny $\mathbf{U} \subset \mathbb{E}$, $\mathbf{U}' \subset \mathbb{E}'$ (**U**, **U**′ se také nazývají *geometrické útvary*) nazýváme *shodnými*, existuje-li shodné zobrazení *f*: $\mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}'$, pro něž platí *f*(**U**) = **U**′.

Věta 5.7. Z definice shodného zobrazení plyne:
a) Obrazem úsečky AB je úsečka *f*(A)*f*(B) shodná s AB.
b) Obrazem polopřímky AB je polopřímka *f*(A)*f*(B), obrazy opačných polopřímek jsou opačné polopřímky, obrazem přímky AB je přímka *f*(A)*f*(B).
c) Obrazem poloroviny pA je polorovina *f*(p)*f*(A), obrazy opačných polorovin jsou opačné poloroviny.
d) Obrazem úhlu AVB je úhel *f*(A)*f*(V)*f*(B) shodný s úhlem AVB.
e) Obrazy rovnoběžných přímek jsou přímky rovnoběžné.
f) Obrazem kružnice k(S,r) je kružnice k′(*f*(S),r).

Věta 5.8. Věta o určenosti shodného zobrazení.

Nechť $P_0, P_1, \ldots, P_n$ jsou lineárně nezávislé body prostoru $\mathbb{E}_n$ a $P_0', P_1', \ldots, P_n'$ jsou body prostoru $\mathbb{E}'$. Nutnou a postačující podmínkou pro to, aby existovalo shodné zobrazení f: $\mathbb{E}_n \to \mathbb{E}'$, pro které $f(P_i)$ P_i', $i = 0,1,\ldots,n$ je, aby platilo $\left|P_i', P_j'\right| = \left|P_i, P_j\right|$, $i, j = 0,1,\ldots,n$. Jsou-li tyto vztahy splněny, existuje právě jedno shodné zobrazení f s uvedenými vlastnostmi.

Věta 5. 9. Věta o analytickém vyjádření shodného zobrazení.
Buď $\langle P; \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n \rangle$ kartézská báze euklidovského prostoru $\mathbb{E}_n$, $\langle Q; \mathbf{g}_1, \ldots, \mathbf{g}_m \rangle$ kartézská báze euklidovského prostoru $\mathbb{E}_m$. Buď f shodné zobrazení $\mathbb{E}_n \to \mathbb{E}_m$ a φ jeho asociované zobrazení.

Nechť
$$\varphi(\mathbf{e}_i) = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}\mathbf{g}_j , \qquad f(P) = Q + \sum_{j=1}^{m} b_j \mathbf{g}_j ,$$
$$X = P + \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{e}_i , \qquad f(X) = Q + \sum_{j=1}^{m} x_j' \mathbf{g}_j .$$

Pak má shodné zobrazení f: $\mathbb{E}_n \to \mathbb{E}_m$ analytické vyjádření $x_j' = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i + b_j$, j $1,\ldots,m$,

přičemž pro matici
$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

platí
$$\sum_{j=1}^{m} a_{rj} \cdot a_{sj} = \delta_{rs}, \quad r, s = 1,\ldots,n, \quad \text{tj. } A.A^{T} = I.$$

Definice 5.10. Shodné zobrazení f: $\mathbb{E}_n \to \mathbb{E}_n$ se nazývá *shodná transformace* (*shodnost*) prostoru $\mathbb{E}_n$.

Věta 5.11. Množina všech shodností prostoru $\mathbb{E}_n$ tvoří vzhledem k operaci skládání zobrazení grupu, která je podgrupou afinní grupy. Je to tzv. *grupa shodností prostoru* $\mathbb{E}_n$ nebo *Euklidova grupa.*

Věta 5.12. Buď f shodnost prostoru $\mathbb{E}_n$, $\langle P; \mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_n \rangle$ kartézská báze prostoru $\mathbb{E}_n$ a nechť vzhledem k ní má f analytické vyjádření
$$x_j' = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i + b_j , j = 1,\ldots,n.$$
Pak matice (a_{ij}) je ortogonální.

Věta 5.13. Každá shodnost prostoru $\mathbb{E}_n$ je ekviafinní transformace.

Definice 5.14. Zobrazení f prostoru $\mathbb{E}_n$ na $\mathbb{E}_n$ se nazývá *souměrnost podle nadroviny* σ, jestliže pro každý bod $X \in \sigma$ platí $f(X)$ X pro každý bod $X \in \mathbb{E}_n$, $X \notin \sigma$ platí, že střed dvojice $X, f(X)$ patří σ a přímka $X f(X)$ je kolmá k nadrovině σ.

Věta 5.15. Souměrnost podle nadroviny prostoru $\mathbb{E}_n$ je shodnost prostoru $\mathbb{E}_n$.

Věta 5.16. Souměrnost podle nadroviny má právě nadrovinu samodružných bodů.

Věta 5.17. Souměrnost podle nadroviny je zobrazení involutorní.

Věta 5.18. Souměrnost podle nadroviny je jednoznačně určena buď nadrovinou samodružných bodů nebo jednou dvojicí odpovídajících si nesplývavých bodů.

Věta 5.19. Buď v E_n zvolena kartézská soustava souřadnic. Zobrazení f nechť je souměrnost podle nadroviny prostoru E_n, jejíž nadrovina samodružných bodů má rovnici

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n + c = 0 \quad (c_1, c_2, \ldots, c_n) \neq \mathbf{o}.$$

Pak f má analytické vyjádření

$$x_i' = x_i + \alpha_i(c_1x_1 + \cdots + c_nx_n + c),\ i = 1,\ldots,n\text{, kde } \alpha_i = \frac{-2c_i}{\sum_{j=1}^{n} c_j^2}.$$

Věta 5.20. Věta o rozkladu.
Ke každé shodnosti f euklidovského prostoru E_n existuje k souměrností podle nadrovin takových, že f je jejich složením a $k \leq n+1$.

Shodnost na přímce E_1

Věta 5.21. Buď v E_1 zvolena kartézská soustava souřadnic $\langle P; \mathbf{e}_1 \rangle$. Vzhledem k ní lze shodnost vyjádřit právě jednou z rovnic:

(i) $x' = x + a$

(ii) $x' = -x + a, \quad a \in \mathbb{R}$

Věta 5.22. Shodnost na přímce je určena dvěma dvojicemi odpovídajících si bodů, pro něž platí $|X,Y| = |X',Y'|$. Neidentická shodnost na přímce má nejvýš jeden samodružný bod.

Shodnost v rovině E_2

Věta 5.23. Buď v euklidovské rovině zvolena kartézská soustava souřadnic $\langle P; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle$. Vzhledem k ní lze shodnost analyticky vyjádřit právě jednou ze soustav rovnic:

(i) $\begin{aligned} x' &= ax - by + e \\ y' &= bx + ay + f \end{aligned}$ (ii) $\begin{aligned} x' &= ax + by + e \\ y' &= bx - ay + f, \end{aligned}$

kde $a^2 + b^2 = 1$ a tedy rovnice shodností lze psát ve tvaru:

(i´) $\begin{aligned} x' &= x\cos\alpha - y\sin\alpha + e \\ y' &= x\sin\alpha + y\cos\alpha + f \end{aligned}$ (ii´) $\begin{aligned} x' &= x\cos\alpha + y\sin\alpha + e \\ y' &= x\sin\alpha - y\cos\alpha + f. \end{aligned}$

Rovnice (i) resp. (i´) vyjadřují shodnosti přímé, rovnice (ii) resp. (ii´) shodnosti nepřímé.

Věta 5.24. Každá neidentická shodnost v rovině má buď přímku samodružných bodů nebo právě jeden samodružný bod nebo nemá žádný samodružný bod.

Věta 5.25. Každá shodnost v rovině má buď všechny směry samodružné nebo právě dva navzájem ortogonální samodružné směry nebo nemá žádný samodružný směr.

Definice 5.26. Shodnost v $\mathbb{E}_2$, která má právě jeden samodružný bod S se nazývá *rotace kolem bodu* S *o úhel* α (viz rovnice (i´)). V případě $\alpha \neq \pi$ nemá žádný samodružný směr, pro $\alpha = \pi$ je každý její směr samodružný a nazývá se *středová souměrnost*.
Nepřímá shodnost v $\mathbb{E}_2$, která nemá přímku samodružných bodů, se nazývá *posunutá souměrnost* (*posunuté zrcadlení*).

Přehled typů shodností v rovině euklidovské podle samodružných bodů a směrů.

samodružné směry / sam. body	žádný	právě dva ortogonální	každý
žádný	-	posunutá souměrnost	posunutí
právě jeden	rotace	-	středová souměrnost
přímka	-	osová souměrnost	-
každý	-	-	identita

Věta 5.27. Vzhledem ke vhodně volené kartézské soustavě souřadnic v $\mathbb{E}_2$ lze rovnice shodnosti uvést na jednodušší tvary:
Identita $x' = x \quad y' = y.$
Rotace kolem počátku soustavy souřadnic o úhel α:

$$x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha$$
$$y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha.$$

Translace o vektor (a,b):

$$x' = x + a$$
$$y' = y + b.$$

Středová souměrnost se středem v počátku:

$$x'\text{-}x$$
$$y' = -y.$$

Osová souměrnost s osou souměrnosti v ose x:

$$x' = x$$
$$y' = -y.$$

Posunutá souměrnost:

$$x' = x + e$$
$$y' = -y.$$

Věta 5.28. Pomocí komplexní souřadnice bodu v rovině lze shodnosti v $\mathbb{E}_2$ vyjádřit následovně:

<u>Shodnosti přímé:</u> $z' = Az + B,\ |A| = 1,\ z$ – vzor, z'-obraz, $A, B, z, z' \in \mathbb{C}$.

Speciálně identita $z' = z$,
translace $z' = z + B,$
rotace $z' = Az$ (střed je v bodě O, úhel rotace α arg A),
resp. $z' = Az + B$ (střed je v bodě $s\ B\ (1 - A)^{-1}$),
středová souměrnost $z' = -z + B.$

Shodnosti nepřímé: $z' = A\bar{z} + B, \; |A| = 1, \; A, B, z, z' \in \mathbb{C}.$

Speciálně osová souměrnost $z' = A\bar{z} + B, \; A\bar{B} + B = 0$ (osa souměrnosti prochází bodem $\frac{B}{2}$ a s kladným směrem reálné osy svírá úhel $\frac{1}{2}$ arg A),

posunutá souměrnost $z' = A\bar{z} + B, \; A\bar{B} + B \neq 0$.

Skládání osových souměrností v euklidovské rovině

Věta 5.29. Ke každé shodnosti v euklidovské rovině existuje rozklad na nejvýše tři osové souměrnosti (Věta 5.20. pro $n = 2$).

Věta 5.30. Buďte f_1, f_2 dvě osové souměrnosti s osami souměrnosti o_1, o_2. Je-li
- a) $o_1 \; o_2$, pak složené zobrazení je identita,
- b) $o_1 \parallel o_2$, $o_1 \neq o_2$, pak složené zobrazení je translace o vektor **u**, kde **u** $\perp o_1$, $|\mathbf{u}| = 2 \, | o_1, o_2 |$ a orientace vektoru **u** je určena pořadím os o_1, o_2,
- c) $o_1 \parallel o_2$, $o_1 \cap o_2 \; \{S\}$, pak složené zobrazení je rotace se středem S a úhlem rotace rovným dvojnásobku orientovaného úhlu os o_1, o_2,
- d) speciálně, je-li $o_1 \perp o_2$, pak složené zobrazení je středová souměrnost se středem v průsečíku os.

Věta 5.31. Každou translaci lze nekonečně mnoha způsoby rozložit na dvě osové souměrnosti s osami rovnoběžnými, různými a kolmými na vektor translace v pořadí ve smyslu vektoru translace. Vzdálenost os je rovna polovině velikosti vektoru translace, přičemž jednu osu můžeme volit libovolně, druhá je vektorem translace již jednoznačně určena.

Věta 5.32. Každou rotaci lze nekonečně mnoha způsoby rozložit na dvě osové souměrnosti s osami různoběžnými, procházejícími středem rotace v pořadí ve smyslu úhlu rotace a svírajícími úhel rovný polovině úhlu rotace, přičemž jednu osu můžeme volit libovolně, druhá je již úhlem rotace jednoznačně určena.
Speciálně středovou souměrnost lze nekonečně mnoha způsoby rozložit na dvě osové souměrnosti s osami procházejícími středem souměrnosti, přičemž jednu osu volíme libovolně a druhá je na ni kolmá.

Věta 5.33. Buďte f_1, f_2, f_3 tři osové souměrnosti s osami o_1, o_2, o_3 navzájem různými.
- a) Jsou-li přímky o_1, o_2, o_3 rovnoběžné nebo různoběžné a procházejí-li týmž bodem S, potom je složené zobrazení *osová souměrnost*.
- b) Jsou-li aspoň dvě ze tří os různoběžné, přičemž třetí neprochází jejich průsečíkem, potom je složené zobrazení *posunutá souměrnost*.

Věta 5.34. Každá posunutá souměrnost se dá složit z osové souměrnosti a středové souměrnosti, přičemž střed středové souměrnosti neleží na ose osové souměrnosti.

Věta 5.35. Každá posunutá souměrnost se dá složit z osové souměrnosti a z posunutí ve směru osy souměrnosti.

<u>Shodnosti v prostoru E_3</u>

Definice 5.36. Souměrnost podle nadroviny σ z definice 5.14. se v prostoru E_3 nazývá *rovinovou souměrností.*

Věta 5.37. Každá shodnost v E_3 se dá složit z konečného počtu rovinových souměrností. Existuje rozklad, v němž stačí nejvýše čtyři souměrnosti.
Složením lichého počtu souměrností dostaneme shodnost nepřímou, složením sudého počtu shodnost přímou.

Věta 5.38. Buďte f_1, f_2 dvě rovinové souměrnosti s rovinami souměrnosti σ_1, σ_2. Jestliže

a) $\sigma_1\ \sigma_2$, pak složené zobrazení je *identita,*

b) $\sigma_1 \parallel \sigma_2$, $\sigma_1 \neq \sigma_2$, pak složené zobrazení je *translace* o vektoru $\mathbf{v} \perp \sigma_1$, $\mathbf{v} = 2\,|\sigma_1 . \sigma_2|$ a orientace je určena pořadím rovin σ_1, σ_2. Zobrazení nemá žádný samodružný bod.

c) $\sigma_1 \parallel \sigma_2$, $\sigma_1 \cap \sigma_2$ s, pak složené zobrazení je *otočení kolem osy* s o úhel 2φ, kde φ je odchylka rovin σ_1, σ_2 . Přímka s je přímkou samodružných bodů.

d) Speciálně, je-li $\sigma_1 \perp \sigma_2$, pak složené zobrazení je otočení kolem osy s o úhel π a nazývá se *osová souměrnost v prostoru*, přímka s – *osa souměrnosti* – je přímkou samodružných bodů. Osová souměrnost v prostoru je zobrazení involutorní.

Věta 5.39. Buďte f_1, f_2, f_3 tři rovinové souměrnosti s rovinami souměrnosti σ_1, σ_2, σ_3, které jsou po dvou k sobě kolmé. Tyto roviny se protínají v jediném bodě S. Složením rovinových souměrností f_1, f_2, f_3 (v libovolném pořadí) vznikne shodnost zvaná *souměrnost v prostoru podle středu* S. Bod S je jejím jediným samodružným bodem. Je to shodnost nepřímá a je involutorní.

Věta 5.40. Buďte $f_1, f_2, f_3,, f_4$ čtyři rovinové souměrnosti. Nechť $\sigma_1 \cap \sigma_2$ s, $\sigma_3 \nparallel \sigma_4 \perp$ s. Složené zobrazení nemá žádný samodružný bod a nazývá se *šroubový pohyb* (*torze*).

Věta 5.41. Všechny shodnosti v E_3 tvoří grupu. Množina všech přímých shodností tvoří její podgrupu, jejíž podgrupou je grupa translací s identitou.

Věta 5.42. Každá shodnost v prostoru E_3 se dá složit ze dvou involutorních shodností (rovinová, osová, středová souměrnost), tj. involutorní shodnosti generují grupu všech shodností prostoru E_3.