MATEMATICKÝ ÚSTAV
Slezská univerzita
Na Rybníčku 1, 746 01 Opava

DENNÍ STUDIUM

Analytická geometrie

Téma 4.: Podobná zobrazení

Definice 4.1. Zobrazení f euklidovského prostoru $\mathbb{E}$ do euklidovského prostoru $\mathbb{E}'$ se nazývá *podobné,* jestliže existuje kladné reálné číslo k tak, že pro každé dva body X, Y $\in \mathbb{E}$, X $\neq$ Y platí $|\, f(X), f(Y)\,| = k \cdot |\, X, Y\,|$. Číslo k se nazývá *koeficient podobnosti* (poměr podobnosti).

Věta 4.2. Každé shodné zobrazení je podobné s koeficientem $k = 1$. Stejnolehlost s koeficientem λ je podobné zobrazení, jehož koeficient je $|\,\lambda\,|$.

Věta 4.3. Podobné zobrazení je zobrazení prosté.

Věta 4.4. Každé podobné zobrazení euklidovského prostoru $\mathbb{E}_n$ do euklidovského prostoru $\mathbb{E}_m$ lze složit ze stejnolehlosti prostoru $\mathbb{E}_n$ a shodného zobrazení $\mathbb{E}_n \to \mathbb{E}_m$, respektive ze shodného zobrazení $\mathbb{E}_n \to \mathbb{E}_m$ a stejnolehlosti prostoru $\mathbb{E}_m$.

Věta 4.5. Každé podobné zobrazení je zobrazení afinní.

Věta 4.6. V podobném zobrazení je obrazem přímky přímka, obrazem úsečky úsečka, obrazem polopřímky polopřímka, obrazem dvou opačných polopřímek dvě polopřímky opačné, obrazem úhlu úhel shodný.

Věta 4.7. Věta o určenosti podobného zobrazení.
Nechť $P_o, P_1, \ldots, P_n$ jsou lineárně nezávislé body prostoru $\mathbb{E}_n$ a $P'_0, P'_1, \ldots, P'_n$ jsou body prostoru $\mathbb{E}'$. Pak afinní zobrazení prostoru $\mathbb{E}_n \to \mathbb{E}'$, které zobrazuje bod P_i na P'_i, $i = 0,1,\ldots,n$ je podobné zobrazení právě tehdy, když existuje reálné kladné číslo k takové, že $|\, P'_i, P'_j \,| = k \cdot |\, P_i, P_j \,|$ pro všechna $i, j = 0,1,\ldots,n$.

Věta 4.8. Věta o analytickém vyjádření podobného zobrazení.
Buď $\langle\, P; \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n \,\rangle$ kartézská báze euklidovského prostoru $\mathbb{E}_n$, $\langle\, Q; \mathbf{g}_1, \ldots, \mathbf{g}_m \,\rangle$ kartézské báze euklidovského prostoru $\mathbb{E}_m$. Buď f podobné zobrazení $\mathbb{E}_n \to \mathbb{E}_m$ s koeficientem k a φ jeho asociované zobrazení.

Nechť $\varphi(\mathbf{e}_i) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\mathbf{g}_j$, $i = 1,\dots,n$, $f(\mathrm{P}) = \mathrm{Q} + \sum_{j=1}^{m} \mathrm{b}_j\mathbf{g}_j$, $\mathrm{X} = \mathrm{P} + \sum_{i=1}^{m} \mathrm{x}_i\mathbf{e}_i$,

$f(\mathrm{X}) = \mathrm{Q} + \sum_{j=1}^{m} x'_j\mathbf{g}_j$.

Pak podobné zobrazení f: $\mathrm{E}_n \to \mathrm{E}_m$ má analytické vyjádření

$$x'_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_i + b_j \text{ , } j = 1,\dots,m, \text{ přičemž pro matici } A = (a_{ij})$$

$$\text{platí } \sum_{j=1}^{m} a_{rj} \cdot a_{sj} = k^2\delta_{rs}, \; r, s = 1,\dots,n, \text{ tj. } A \cdot A^{\mathrm{T}} = k^2 \mathrm{I}.$$

Definice 4.9. Podobné zobrazení f: $\mathrm{E}_n \to \mathrm{E}_n$ se nazývá *podobná transformace* prostoru E_n (*podobnost* prostoru E_n).

Věta 4.10. Buďte f_1, f_2 podobnosti prostoru E_n s koeficienty k_1, k_2. Potom složené zobrazení $f_2 \cdot f_1$ je také podobnost prostoru E_n s koeficientem $k_1 \cdot k_2$.

Věta 4.11. Buď f podobnost prostoru E_n s koeficientem k. Pak zobrazení f^{-1}: $\mathrm{E}_n \to \mathrm{E}_n$ je také podobnost prostoru E_n s koeficientem $\frac{1}{k}$.

Věta 4.12. Množina všech podobností prostoru E_n tvoří vzhledem k operaci skládání zobrazení grupu, tzv. *grupu podobností* prostoru E_n.

Věta 4.13. Grupa podobností euklidovského prostoru E_n obsahuje všechny shodnosti a všechny stejnolehlosti prostoru E_n, přičemž neexistuje žádná její vlastní podgrupa téže vlastnosti.

Věta 4.14. Podobnost má každý směr samodružný právě tehdy, když je to stejnolehlost nebo translace.

Věta 4.15. Podobnost, která není shodností má právě jeden samodružný bod (tzv. *střed podobnosti*).

<u>Podobnost v euklidovské rovině E_2</u>

Věta 4.16. Nechť f je podobnost s koeficientem k v rovině E_2. Zvolme v E_2 komplexní soustavu souřadnic. Vzhledem k ní se dá každá podobnost vyjádřit právě jednou z rovnic

(1) $z' = \mathrm{A}z + \mathrm{B}$

(2) $z' = \mathrm{A}\bar{z} + \mathrm{B}$, $A, B, z, \bar{z} \in \mathrm{C}$, $\mathrm{A} \neq 0$, kde $|A| = k$.

Definice 4.17. Podobnost, která není shodností, nazveme *vlastní podobností* ($k = |A| \neq 1$).

Věta 4.18. Podobnost je stejnolehlostí právě tehdy, když v rovnici $z' = \mathrm{A}z + \mathrm{B}$ platí $\mathrm{A} \in \mathrm{R} - \{0,1\}$. Pak A je koeficient stejnolehlosti a $|A|$ koeficient podobnosti.

Věta 4.19. Každou vlastní podobnost v E_2 lze složit ze stejnolehlosti a shodnosti v libovolném pořadí:

(1) $z' = \mathrm{A}z + \mathrm{B}$

$$z' = \frac{\mathrm{A}}{|\mathrm{A}|}\cdot z + \frac{\mathrm{B}}{|\mathrm{A}|} \qquad\qquad z' = |\mathrm{A}|\cdot z \quad \text{resp.}$$

$$z' = |\mathrm{A}|\cdot z + \frac{|\mathrm{A}|}{\mathrm{A}}\cdot \mathrm{B} \qquad\qquad z' = \frac{\mathrm{A}}{|\mathrm{A}|}\cdot z$$

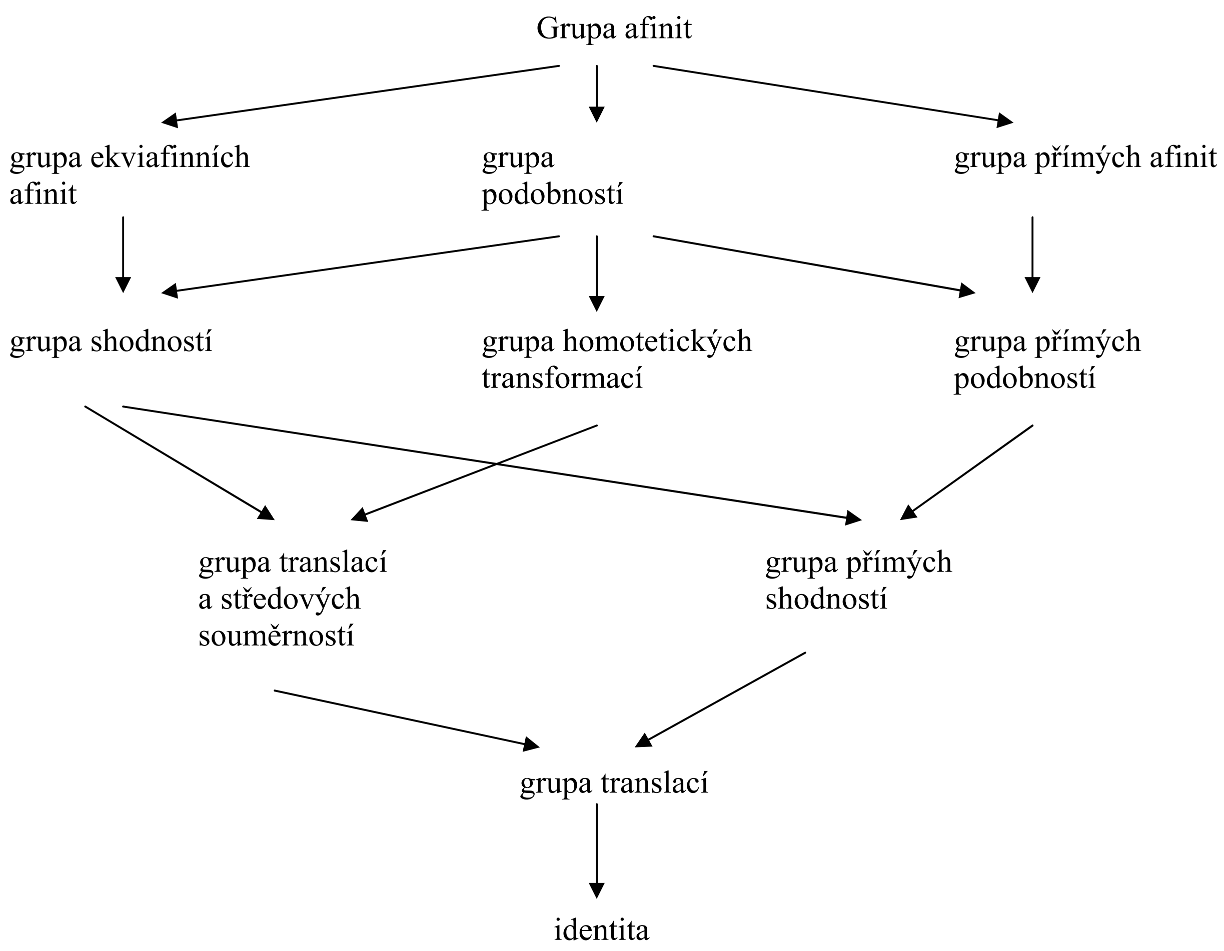
(2) $z' = \mathrm{A}\overline{z} + \mathrm{B}$

$$z' = \frac{\mathrm{A}}{|\mathrm{A}|}\cdot \overline{z} + \frac{\mathrm{B}}{|\mathrm{A}|} \qquad\qquad z' = |\mathrm{A}|\cdot z \quad \text{resp.}$$

$$z' = |\mathrm{A}|\cdot z + \frac{|\mathrm{A}|}{\overline{\mathrm{A}}}\cdot \overline{\mathrm{B}} \qquad\qquad z' = \frac{\mathrm{A}}{|\mathrm{A}|}\cdot \overline{z}.$$

Věta 4.20. Každá přímá podobnosti v $\mathbb{E}_2$ je buď stejnolehlost nebo je složením stejnolehlosti a rotace. Každá nepřímá podobnost je složením stejnolehlosti a osové souměrnosti.

<u>Přehled grup transformací v $\mathbb{E}_n$</u>



Sam.směry / Sam.body	0	Dva navzájem ortogonální	Každý směr samodružný
0	-	$x' = x + e$ $y' = -y$ $(e \neq 0)$ posunuté zrcadlení	$x' = x + e$ $y' = y + f$ translace o vektor $(e,f) \neq (0,0)$
1	$x' = x \cos\alpha + y \sin\alpha$ $y' = -x \sin\alpha + y \cos\alpha$ rotace o úhel α	-	$x' = -x$ $y' = -y$ středová souměrnost
přímka	-	$x' = x$ $y' = -y$ osová souměrnost	-
každý	-	-	$x' = x$ $y' = y$ identita

Grupa shodností roviny $\mathbb{E}_2$

Podgrupa přímých shodností

Množina nepřímých shodností

Podgrupa translací a rotací

Množina posunutých zrcadlení

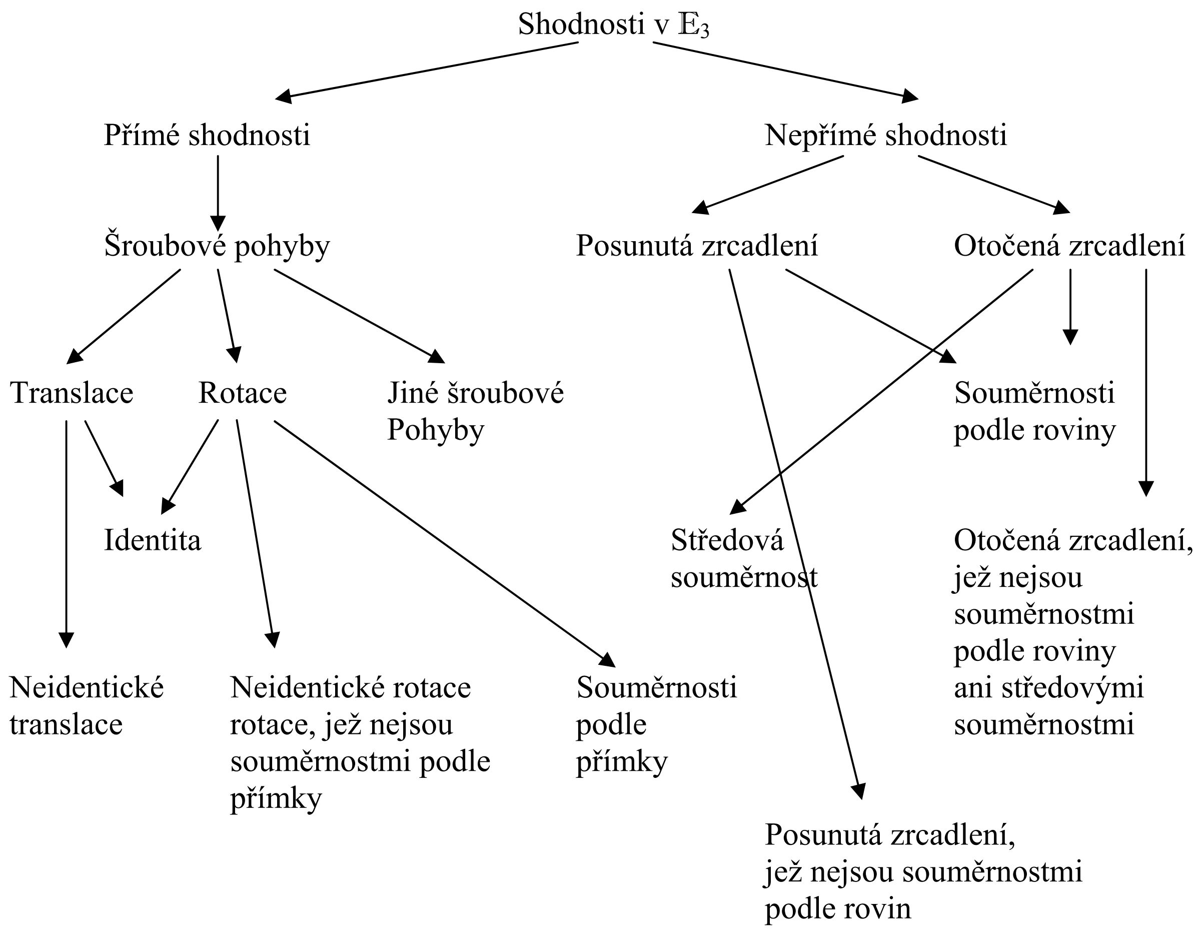
Množina osových souměrností

Podgrupa translací

Množina všech rotací

Podgrupy translací o vektory z daného l-směru

Podgrupy rotací s daným středem


Shodnosti v $\mathbb{E}_3$
Přímé shodnosti
Nepřímé shodnosti
Šroubové pohyby
Posunutá zrcadlení
Otočená zrcadlení
Translace
Rotace
Jiné šroubové Pohyby
Souměrnosti podle roviny
Identita
Středová souměrnost
Otočená zrcadlení, jež nejsou souměrnostmi podle roviny ani středovými souměrnostmi
Neidentické translace
Neidentické rotace rotace, jež nejsou souměrnostmi podle přímky
Souměrnosti podle přímky
Posunutá zrcadlení, jež nejsou souměrnostmi podle rovin