

# Deskriptivní geometrie

## Téma 1: Kuželosečky

### *Základní pojmy:*

**Elipsa:** Ohniska, hlavní a vedlejší vrcholy, střed, průvodiče, vnitřní body, vnější body, vnitřní úhel průvodičů, průměr, sdružené průměry, tečna, bod dotyku, normála, hlavní osa (poloosa), vedlejší osa (poloosa), excentricita, hyperoskulační kružnice, ohniskové větvy, řídicí kružnice, vrcholová kružnice, trojúhelníková konstrukce, proužková (součtová, rozdílová) konstrukce.

**Hyperbola:** Ohniska, hlavní a vedlejší vrcholy, střed, průvodiče, asymptoty, větvy, vnitřní body, vnější body, vnitřní úhel průvodičů, průměr, sdružené průměry, tečna, bod dotyku, hlavní osa (poloosa), vedlejší osa (poloosa), excentricita, hyperoskulační kružnice, ohniskové větvy, řídicí kružnice, vrcholová kružnice, rovnoosá hyperbola.

**Parabola:** Ohnisko, vrchol paraboly, osa, parametr paraboly, řídicí přímka paraboly, průvodiče, vnitřní body, vnější body, vnitřní úhel průvodičů, vrcholová tečna paraboly, tečna, normála paraboly, bod dotyku, hyperoskulační kružnice, ohniskové větvy, subtangenta, subnormála.

### *Základní definice a větvy:*

**V1.** Mějme dánu rotační kuželovou plochu  $\Phi$  a vlastní vrcholovou rovinu  $\rho'$ . Pak řez roviny  $\rho'$  s plochou  $\Phi$  se skládá ze „dvou“ přímek.

Nechť kuželosečka  $k$  je řezem roviny  $\rho$  s plochou  $\Phi$ . Kulové plochy, které jsou vepsány do  $\Phi$  a dotýkají se roviny  $\rho$ , nazveme Dandelinovými.

**V2.** Ohnisko kuželosečky je dotykovým bodem Dandelinovy kulové plochy. Řídicí přímka paraboly leží v rovině dotykové kružnice příslušné Dandelinovy kulové plochy.

**V3.** Množina všech bodů roviny, které mají od daného bodu a dané přímky (která neprochází daným bodem) stálý poměr vzdáleností  $\epsilon > 0$ , je v případě, že  $\epsilon < 1$  ( $\epsilon = 1$ ,  $\epsilon > 1$ ) elipsa (parabola, hyperbola).

**D4.** *Elipsa* je množina všech bodů v rovině, které mají od dvou pevných různých bodů stálý součet vzdáleností větší než vzdálenost pevných bodů.

**V5.** V každém bodě elipsy existuje právě jedna tečna; je to osa vnějšího úhlu jeho průvodičů.

**V6.** Ohniskové větvy:

**a)** Množina všech bodů elipsy, které jsou souměrně sdružené s jedním ohniskem elipsy podle jejích tečen, je kružnice se středem v druhém ohnisku a poloměru rovném velikosti  $2a$  hlavní osy elipsy.

**b)** Množina pat všech kolmic, spuštěných z ohnisek elipsy na její tečny je kružnice opsané kolem středu elipsy a poloměru rovném velikosti  $a$  hlavní poloosy elipsy.

**D7.** *Hyperbola* je množina všech bodů v rovině, které mají od dvou pevných různých bodů stálý kladný rozdíl vzdáleností menší než vzdálenost obou pevných bodů.

**V8.** V každém bodě hyperboly existuje právě jedna tečna; je to osa vnějšího úhlu jeho průvodičů.

**V9.** Ohniskové větvy:

**a)** Množina všech bodů hyperboly, které jsou souměrně sdružené s jedním ohniskem hyperboly podle jejích tečen, je kružnice se středem v druhém ohnisku a poloměru rovném velikosti  $2a$  hlavní osy hyperboly.

**b)** Množina pat všech kolmic, spuštěných z ohnisek hyperboly na její tečny je kružnice opsané kolem středu hyperboly a poloměru rovném velikosti  $a$  hlavní poloosy hyperboly.

**D10.** *Parabola* je množina všech bodů v rovině, které mají od přímky  $d$  a od bodu  $F$  stejnou vzdálenost.

**V11.** Tečna paraboly púlí vnější úhel průvodičů bodu dotyku. Normála paraboly púlí vnitřní úhel průvodičů bodu dotyku.

**V12.** Ohniskové větvy:

**a)** Množina všech bodů, které jsou souměrně sdružené s ohniskem paraboly podle jejích tečen, je řídící přímka paraboly.

**b)** Množina pat všech kolmic, spuštěných z ohniska na tečny paraboly je vrcholová tečna paraboly.

**V13.** **a)** Subtangenta paraboly je púlena vrcholem.

**b)** Subnormála paraboly má velikost  $p$  (parametr paraboly).

**V14.** Ve středové kolineaci v rovině kuželosečce počítané do prvního pole odpovídá v druhém poli kuželosečka, která je elipsou (kružnicí) nebo parabolou nebo hyperbolou podle toho, zda úběžnice prvního pole nemá s danou kuželosečkou žádný společný bod nebo má právě jeden společný bod nebo má dva různé body společné.

*Literatura:*

Lhotský, K., Deskriptivní geometrie pro zahraniční studenty, skriptum UK Praha 1988.

Machala, M., Srovnal, J., Konstrukční geometrie, skriptum PF UP Olomouc 1985.

Piják, V., a kol., Konštrukčná geometria, SPN, Bratislava 1985.

Suchohradský, O., a kol., Cvičení z deskriptivní geometrie a stereometrie, skriptum PF Hradec Králové 1977.

Urban, A., Deskriptivní geometrie I, SNTL, ALFA 1982.

*Cvičení:*

1) Sestrojte elipsu, je-li dáno:

- |  |  |
|--|--|
| a) ohniska $E, F$ , bod $M$ na elipse,                               | b) vrcholy $A, C$ , velikost poloosy $a$ , |
| c) ohniska $E, F$ , tečna $t$ ,                                      |  |
| d) ohnisko $F$ , tečny $t_1, t_2$ , velikost poloosy $a$ ,           |  |
| e) ohnisko $F$ , tečny $t_1, t_2$ , velikost excentricity $e$ ,      |  |
| f) tečna $t$ s bodem dotyku $T$ , střed $S$ , velikost poloosy $a$ . |  |

2) K elipse určené ohnisky  $E, F$  a hlavní poloosou  $a$  sestrojte tečny:

- |                                 |                               |
|---------------------------------|-------------------------------|
| a) z daného vnějšího bodu $R$ , | b) rovnoběžné s přímkou $s$ . |
|---------------------------------|-------------------------------|

Řešte užitím:      i) osově afinity,      ii) ohniskových vět.

3) Sestrojte hyperbolu, je-li dáno:

- |  |  |
|--|--|
| a) ohniska $E, F$ , bod $M$ na elipse,                             | b) vrcholy $A, C$ , velikost poloosy $a$ , |
| c) ohniska $E, F$ , tečna $t$ ,                                    |  |
| d) ohnisko $F$ , tečny $t_1, t_2$ , velikost poloosy $a$ ,         |  |
| e) ohnisko $F$ , tečny $t_1, t_2$ , velikost excentricity $e$ ,    |  |
| f) tečna $t$ s bodem dotyku $T$ , střed $S$ , hlavní poloosa $a$ . |  |

4) K hyperbole určené ohnisky  $E, F$  a hlavní poloosou  $a$  sestrojte tečny:

- |                                 |                               |
|---------------------------------|-------------------------------|
| a) z daného vnějšího bodu $R$ , | b) rovnoběžné s přímkou $s$ . |
|---------------------------------|-------------------------------|

5) Sestrojte parabolu, je-li dáno:

- |   |   |
|---|---|
| a) osa $o$ s ohniskem $F$ , bod $M$ ,                   | b) řídící přímka $d$ , body $M, N$ ,            |
| c) osa $o$ s ohniskem $F$ , tečna $t$ ,                 | d) ohnisko $F$ , tečna $t$ s bodem dotyku $T$ , |
| e) vrcholová tečna $v$ , tečna $t$ s bodem dotyku $T$ , |   |
| f) vrcholová tečna $v$ s vrcholem $V$ , tečna $t$ .     |   |

6) V osově afinitě  $(o, SS')$  sestrojte k dané kružnici  $k$  odpovídající křivku  $k'$  (sdružené průměry, přímo osy).

7) Ve středové kolineaci  $(S, o, u')$  sestrojte k dané kružnici  $k'$  odpovídající kuželosečku  $k$  (elipsu, hyperbolu, parabolu).