MATEMATICKÝ ÚSTAV
Slezská univerzita
Na Rybníčku 1, 746 01 Opava

DENNÍ STUDIUM

Analytická geometrie

Téma 3.: Afinní zobrazení

Definice 3.1. Zobrazení f afinního prostoru $\mathbb{A}$ do afinního prostoru $\mathbb{A}'$ se nazývá *afinní zobrazení*, jestliže má následující vlastnost: leží-li navzájem různé body A, B, C $\in \mathbb{A}$ na přímce, pak jejich obrazy f(A), f(B), f(C) buď splývají nebo jsou navzájem různé a (ABC) = (f(A)f(B)f(C)). Afinní zobrazení f nazveme *regulární (prosté),* jestliže pro každé A, B $\in \mathbb{A}$, A $\neq$ B platí f(A) $\neq f$(B).

Věta 3.2. Afinní zobrazení f zobrazí přímku buď na přímku nebo do jediného bodu.

Věta 3.3. Při afinním zobrazení f se dvě rovnoběžné přímky zobrazí buď do dvou rovnoběžných přímek nebo se každá z nich zobrazí do bodu.

Definice 3.4. Buďte $\mathbb{A}$, $\mathbb{A}'$ afinní prostory, **V**, **V**′ po řadě jejich zaměření, f afinní zobrazení $\mathbb{A}$ do $\mathbb{A}'$. Zobrazení φ vektorového prostoru **V** do vektorového prostoru **V**′, které je dáno předpisem φ (B - A) = f(B) - f(A) nazýváme *asociované lineární zobrazení* k danému afinnímu zobrazení f nebo také *asociovaný homomorfismus*.

Věta 3.5. Ke každému afinnímu zobrazení f afinního prostoru $\mathbb{A}$ do afinního prostoru $\mathbb{A}'$ existuje právě jeden asociovaný homomorfismus φ. Zobrazení f a φ jsou vázána vztahem $f(\mathrm{B} + \boldsymbol{u}) = f(\mathrm{B}) + \varphi(\boldsymbol{u})$ pro každý bod B $\in \mathbb{A}$ a každý vektor **u** $\in$ **V**.
Obráceně, je-li dáno lineární zobrazení, tj. homomorfismus $\varphi : \mathbf{V} \to \mathbf{V}'$ a dvojice bodů B $\in \mathbb{A}$, B′ $\in \mathbb{A}'$, pak existuje právě jedno afinní zobrazení f: $\mathbb{A} \to \mathbb{A}'$, jehož asociovaným homomorfismem je dané lineární zobrazení φ a obrazem bodu B při zobrazení f je bod B′. Zobrazení f je pro každý bod X $\in \mathbb{A}$ dáno předpisem f(X) = B′ + φ (X - B).

Věta 3.6. Afinní zobrazení f je právě tehdy prostým zobrazením afinního prostoru $\mathbb{A}$ do afinního prostoru $\mathbb{A}'$, je-li k němu asociovaný homomorfismus prostým zobrazením zaměření **V** prostoru $\mathbb{A}$ do zaměření **V**′ prostoru $\mathbb{A}'$. Afinní zobrazení f zobrazuje afinní prostor $\mathbb{A}$ na afinní prostor $\mathbb{A}'$ právě tehdy, zobrazuje-li asociované lineární zobrazení φ vektorový prostor **V** na vektorový prostor **V**′.

Věta 3.7. Věta o určení afinního zobrazení.

Afinní zobrazení f afinního prostoru $\mathbb{A}$ do afinního prostoru $\mathbb{A}'$ je jednoznačně určeno obrazy $f(P_0), f(P_1),\ldots,f(P_n)$ lineárně nezávislých bodů $P_0, P_1,\ldots,P_n \in \mathbb{A}_n$. K daným libovolně zvoleným bodům $P_0', P_1',\ldots,P_n' \in \mathbb{A}'$ existuje jediné afinní zobrazení f prostoru $\mathbb{A}$ do $\mathbb{A}'$ tak, že $f(P_j) = P_j'$ pro $j = 0,1,\ldots,n$.

Věta 3.8. Buď $\langle P;\mathbf{e_1},\ldots,\mathbf{e_n}\rangle$ báze afinního prostoru $\mathbb{A}_n$, Q bod afinního prostoru $\mathbb{A}_m$ a konečně $\mathbf{g_1},\ldots,\mathbf{g_n}$ soustava vektorů ve $\mathbf{V}_m(\mathbb{A}_m)$, pak existuje jediné afinní zobrazení f s asociovaným zobrazením φ, pro které $f(P) = Q$ a $\varphi(\mathbf{e_i}) = \mathbf{g_i}$, $i = 1,2,\ldots,n$.

Věta 3.9. Buď f bijektivní afinní zobrazení afinního prostoru $\mathbb{A}$ na afinní prostor $\mathbb{A}'$. Potom inverzní zobrazení f^{-1}: $\mathbb{A}' \rightarrow \mathbb{A}$ je opět zobrazení afinní. Je-li φ asociované zobrazení k f, je φ^{-1} asociované zobrazení k f^{-1}.

Definice 3.10. Vzájemně jednoznačné afinní zobrazení prostoru $\mathbb{A}$ na sebe se nazývá *afinní transformace prostoru* $\mathbb{A}$ (krátce *afinita* prostoru $\mathbb{A}$).

Věta 3.11. Množina všech afinních transformací prostoru $\mathbb{A}$ tvoří vzhledem k operaci skládání zobrazení grupu, tzv. *afinní grupu* prostoru $\mathbb{A}$.

Definice 3.12. Buď f afinita prostoru $\mathbb{A}$. Bod $X \in \mathbb{A}$, pro který platí $f(X) = X$, nazýváme *samodružným bodem afinity f*. Buď $\mathbb{p}$ přímka afinního prostoru $\mathbb{A}$. Její směr nazveme *samodružným směrem,* jestliže $f(\mathbb{p}) \parallel \mathbb{p}$.

Věta 3.13. Buď f afinita prostoru $\mathbb{A}$, φ její asociované zobrazení. Směr určený nenulovým vektorem $\mathbf{u}$ je samodružný, jestliže existuje $\lambda \in \mathbb{R}$ tak, že $\varphi(\mathbf{u}) = \lambda\mathbf{u}$. Jelikož φ je bijektivní, je $\lambda \neq 0$.

Definice 3.14. Nechť φ je asociované lineární zobrazení k afinitě f. Vektor $\mathbf{u}$, pro nějž platí $\varphi(\mathbf{u}) = \lambda\mathbf{u}$, se nazývá *vlastní vektor zobrazení* φ, číslo λ se nazývá *vlastní číslo zobrazení* φ, příslušné k vlastnímu vektoru $\mathbf{u}$.

Věta 3.15. Buď v afinním prostoru $\mathbb{A}_n$ zvolena afinní soustava souřadnic, vzhledem k níž má afinní transformace analytické vyjádření $x_j' = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_i + b_j$, $j = 1,2,\ldots,n$. Potom souřadnice samodružného bodu vyhovují soustavě rovnic

$$\begin{array}{l}
(a_{11}-1)x_1 + a_{21}x_2 + \cdots + a_{n1}x_n + b_1 = 0 \\
a_{12}x_1 + (a_{22}-1)x_2 + \cdots + a_{n2}x_n + b_2 = 0 \\
\vdots \qquad\qquad \ddots \qquad\qquad \vdots \\
a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \cdots + (a_{nn}-1)x_n + b_n = 0
\end{array}$$

Věta 3.16. Množina všech samodružných bodů afinity f afinního prostoru $\mathbb{A}_n$ buď tvoří afinní podprostor prostoru $\mathbb{A}_n$, nebo je to množina prázdná.

Věta 3.17. Buď v afinním prostoru A_n zvolena afinní soustava souřadnic, vzhledem k ní nechť má lineární zobrazení φ (asociované k afinitě f na A_n) analytické vyjádření $u'_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} u_i$, j = 1,2,…,n. Pak pro souřadnice vlastního vektoru **u** a k němu příslušné vlastní číslo λ platí

$$\lambda\, u_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} u_i \,, j = 1,2,\ldots,n. \qquad (1)$$

Věta 3.18. Soustava (1) homogenních lineárních rovnic má netriviální řešení právě, když

$$\det\left(a_j - \lambda\delta_{ij}\right) = 0\,, \quad \text{kde } \delta_{ij} \text{ je Kroneckerovo delta.} \qquad (2)$$

Definice 3.19. Rovnice (2) se nazývá *charakteristická rovnice lineárního zobrazení*.

Věta 3.20. Charakteristická rovnice lineárního zobrazení φ nezávisí na volbě afinní soustavy souřadnic.

Věta 3.21. Ke každému nenulovému kořenu λ_o charakteristické rovnice zobrazení φ existuje v zaměření **V** prostoru A_n alespoň jeden nenulový vektor **u**, pro který $\varphi(\mathbf{u}) = \lambda_o \mathbf{u}$. Vektor **u** generuje samodružný směr zobrazení φ.

Věta 3.22. Afinní zobrazení f afinního prostoru A do sebe je prosté právě tehdy, když nula není vlastním číslem zobrazení φ asociovaného k f.

Definice 3.23. Afinitu f afinního prostoru A, pro kterou platí $\varphi(\mathbf{u}) = \lambda\, \mathbf{u}$ pro každý vektor **u** ze zaměření **V** prostoru A, nazveme *homotetickou transformací*.

Definice 3.24. Afinitu f afinního prostoru A, pro níž každý bod je samodružný, nazýváme *identita* a označíme id.
Homotetickou afinitu f prostoru A, pro níž $\lambda = 1$, nazýváme *translace* (*posunutí*).
Homotetickou afinitu f prostoru A, pro níž $\lambda \neq 1$, nazýváme *stejnolehlost*.

Věta 3.25. Identita má vyjádření f(X) = X. Neidentická translace má vyjádření f(X) = X + **b**, vektor posunutí $\mathbf{b} \neq \mathbf{o}$ a nemá žádný samodružný bod.

Věta 3.26. Stejnolehlost f prostoru A má právě jeden samodružný bod S, tzv. střed stejnolehlosti. Stejnolehlost má vyjádření

f(X) = S + λ(X-S) resp.
f(X) = f(B) + λ(X-B).

Věta 3.27. Množina všech homotetických transformací prostoru A tvoří vzhledem k operaci skládání zobrazení grupu. Tato grupa je podgrupou grupy všech afinit prostoru A.

Věta 3.28. Grupa homotetických transformací a grupa všech afinit nejsou komutativní.

Věta 3.29. Grupa všech translací afinního prostoru A je komutativní podgrupou grupy všech homotetických transformací.

Definice 3.30. Zobrazení $f: \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ nazveme *involutorní,* platí-li: $f \circ f = \mathrm{id}$, tedy $f^{-1} = f$.

Definice 3.31. Afinitu f afinního prostoru $\mathbb{A}_n$, která není identitou a má nadrovimu samodružných bodů, nazýváme *základní afinitou prostoru* $\mathbb{A}_n$. Speciálně pro $n = 2$ ji nazýváme *osovou afinitou*, pro $n = 3$ *rovinovou afinitou.*

Věta 3.33. Základní afinita f afinního prostoru $\mathbb{A}$ je jednoznačně určena nadrovinou samodružných bodů a jedinou dvojicí odpovídajících si bodů $C \neq f(C) = C'$.

Definice 3.34. Směr generovaný vektorem $(C' - C)$ z věty 3.33. nazýváme *směrem afinity*. Patří-li tento směr do zaměření samodružné nadroviny ρ, nazýváme afinitu *elací.*

Věta 3.35. Buď v $\mathbb{A}_n$ zvolena afinní soustava souřadnic. Zobrazení f nechť je základní afinita prostoru $\mathbb{A}_n$, jejíž nadrovina samodružných bodů má rovnici $c_1x_1 + \cdots + c_nx_n + c = 0$. Pak afinita f má analytické vyjádření $x_i' = x_i + \alpha_i\left(c_1x_1 + \cdots + c_nx_n + c\right)$,

kde $\alpha_i = \dfrac{b_i' - b_i}{c_1b_1 + \cdots + c_nb_n + c}$, $i = 1,\ldots,n$, pro $B = \left[b_1,\ldots,b_n\right]$, $f(B) = \left[b_1',\ldots,b_n'\right]$, $f(B) \neq B$.

Věta 3.36. Ke každé afinitě f afinního prostoru $\mathbb{A}_n$ existuje k základních afinit $f_1, f_2,\ldots,f_k$ takových, že f je jejich složením a $k \leq n + 1$.

Definice 3.37. Buď f afinní zobrazení prostoru $\mathbb{A}_n$ do sebe, φ jeho asociované zobrazení. Nechť $\left\langle \mathbf{e_1},\ldots,\mathbf{e_n}\right\rangle$ je báze prostoru $\mathbf{V}_n(\mathbb{A}_n)$. Budiž $\varphi(\mathbf{e_i}) = \left(a_{i1}, a_{i2},\ldots,a_{in}\right)$, $i = 1,\ldots,n$. *Modulem afinního zobrazení f* vzhledem k dané bázi nazveme determinant matice (a_{ij}). Označíme jej $\det(a_{ij}) = D_f$.

Věta 3.38. Modul D_f afinního zobrazení f nezávisí na volbě báze prostoru $\mathbf{V}_n$.

Věta 3.39. Buď f afinní transformace prostoru $\mathbb{A}_n$; pak φ je izomorfizmus a $D_f \neq 0$ a obráceně, je-li $D_f \neq 0$, je f afinita.

Věta 3.40. Buďte f_1, f_2 dvě afinní transformace afinního prostoru $\mathbb{A}_n$ a nechť $f = f_2 \circ f_1$. Pak $D_f = D_{f_2} \bullet D_{f_1}$

Věta 3.41. Nechť f je identita na $\mathbb{A}_n$. Pak $D_f = 1$.

Věta 3.42. Buď f afinita prostoru $\mathbb{A}_n$. Pak $D_f^{-1} = \dfrac{1}{D_f}$.

Definice 3.43. Afinitu f prostoru $\mathbb{A}_n$ nazveme přímou, jestliže $D_f \rangle\, 0$, nepřímou, jestliže $D_f \langle\, 0$.

Definice 3.44. Afinitu f afinního prostoru $\mathbb{A}_n$ nazveme *ekviafinní* (resp. *unimodulární*), jestliže $\left|D_f\right| = 1$.

Věta 3.45. Množina všech přímých afinit prostoru $\mathbb{A}_n$ tvoří podgrupu grupy všech afinit prostoru $\mathbb{A}_n$, tzv. *grupu přímých afinit*.

Věta 3.46. Množina všech ekviafinních afinit tvoří podgrupu všech afinit prostoru $\mathbb{A}_n$, tzv. *ekviafinní grupu*. Její podgrupou je grupa přímých ekviafinních afinit, tj. afinit, pro něž $D_f = 1$.

Přehled grup transformací afinního prostoru $\mathbb{A}$.

$$
\begin{tikzcd}
 & \text{grupa afinit} \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\
\text{ekviafinní grupa} \arrow[dr] & \text{grupa homotetických transformací} \arrow[d] & \text{grupa přímých afinit} \arrow[dl] \\
 & \text{grupa translací} \arrow[d] & \\
 & \text{identita} &
\end{tikzcd}
$$

V afinní rovině $\mathbb{A}_2$ existuje 10 typů afinních transformací vzhledem k počtu samodružných směrů a bodů:

(a) Každý směr je samodružný a všechny body jsou samodružné (identita).
(b) Každý směr je samodružný a žádný bod není samodružný (translace).
(c) Každý směr je samodružný a právě jeden bod je samodružný (stejnolehlost).
(d) Jsou právě dva samodružné směry a přímka samodružných bodů (osová afinita).
(e) Je jeden samodružný směr a přímka samodružných bodů (osová afinita nazývaná elace).
(f) Jsou dva samodružné směry a jeden samodružný bod (afinitu lze rozložit na osovou afinitu a stejnolehlost).
(g) Je jeden samodružný bod a jeden samodružný směr (afinitu lze rozložit na elaci a stejnolehlost).
(h) Jsou dva samodružné směry a žádný samodružný bod (afinitu lze rozložit na osovou afinitu a translaci).
(i) Je jeden samodružný směr a žádný samodružný bod (afinitu lze rozložit na elaci a translaci).
(j) Není žádný samodružný směr a je jeden samodružný bod.

Vyjádřeno tabulkou:

sam. body směry	žádný	jeden	dva	každý
žádný	-	(i)	(h)	(b)
jeden	(j)	(g)	(f)	(c)
přímka	-	(e)	(d)	-
všechny	-	-	-	(a)

Literatura:

M. Sekanina a kol., Geometrie I, II, Státní pedagogické nakladatelství Praha 1986, 1988.
B. Bydžovský, Úvod do analytické geometrie, Praha 1956.
Busemann, Kelly: Projective Geometry and Projective Metrics. Academic Press New York 1953. Ruský překlad, Moskva 1957.
K. Burian, Geometrie I, skriptum PFO, Ostrava 1984.
E. Peschl, Analytická geometrie a lineární algebra, Praha 1971.
V. Havel, J. Holenda, Lineární algebra, SNTL/ALFA, Praha 1984.
B. Budínský, Analytická a diferenciální geometrie, SNTL, Praha 1983.
J. Janyška, A. Sekaninová, Analytická teorie kuželoseček a kvadrik, skripta MU, Brno 1996.
P. Horák, J. Janyška, Analytická geometrie, skripta MU, Brno 1997.
E. Čech, Základy analytické geometrie, Praha 1951.
J. Jachanová, L. Marková, H. Žáková, Cvičení z geometrie I, skriptum UP, Olomouc 1991.