MATEMATICKÝ ÚSTAV
Slezská univerzita
Na Rybníčku 1, 746 01 Opava

DENNÍ STUDIUM

Analytická geometrie

Téma 1.: Afinní prostor

Definice 1.1. Budiž dána neprázdná množina $\mathbb{A}$, vektorový prostor $\mathbf{V}_n$ nad komutativním tělesem $\mathbb{T}$ charakteristiky nula a konečně zobrazení - **:** $\mathbb{A} \times \mathbb{A} \to \mathbf{V}_n$ přiřazující uspořádané dvojici $(X,Y) \in \mathbb{A} \times \mathbb{A}$ vektor $Y - X \in \mathbf{V}_n$.

Nechť pro zobrazení - platí:

1) $A,B,C \in \mathbb{A}$ **:** $(B - A) + (C - B) = C - A$,

2) $\forall X \in \mathbb{A}$ a $\forall \mathbf{u} \in \mathbf{V}_n$ $\exists!\ Y \in \mathbb{A}$ tak, že $Y - X = \mathbf{u}$.

Uspořádanou trojici $(\mathbb{A}, \mathbf{V}_n, -)$ nazveme *n–rozměrným afinním prostorem nad tělesem* $\mathbb{T}$. Množina $\mathbb{A}$ se nazývá *nositelka* afinního prostoru $(\mathbb{A}, \mathbf{V}_n, -)$, číslo n je jeho *dimenze*. Nebude-li nebezpečí konfuze budeme hovořit většinou jen o afinním prostoru $\mathbb{A}_n$ (resp. $\mathbb{A}$); místo o afinním prostoru $(\mathbb{A}, \mathbf{V}_n, -)$.

Definice 1.2. Je–li $n = 0$, pak $\mathbb{A}_0$ je jednobodová množina. Afinní prostor $\mathbb{A}_1$ nazýváme *afinní přímkou*, afinní prostor $\mathbb{A}_2$ nazýváme *afinní rovinou*.

Definice 1.3. Je–li $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$), pak $\mathbb{A}_n$ nazýváme *reálný* (resp. *komplexní*) *afinní prostor*.

Věta 1.4. Požadavek 2) v definici 1.1. lze nahradit požadavkem

2') $\exists\ P \in \mathbb{A}$ tak, že zobrazení - : $\mathbb{A} \to \mathbf{V}_n$, $X \to X - P$ je vzájemně jednoznačné.

Věta 1.5. $\forall\ X \in \mathbb{A}$ a $\mathbf{u} \in \mathbf{V}_n$ $\exists!\ Y \in \mathbb{A}$ tak, že $Y - X = \mathbf{u}$.

Úmluva: Bod Y, pro který platí $Y - X = \mathbf{u}$ označíme $Y = X + \mathbf{u}$ a říkáme, že bod Y je součtem bodu X a vektoru **u**. Dále v celém článku znamená $\mathbb{T}$ těleso skalárů zaměření $\mathbf{V}_n$ afinního prostoru $\mathbb{A}_n$.

Věta 1.6. $\forall\ X,Y,Z,U \in \mathbb{A}$, $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}_n$ platí

1) $X - X = \mathbf{o}$,
2) $X - Y = -(Y - X)$,
3) $(X + \mathbf{u}) - Y = (X - Y) + \mathbf{u}$,
4) $X - (Y + \mathbf{u}) = (X - Y) - \mathbf{u}$,
5) $(X + \mathbf{u}) + \mathbf{v} = X + (\mathbf{u} + \mathbf{v})$,

6) (X - Y) + (Z - U) = (X - U) + (Z - Y)

Poznámka: Vzhledem k požadavku 2) z def. **1.1.** a úmluvě za větou **1.5.** lze definovat součet bodu X a konečného počtu vektorů rekurentně následujícím způsobem

$$\mathrm{X} + \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \cdots + \mathbf{u}_k = \left(\mathrm{X} + \mathbf{u}_1 + \cdots + \mathbf{u}_{k-1}\right) + \mathbf{u}_k .$$

Definice 1.7. Budiž dán afinní prostor $\mathbb{A}_n$ nad tělesem $\mathbb{T}$. Nechť P je libovolný bod prostoru $\mathbb{A}_n$ a $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n \rangle$ je báze zaměření $\mathbf{V}_n$. Uspořádanou $(n+1)$-tici $\langle \mathrm{P}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n \rangle$ nazýváme *afinní bází* prostoru $\mathbb{A}_n$, P nazýváme *počátek afinní báze*.

Definice 1.8. V $\mathbb{A}_n$ je dána báze $\langle \mathrm{P}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n \rangle$. Každému bodu X $\mathbb{A}_n$ je přiřazena právě jedna uspořádaná n-tice $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{T}_n$ tak, že platí

$$\mathrm{X} = \mathrm{P} + x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n . \tag{1}$$

Definice 1.9. Složky uspořádané n–tice $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ z věty **1.7.**se nazývají *souřadnice bodu* X vzhledem k afinní bázi $\langle \mathrm{P}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n \rangle$.

Platí–li (1), zapisujeme to $\mathrm{X} = [x_1, x_2, \cdots, x_n]$ vzhledem k $\langle \mathrm{P}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n \rangle$. Není–li nebezpečí nedorozumění, píšeme jen $\mathrm{X} = [x_1, x_2, \cdots, x_n]$. Zobrazení, které každému bodu A přiřazuje n–tici souřadnic se nazývá afinní soustava souřadnic.

Úmluva: Frází „vektor $\mathbf{u} \in \mathbf{V}_n$ má vzhledem k afinní bázi $\langle \mathrm{P}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n \rangle$ afinního prostoru $\mathbb{A}$ o zaměření $\mathbf{V}_n$ souřadnice $(u_1, u_2, \cdots, u_n)$" budeme rozumět skutečnost, že vektor **u** má vzhledem k bázi $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n \rangle$ vektorového prostoru $\mathbf{V}_n$ souřadnice $u_1, u_2, \cdots, u_n$ a označovat to $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \cdots, u_n)$.

Věta 1.10. Nechť vzhledem ke zvolené afinní soustavě souřadnic v afinním prostoru $(\mathbb{A}, \mathbf{V}_n, -)$ platí $\mathrm{A} = [a_1, a_2, \cdots, a_n]$, $\mathrm{B} = [b_1, b_2, \cdots, b_n]$, $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \cdots, u_n)$. Pak

$$\mathrm{A} + \mathbf{u} = [a_1 + u_1, \cdots, a_n + u_n],$$

$$\mathrm{B} - \mathrm{A} = (b_1 - a_1, \cdots, b_n - a_n).$$

Věta 1.11. Nechť jsou v $\mathbb{A}_n$ zvoleny dvě afinní soustavy souřadnic o bázích $\mathcal{B} = \langle \mathrm{P}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n \rangle$, $\mathcal{B}' = \langle \mathrm{P}', \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \cdots, \mathbf{e}'_n \rangle$. Nechť souřadnice $\mathrm{P}', \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \cdots, \mathbf{e}'_n$ vzhledem k bázi $\mathcal{B}$ jsou $\mathrm{P}' = [b_1, b_2, \cdots, b_n]$, $\mathbf{e}'_i = (a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in})$ $i = 1,\ldots,n$. Označíme-li souřadnice libovolného bodu $\mathrm{X} \in \mathbb{A}_n$ v bázi $\mathcal{B}$ $[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ a v bázi $\mathcal{B}'$ $[x'_1, x'_2, \cdots, x'_n]$ pak platí

$$\begin{aligned}
x_1 &= a_{11}x'_1 + \cdots + a_{n1}x'_n + b_1 \\
x_2 &= a_{12}x'_1 + \cdots + a_{n2}x'_n + b_2 \\
&\vdots \qquad \ddots \qquad \vdots \\
x_n &= a_{1n}x'_1 + \cdots + a_{nn}x'_n + b_n
\end{aligned} \tag{2}$$

přičemž $\det(a_{ik}) \neq 0$.

Definice 1.12. Rovnice (2) se nazývají *transformační rovnice* pro přechod od báze $\mathcal{B}$

k bázi $\mathcal{B}'$, det $\left(a_{ik}\right)$ nazýváme *determinant* příslušné *afinní transformace souřadnic* bodu X.

Definice 1.13. Nechť je dán afinní prostor $\mathbb{A}_n = (\mathbb{A}, \mathbf{V}_n, -)$ nad tělesem $\mathbb{T}$. Nechť **W** je podprostor $\mathbf{V}_n$ a nechť bod E $\in \mathbb{A}_n$. Podmnožina všech bodů X afinního prostoru $\mathbb{A}_n$, k nimž existuje vektor $\mathbf{x} \in \mathbf{W}$ tak, že platí

$$\mathrm{X} = \mathrm{E} + \mathbf{x}$$

se nazývá *podprostor afinního prostoru* $\mathbb{A}_n$, **W** se nazývá *zaměřením* podprostoru $\mathbb{M}$. Říkáme, že podprostor $\mathbb{M}$ je určen bodem E a zaměřením **W** a píšeme $\mathbb{M} = \{\mathrm{E}, \mathbf{W}\}$. *Dimenzí podprostoru* $\mathbb{M}$ rozumíme dimenzi zaměření **W** (tedy dim $\mathbb{M}$ = dim **W**). Má-li zaměření **W** podprostoru $\mathbb{M}$ bázi $\left\langle \mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_k \right\rangle$ označujeme podprostor $\mathbb{M} = \{\mathrm{E}, \mathbf{W}\}$ též způsobem

$$\mathbb{M} = \{\, \mathrm{E};\ \mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_k \,\}.$$

Poznámka: Budiž $\mathbb{M}$ podprostor dimenze *k* afinního prostoru $(\mathbb{A}, \mathbf{V}_n, -)$, **W** jeho zaměření. Potom je $(\mathbb{M}, \mathbf{W}, -)$ afinní prostor dimenze *k*. *Bází podprostoru* $\mathbb{M}$ pak rozumíme jakoukoli bázi afinního prostoru $(\mathbb{M}, \mathbf{W}, -)$. Je zřejmé, že pokud $k = n$, je $\mathbb{M} = \mathbb{A}$. Je-li podmnožina $\mathbb{M} \subset \mathbb{A}$ podprostorem afinního prostoru $\mathbb{A}$ (přesněji podprostorem afinního prostoru $(\mathbb{A}, \mathbf{V}_n, -)$), zapíšeme to $\mathbb{M} \subset\subset \mathbb{A}$.

Definice 1.14. V souhlase s definicí 1.2. nazýváme podprostory dimenzí 1 a 2 afinního prostoru $\mathbb{A}$ jeho *přímkami*, resp. *rovinami,* podprostory dimenze $n-1$ nazýváme *nadrovinami* afinního prostoru $\mathbb{A}_n$.

Věta 1.15. Podprostor $\mathbb{M}$ je určen jednoznačně zaměřením **W** a kterýmkoliv svým bodem zvaným *zakotvením* (tj. $\mathbb{M} = \{\mathrm{E}; \mathbf{W}\}$), je–li A $\in \mathbb{M}$, pak $\mathbb{M} = \{\mathrm{A}; \mathbf{W}\}$.

Věta 1.16. Nechť $\left\langle E, \mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_k \right\rangle$ je báze podprostoru $\mathbb{M} \subset\subset \mathbb{A}_n$. Bod X$\in \mathbb{A}_n$ je bodem $\mathbb{M}$ tehdy a jen tehdy, když existují $t_1, \ldots, t_k \in \mathbb{T}$ tak, že platí

$$\mathrm{X} = E + t_1\mathbf{u}_1 + \cdots + t_k\mathbf{u}_k\,. \tag{3}$$

Čísla $t_1, \ldots, t_k$ jsou bodem X a bází určená jednoznačně.

Definice 1.17. Vztah (3) se nazývá *vektorová rovnice podprostoru* $\mathbb{M}$; $t_1, \cdots, t_k$ se nazývají *parametry bodu* X vzhledem k bázi $\left\langle E, \mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_k \right\rangle$ nebo také *vnitřní afinní souřadnice* bodu X.

Věta 1.18. Nechť je v $\mathbb{A}_n$ dána afinní soustava souřadnic pomocí báze $\mathcal{B} = \left\langle \mathrm{P}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n \right\rangle$. Budiž $\mathbb{M} = \left\{\mathrm{E}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_k\right\}$ podprostor. Nechť vzhledem k bázi $\mathcal{B}$ platí E $= \left[a_1, a_2, \cdots, a_n\right]$, $\mathbf{u}_i = \left(a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}\right)$, $i = 1,\ldots,k$. Pak pro bod X $= \left[x_1, x_2, \cdots, x_n\right]$ platí: X $\in \mathbb{M}$ tehdy a jen tehdy, existují-li $t_1, \cdots, t_k \in \mathbb{T}$ tak, že

$$\begin{aligned}
x_1 &= a_{11}t_1 + \cdots + a_{k1}t_k + a_1\\
x_2 &= a_{12}t_1 + \cdots + a_{k2}t_k + a_2\\
\vdots &\qquad\quad \ddots \qquad\quad \vdots\\
x_n &= a_{1n}t_1 + \cdots + a_{kn}t_k + a_n
\end{aligned} \tag{4}$$

přičemž matice $\left(a_{ik}\right)$ má hodnost $h = k$.

Definice 1.19. Rovnice (4) se nazývají *parametrické rovnice podprostoru* $\mathbb{M}$ v afinní soustavě souřadnic o bázi $\mathcal{B} = \langle P, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n \rangle$, v prostoru $\mathbb{A}_n$.

Věta 1.20. Průnik $\mathbb{M} \cap \mathbb{N}$ podprostorů $\mathbb{M} = \{A; \mathbf{W}\}$, $\mathbb{N} = \{B; \mathbf{W}'\}$ afinního prostoru $\mathbb{A}_n$ je buď prázdná množina nebo podprostor afinního prostoru $\mathbb{A}_n$. V druhém případě je jeho zaměření průnikem zaměření podprostorů $\mathbb{M}$ a $\mathbb{N}$ a platí $\dim(\mathbb{M} \cap \mathbb{N}) = \dim(\mathbf{W} \cap \mathbf{W}')$.

Věta 1.21. Nechť $\mathbb{M}$, $\mathbb{N}$ jsou podprostory prostoru $\mathbb{A}_n$. Podprostor $\mathbb{S}$ afinního prostoru $\mathbb{A}_n$ nazveme spojením podprostorů $\mathbb{M}$, $\mathbb{N}$ a označujeme $\mathbb{S} = \mathbb{M} + \mathbb{N}$, když platí

1) $\mathbb{M} \subset\subset \mathbb{S}$, $\mathbb{N} \subset\subset \mathbb{S}$,

2) platí–li pro libovolný další podprostor $\mathbb{S}' \subset\subset \mathbb{A}_n$,

$\mathbb{M} \subset\subset \mathbb{S}'$ a $\mathbb{N} \subset\subset \mathbb{S}'$, pak platí též $\mathbb{S} \subset\subset \mathbb{S}'$.

Věta 1.22. Jsou dány podprostory $\mathbb{M} = \{A; \mathbf{W}\}$, $\mathbb{N} = \{B; \mathbf{W}'\}$ afinního prostoru $\mathbb{A}_n$. Pak $\mathbb{M} + \mathbb{N} = \{A; \mathbf{W} + \mathbf{W}' + [B - A]\}$, kde $[B - A]$ je podprostor $\mathbf{V}$ generovaný vektorem $B - A$.

Definice 1.23. Jsou dány podprostory $\mathbb{M} = \{A; \mathbf{W}\}$, $\mathbb{N} = \{B; \mathbf{W}'\}$ afinního prostoru $\mathbb{A}_n$. Je–li $\mathbf{W} \subset \mathbf{W}'$ říkáme, že $\mathbb{M}$ *je rovnoběžný s* $\mathbb{N}$ a píšeme $\mathbb{M} \,||\, \mathbb{N}$.

Věta 1.24. Je–li $\mathbb{M} \,||\, \mathbb{N}$, pak $\dim \mathbb{M} \leq \dim \mathbb{N}$.

Věta 1.25. $\mathbb{M} \,||\, \mathbb{N}, \mathbb{N} \,||\, \mathbb{L} \Rightarrow \mathbb{M} \,||\, \mathbb{L}$.

Věta 1.26. Je–li $\mathbb{M} \,||\, \mathbb{N}$, pak buď $\mathbb{M}$, $\mathbb{N}$ nemají společné body nebo $\mathbb{M} \subset \mathbb{N}$.

Věta 1.27. Je dán podprostor $\mathbb{M} = \{B; \mathbf{W}_k\}$ afinního prostoru $\mathbb{A}_n$. Nechť $A \in \mathbb{A}_n$, pak je bod A obsažen právě v jednom podprostoru $\mathbb{N}$, pro který platí $\dim \mathbb{N} = k$ a $\mathbb{N} \,||\, \mathbb{M}$.

Věta 1.28. Jsou dány podprostory $\mathbb{M} = \{A; \mathbf{W}\}$, $\mathbb{N} = \{B; \mathbf{W}'\}$. $\mathbb{N} \subset \mathbb{M}$ tehdy a jen tehdy, když $\mathbf{W}' \subset \mathbf{W}$ a $B - A \in \mathbf{W}$.

Věta 1.29. Nechť $\mathbb{M} = \{A; \mathbf{W}\}$, $\mathbb{N} = \{B; \mathbf{W}'\}$, kde báze zaměření $\mathbf{W}$ je tvořena vektory $\langle \mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_k \rangle$ a báze zaměření $\mathbf{W}'$ je tvořena vektory $\langle \mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_h \rangle$. Nechť $\dim(\mathbf{W} + \mathbf{W}') = s$, $\dim(\mathbb{M} + \mathbb{N}) = s'$. Pak každá z následujících podmínek je podmínkou nutnou a postačující proto, aby průnik $\mathbb{M}$ a $\mathbb{N}$ byl neprázdný:

1) $s = s'$,

2) $B - A \in \mathbf{W} + \mathbf{W}'$,

3) $B - A$ je lineární kombinací vektorů. $\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_h$

Věta 1.30. Nechť podprostory $\mathbb{M}$, $\mathbb{N}$ z věty 1.28. mají neprázdný průnik. Pak platí

$$\dim \mathbb{M} + \dim \mathbb{N} = \dim(\mathbb{M} \cap \mathbb{N}) + \dim(\mathbb{M} + \mathbb{N}).$$

Věta 1.31. Nechť jsou dány podprostory $\mathbb{M}$, $\mathbb{N}$ afinního prostoru $\mathbb{A}$ z věty 1.28. a nechť platí také stejné označení. Pak každá z následujících podmínek je nutnou a postačující proto, aby $\mathbb{M} \cap \mathbb{N}$ byl právě jednobodový:

1) $s = s' = \dim \mathbb{M} + \dim \mathbb{N}$,

2) $B - A \in \mathbf{W} + \mathbf{W}'$, $\mathbf{W} \cap \mathbf{W}' = \{\mathbf{o}\}$,

3) $B - A$ je lineární kombinací vektorů $\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_h$, přičemž vektory

$\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_h$ jsou lineárně nezávislé.

Věta 1.32. Nechť v $\mathbb{A}_n$ je zvolena afinní soustava souřadnic. Potom platí:

I. Ke každé nadrovině ρ afinního prostoru $\mathbb{A}_n$ existuje uspořádaná $(n+1)$-tice $(a_1, a_2, \cdots, a_n, b)$ taková, že

1) $(a_1, a_2, \cdots, a_n) \neq (0,...,0)$,

2) $\rho = \{X \in \mathbb{A}_n, X = [x_1, x_2, \cdots, x_n];\ a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + b = 0\}$.

II. Nechť $(a_1, a_2, \cdots, a_n, b)$ je taková uspořádaná $(n+1)$-tice, že $(a_1, a_2, \cdots, a_n) \neq (0,...,0)$, potom množina $\{X \in \mathbb{A}_n, X = [x_1, x_2, \cdots, x_n];\ a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + b = 0\}$ je nadrovina prostoru $\mathbb{A}_n$.

Definice 1.33. Platí–li o nadrovině ρ afinního prostoru $\mathbb{A}_n$ (A, V, -), že $\rho = \{X \in \mathbb{A}_n, X = [x_1, x_2, \cdots, x_n];\ a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + b_1 = 0\}$,

$(a_1, a_2, \cdots, a_n) \neq (0,...,0)$ říkáme, že ρ má v dané soustavě souřadnic *obecnou rovnici*

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + b_1 = 0 .$$

Věta 1.34. Nadrovina $\rho = \{E, \mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_k\}$ v $\mathbb{A}_n$, kde vzhledem k dané afinní soustavě souřadnic je $A = [a_1, a_2, \cdots, a_n]$, $\mathbf{u}_i = (u_{i1}, u_{i2}, \cdots, u_{in})$, $i = 1,...,n-1$ a $X = [x_1, x_2, \cdots, x_n]$ je její libovolný bod, má obecnou rovnici

$$\begin{vmatrix} x_1 - a_1 & x_2 - a_2 & \cdots & x_n - a_n \\ u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n-11} & u_{n-12} & \cdots & u_{n-1n} \end{vmatrix} = 0 \qquad (5)$$

Věta 1.35. V $\mathbb{A}_n$ je dána afinní soustava souřadnic. Aby vektor $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \cdots, u_n)$ patřil do zaměření nadroviny ρ**:** $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + b_1 = 0$ je nutné a stačí, aby jeho souřadnice splňovaly rovnici $a_1u_1 + \cdots + a_nu_n = 0$.

Zobecněním věty 1.32. je následující věta:

Věta 1.36. Nechť v $\mathbb{A}_n$ je dána afinní soustava souřadnic. Potom platí:

I. Ke každému podprostoru afinního prostoru $\mathbb{A}_n$ existuje matice

$$A' = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-k1} & \cdots & a_{n-kn} & b_{n-k} \end{bmatrix} \qquad (6)$$

taková, že

1) podmatice

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-k1} & \cdots & a_{n-kn} \end{bmatrix} \tag{7}$$

má hodnost $h = n{-}k$.

2) $\mathbb{M}_k = \{X \in \mathbb{A}_n,\ X = [x_1, x_2, \cdots, x_n];\ (8)\}$

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n + b_1 &= 0 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n + b_2 &= 0 \\ \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ a_{n-k1}x_1 + \cdots + a_{n-kn}x_n + b_{n-k} &= 0 \end{aligned} \tag{8}$$

II. Pro každou matici A' typu (6) takovou, že matice A ze (7) má hodnost $h = n{-}k$ je množina $\mathbb{M}_k = \{X \in \mathbb{A}_n,\ X = [x_1, x_2, \cdots, x_n];\ (8)\}$ podprostorem dimenze k afinního prostoru $\mathbb{A}_n$.

Definice 1.37. Platí–li o podprostoru $\mathbb{M}_k$, že $\mathbb{M}_k = \{X \in \mathbb{A}_n,\ X = [x_1, x_2, \cdots, x_n];\ (8)\}$, kde matice A má hodnost $h = n{-}k$, pak soustavu (8) nazýváme *soustavou obecných rovnic podprostoru* $\mathbb{M}$.

Definice 1.38. Nechť A, B jsou dva různé body afinního prostoru $\mathbb{A}_n$. Bod X nechť je bod přímky AB takový, že $X \neq B$. *Dělicím poměrem bodu* X vzhledem k uspořádané dvojici (A, B) nazveme prvek $k \in \mathbb{T}$, pro který platí X - A = k(X - B) a označujeme jej k = (ABX). Body A, B nazýváme *základními body dělicího poměru.*

Věta 1.39. Dělicí poměr k = (ABX) bodů A, B, X je těmito body určen jednoznačně.

Věta 1.40. Nechť $A \neq B$ jsou dva body afinního prostoru $\mathbb{A}_n$. Pak zobrazení φ, které každému bodu X přímky AB s výjimkou bodu B přiřazuje dělicí poměr k = (ABX), je bijektivní zobrazení množiny bodů přímky AB bez bodu B na množinu $\mathbb{T} \setminus \{1\}$. Je–li X = A + t(B - A) parametrické vyjádření přímky AB, pak

$$\varphi\colon AB \setminus \{B\} \to \mathbb{T} \setminus \{1\} \text{ je dáno vztahem } k = \frac{t}{t-1}.$$

Definice 1.41. Nechť jsou dány dva různé body A, B. Bod S = A + $\frac{1}{2}$(B - A) se nazývá *střed uspořádané dvojice bodů* (A,B).

Věta 1.42. Střed dvojice (A,B) je roven středu dvojice (B,A).

Definice 1.43. Afinní prostor $\mathbb{A}_n$ nad uspořádaným tělesem **T** se nazývá *orientovaným*, je–li jeho zaměření $\mathbf{V}_n$ orientovaným vektorovým prostorem. Afinní bázi $\langle P, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n \rangle$ nazveme kladnou, je–li kladná báze $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n \rangle$ ve $\mathbf{V}_n$.

Poznámka: Vše, co je řečeno o orientaci afinního prostoru, platí i pro všechny jeho podprostory.

Definice 1.44. Zvolme na přímce $\mathbb{p}$ afinní soustavu souřadnic o bázi $\langle P, \mathbf{u} \rangle$. Nechť

$X = P + x\mathbf{u}$, $Y = P + y\mathbf{u}$ jsou libovolné body přímky $\mathbb{p}$. Zavedeme–li na $\mathbb{p}$ binární relaci $\preceq$ podmínkou

$$X \preceq Y \;\Leftrightarrow\; x \le y,$$

je tato relace (úplné) *uspořádání přímky* $\mathbb{p}$. Budeme je nazývat uspořádání určené afinní soustavou souřadnic o bázi $\langle P, \mathbf{u}\rangle$, a že "X je před bodem Y" nebo "bod Y je za bodem X", když $X \preceq Y$ a $X \neq Y$ (zapisujeme pouze $X \prec Y$) a budeme říkat, že "X je rovno Y nebo je před Y", případně, že "X je rovno Y nebo Y je za X" v případě, že $X \preceq Y$.

Věta 1.45. Uspořádání přímky $\mathbb{p}$ určené dvěma afinními soustavami souřadnic o bázích $\langle P, \mathbf{u}\rangle$ a $\langle Q, k\mathbf{u}\rangle$, $k \in \mathbb{T}$ jsou stejná právě když $k > 0$ a opačná právě, když $k < 0$.

Věta 1.46. Na přímce $\mathbb{p}$ existují právě dvě uspořádání určená afinními soustavami souřadnic a jsou k sobě opačná.

Věta 1.47. Nechť $A, B \in \mathbb{p}$, $A \neq B$. Pak existuje právě jedno uspořádání $\preceq$ přímky $\mathbb{p}$ určené afinní soustavou souřadnic, pro které $A \preceq B$.

Definice 1.48. Nechť $A, B \in \mathbb{p}$ a uspořádání $\preceq$ na $\mathbb{p}$ takové, že $A \preceq B$. Řekneme, že *bod C leží mezi body* A, B, když $A \preceq C \preceq B$.

Věta 1.49. Nechť $A, B, C \in \mathbb{p}$, $A \neq B$. Bod C leží mezi body A, B právě když $(ABC) < 0$.

Definice 1.50. Nechť $A, B \in \mathbb{A}_n$, $A \neq B$. *Otevřenou úsečkou* AB s koncovými body A, B nazveme množinu bodů X přímky AB, které leží mezi body A, B. *Uzavřenou úsečkou* AB nazveme množinu $AB = AB \cup \{A\} \cup \{B\}$. Je–li $A = B$, klademe $AB = \{A\}$.

Věta 1.51. Nechť $A, B \in \mathbb{A}_n$, $A \neq B$. Pak úsečka AB je množina bodů $X \in A_n$ takových, že

$$X = A + t(B - A), \text{ kde } 0 \le t \le 1.$$

Definice 1.52. Mějme zaměření $\mathbf{V}_n$ afinního prostoru $\mathbb{A}_n$ nad uspořádaným tělesem $\mathbb{T}$. Nechť $\mathbf{W}_{n-1}$ je podprostor $\mathbf{V}_n$. Na množině $\mathbf{Z} = \mathbf{V}_n \setminus \mathbf{W}_{n-1}$ zavedeme relaci $\sim$ (mod $\mathbf{W}_{n-1}$) následujícím způsobem:

$$\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{Z}, \quad \mathbf{x} \sim \mathbf{y} \;(\mathrm{mod}\; \mathbf{W}_{n-1}) \;\Leftrightarrow\; \mathbf{x} = \mathbf{u} + c\mathbf{y}, \text{ kde } c > 0,\; \mathbf{u} \in \mathbf{W}_{n-1} \tag{9}$$

(zde místo $\mathbf{x} \sim (\mathrm{mod}\; \mathbf{W}_{n-1})\; \mathbf{y}$ píšeme ($\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$ (mod $\mathbf{W}_{n-1}$))). Relaci čteme: $\mathbf{x}$ je souhlasný s $\mathbf{y}$ podle modulu $\mathbf{W}_{n-1}$.

Věta 1.53. Relace (9) je relací ekvivalence na množině $\mathbf{Z}$. K ní příslušný rozklad množiny $\mathbf{Z}$ má právě dvě třídy.

Definice 1.54. V $\mathbb{A}_n$ nad uspořádaným tělesem $\mathbb{T}$ je dána nadrovina $\mathbb{M}_{n-1} = \{A; \mathbf{W}_{n-1}\}$ a vektor $\mathbf{u} \in \mathbf{V}_n \setminus \mathbf{W}_{n-1} = \mathbf{Z}$. Množina bodů X afinního prostoru $\mathbb{A}_n$, k nimž existuje vektor $\mathbf{x}$ tak, že

$$X = A + \mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \sim \mathbf{u} \;(\mathrm{mod}\; \mathbf{W}_{n-1})$$

nazýváme *otevřený poloprostor* určený nadrovinou $\mathbb{M}_{n-1}$ a vektorem $\mathbf{u}$; označujeme $\mathbb{M}^1(\mathbb{M}_{n-1}, \mathbf{u})$. Množinu bodů

$$X = A + \mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \sim -\mathbf{u} \ (\mathrm{mod}\ \mathbf{W}_{n-1})$$

nazýváme otevřený poloprostor opačný k $\mathbb{M}^1$ označujeme $\mathbb{M}^2$ ($\mathbb{M}_{n-1}$,-$\mathbf{u}$)..Nadrovinu $\mathbb{M}$ *nazýváme hraniční nadrovinou poloprostorů* $\mathbb{M}^1$a $\mathbb{M}^2$. Množiny $\mathbb{M}^1 \cup \mathbb{M}_{n-1}$, resp. $\mathbb{M}^2 \cup \mathbb{M}_{n-1}$ nazýváme *uzavřené poloprostory*. Pro n = 1 poloprostor nazýváme *polopřímkou*, pro n = 2 *polorovinou*.

Věta 1.55. Hraniční nadrovinou jsou určeny právě dva otevřené (resp. uzavřené) poloprostory v $\mathbb{A}_n$.

Věta 1.56. Nechť $\mathbb{M}^1$ je otevřený poloprostor v $\mathbb{A}_n$ s hraniční nadrovinou $\mathbb{M}_{n-1}$,

X, Y $\in \mathbb{M}^1$. Pak $XY \cap \mathbb{M}_{n-1} = \varnothing$.

Věta 1.57. Nechť $\mathbb{M}^1$ je uzavřený poloprostor v $\mathbb{A}_n$ hraniční nadrovinou $\mathbb{M}_{n-1}$,

X, Y $\in \mathbb{M}^1$. Pak pro otevřenou úsečku platí $XY \cap \mathbb{M}_{n-1} = \varnothing$.

Věta 1.58. Je–li v $\mathbb{A}_n$ báze $\langle P, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n \rangle$ a $\mathbb{M}_{n-1} = \langle P, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_{n-1} \rangle$, pak $X = [x_1,...,x_n]$, $Y = [y_1,...,y_n]$ patří do téhož otevřeného poloprostoru s hraniční nadrovinou $\mathbb{M}_{n-1}$ tehdy a jen tehdy, když $x_n.y_n > 0$.

Věta 1.59. Nechť nadrovina $\mathbb{M}_{n-1}$ v dané afinní soustavě souřadnic má rovnici $A_1 x_1 + ... + A_n x_n + A_0 = 0$. Pro každou $(x_1,...,x_n) \in \mathbb{T}^n$ položme $\mathbf{f}(x_1,...,x_n) = A_1 x_1 + A_2 x_2 + ... + A_n x_n + A_0$. Potom je jeden z uzavřených poloprostorů určených nadrovinou $\mathbb{M}$ množinou

$$\{X \in \mathbb{A}_n, X = [x_1,...,x_n] \mid \mathbf{f}(x_1,...,x_n) \geq 0\},$$

zbývající z nich pak množinou

$$\{X \in \mathbb{A}_n, X = [x_1,...,x_n] \mid \mathbf{f}(x_1,...,x_n) \leq 0\}.$$

Věta 1.60. Nechť $\mathbb{R}$ a $\mathbb{L}$ jsou dvě různé rovnoběžné nadroviny afinního prostoru $\mathbb{A}_n$. Potom každá z nich je obsažena právě v jednom otevřeném poloprostoru určeném zbývající z nich.

Definice 1.61. Neprázdnou množinu bodů $\mathbb{K} \subset \mathbb{A}_n$ nazýváme *konvexní množinou*, platí–li, je–li X, Y $\in \mathbb{K}$, pak úsečku $XY \subset \mathbb{K}$. Prázdnou množinu pokládáme rovněž za konvexní.

Věta 1.62. Konvexní množiny na přímce jsou: celá přímka, otevřená nebo uzavřená polopřímka, otevřená nebo uzavřená úsečka, bod a prázdná množina.

Věta 1.63. Průnik libovolného počtu konvexních množin je opět konvexní množina.

Věta 1.64. Podprostor afinního prostoru je konvexní množina.

Definice 1.65. V afinním prostoru $\mathbb{A}_n$ jsou dány dvě různé rovnoběžné nadroviny $\mathbb{R}$ a $\mathbb{L}$. Nechť $\mathbb{M}^1$ je poloprostor určený nadrovinou $\mathbb{R}$ obsahující nadrovinu $\mathbb{L}$ a $\mathbb{M}^2$ je poloprostor určený nadrovinou $\mathbb{L}$ obsahující nadrovinu $\mathbb{R}$. Pak množinu $\mathbb{M}^1 \cap \mathbb{M}^2$ nazýváme *vrstvou*. Nechť v $\mathbb{A}_n$ jsou dány různoběžné nadroviny $\mathbb{R}$ a $\mathbb{L}$. Nechť $\mathbb{M}^1$ je libovolný poloprostor určený nadrovinou $\mathbb{R}$ a $\mathbb{M}^1$ je libovolný poloprostor určený nadrovinou $\mathbb{L}$. Pak množinu $\mathbb{M}^1 \cap \mathbb{M}^2$ nazýváme *klínem*. Je–li n = 2 vrstvu nazýváme *pásem*, klín *úhlem*.

Definice 1.66. Body $A_0, A_1,...,A_n \in \mathbb{A}_n$ nazýváme *geometricky nezávislé*, jsou–li vektory $A_1 - A_0, A_2 - A_0,..., A_n - A_0$ *lineárně nezávislé*.

Poznámka: Nechť $A_0,..., A_r$ jsou geometricky nezávislé body. Potom afinní podprostor $\mathbb{M}_r = \{A_0;\ A_1 - A_0,...,\ A_r - A_0\}$ je zřejmě jediným podprostorem dimenze r obsahující body

$A_0,\ldots,A_r$. Říkáme, že $\mathbb{M}_r$ je určen geometricky nezávislými body $A_0,\ldots,A_r$.

Definice 1.67. Nechť $\mathbb{K}$ je podmnožina v $\mathbb{A}_n$. Průnik všech konvexních množin, které obsahují množinu $\mathbb{K}$ se nazývá *konvexním obalem množiny* $\mathbb{K}$ a označuje se $K(\mathbb{K})$.

Definice 1.68. Konvexní obal konečné množiny $\mathbb{K}$ bodů z $\mathbb{A}$ nazýváme *konvexním mnohostěnem* v $\mathbb{A}_n$. Body množiny $\mathbb{K}$ nazýváme *vrcholy mnohostěnu*.

Literatura:

M. Sekanina a kol., Geometrie I, II, Státní pedagogické nakladatelství Praha 1986, 1988.
B. Bydžovský, Úvod do analytické geometrie, Praha 1956.
Busemann, Kelly: Projective Geometry and Projective Metrics. Academic Press New York 1953. Ruský překlad, Moskva 1957.
K. Burian, Geometrie I, skriptum PFO, Ostrava 1984.
E. Peschl, Analytická geometrie a lineární algebra, Praha 1971.
V. Havel, J. Holenda, Lineární algebra, SNTL/ALFA, Praha 1984.
B. Budínský, Analytická a diferenciální geometrie, SNTL, Praha 1983.
J. Janyška, A. Sekaninová, Analytická teorie kuželoseček a kvadrik, skripta MU, Brno 1996.
P. Horák, J. Janyška, Analytická geometrie, skripta MU, Brno 1997.
E. Čech, Základy analytické geometrie, Praha 1951.
J. Jachanová, L. Marková, H. Žáková, Cvičení z geometrie I, skriptum UP, Olomouc 1991.