MA I - cvičení
Konzultační příklady

21. října 2010

1. Dokažte, že pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ platí:
$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

2. Dokažte, že posloupnost $a_n = \frac{n^n}{n!}$ je
   (a) rostoucí
   (b) neohraničená (**nápověda:** ukažte, že $a_n > n \ \forall n \in \mathbb{N}$).

3. Ukažte, že posloupnost
$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n \cdot (n+1)}$$
je ohraničená (**nápověda:** Použijte $\frac{1}{2\cdot 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$, $\frac{1}{3\cdot 4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$ atd.).

4. Dokažte, že posloupnost
$$a_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}$$
není ohraničená (**nápověda:** využijte $1 \geq 1$, $\frac{1}{\sqrt{2}} \geq \frac{1}{2}$, atd.).

5. Dokažte, že rekurentně zadaná posloupnost
$$a_{n+1} = 2a_n^2,\ 0 < a_1 < \frac{1}{2}$$
je klesající. Je ohraničená zdola?

6. Určete horní a dolní mez výrazu
$$\frac{4+\cos(n\alpha)}{3+\sin(n\alpha)}$$
platnou pro $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ a $\forall n \in \mathbb{N}$.

7. Určete, zda posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ zadaná předpisem
$$a_n = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{n^2}$$
je či není ohraničená (**nápověda:** použijte $\frac{1}{2^2} \leq \frac{1}{2\cdot 1}, \ldots, \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)}$).

8. Z definice limity dokažte, že pro každou posloupnost $\{a_n\}$ platí

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \iff \lim_{n\to\infty} |a_n| = 0.$$

9. Z definice limity dokažte, že

   (a) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n - \cos n}{n} = 0$,

   (b) $\lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{n+2} = 2$.

10. Z definice limity dokažte:

$$(\lim_{n\to\infty} a_n = L \wedge \lim_{n\to\infty} b_n = M) \implies \lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = L + M.$$

11. Rozhodněte, zda posloupnost diverguje nebo ne. Pokud ano, dokažte to:

   (a) $1, 2, 3, 2, 3, 4, 3, 4, 5, 4, 5, 6, \ldots,$

   (b) $a_n = \frac{n^2}{n-1}$.