1 Zápočtové úkoly. Algebra II. – Kombinované studium.

Zadání: 27.2.2015 – Odevzdání: Na zkoušce

1. [4] body Rozhodněte, zda f je lineární zobrazení.

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \quad \text{kde} \quad f(x,y,z) = (2x+3y, 4z+5). \tag{1}$$
$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \quad \text{kde} \quad f(x,y) = (2x+y, y, y-x). \tag{2}$$
$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{R} \quad \text{kde} \quad f(x+\mathrm{i}y) = x. \tag{3}$$
$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad \text{kde} \quad f(x,y) = (x\cos\alpha + y\sin\alpha, \cos\alpha y - x\sin\alpha). \tag{4}$$
$$f : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_2[x] \quad \text{kde} \quad f(ax^3+bx^2+cx+d) = 3ax^2+2bx+c. \tag{5}$$
$$f : \mathbb{M}_{22} \to \mathbb{R} \quad \text{kde} \quad f(A) = \det A. \tag{6}$$
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{kde} \quad f(x) = e^{\ln x + a}. \tag{7}$$
$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \quad \text{kde} \quad f(x,y,z) = x. \tag{8}$$

Kde $\mathbb{R}_n[x]$ je prostor všech polynomů (proměnné x) stupně n a $\mathbb{M}_{nm}$ jsou matice typu $n \times m$. Všechny vektorové prostory jsou nad polem $\mathbb{R}$.

2. [4 body] Pro všechny lineární zobrazení z předchozího příkladu najděte jádro Ker$f$ a obraz Imf.

3. [2 bod] Na základě znalosti jádra a obrazu těchto zobrazení určete, zda je lin. zobrazení f injektvní resp. surjektivní.

4. [3 body] Lin. zobrazení $f : \mathbb{M}_{2,2} \to \mathbb{R}^2$ je zadáno určením obrazů pevné báze takto

$$f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = (2,1), \quad f\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = (-1,1), \quad f\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (1,1), \quad f\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (0,-1).$$

Určete obecný předpis pro zobrazení f a všechny matice A pro něž platí $f(A) = (1,1)$.

5. [4 body] Lin. zobrazení $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je dáno vztahem:

$$f(x,y,z) = (y+z, 2x+z, x-3y+z).$$

Nalezněte matici lin. zobrazení f v bázi e_1, e_2, e_3 (pro oba prostory) je-li

$$e_1 = (0,0,1), \quad e_2 = (1,0,0), \quad e_3 = (0,1,0). \tag{1}$$
$$e_1 = (1,1,1), \quad e_2 = (0,1,1), \quad e_3 = (0,0,-1). \tag{2}$$
$$e_1 = (0,1,-1), \quad e_2 = (1,0,-2), \quad e_3 = (1,1,2). \tag{3}$$

6. [3 body] Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^2$ jsou dány 2 báze e_1, e_2 a f_1, f_2. Určete matici přechodu od báze e_j k bázi f_j je-li:

$$e_1 = (1,0), e_2 = (0,1) \qquad f_1 = (1,1), f_2 = (1,-1). \tag{1}$$
$$e_1 = (1,1), e_2 = (1,-1) \qquad f_1 = (1,0), f_2 = (0,1). \tag{2}$$
$$e_1 = (1,0), e_2 = (0,1) \qquad f_1 = (0,1), f_2 = (1,0). \tag{3}$$
$$e_1 = (2,3), e_2 = (1,1) \qquad f_1 = (5,3), f_2 = (1,-1). \tag{4}$$

1.1 Vysledky

Jméno	1	2	3	4	5	6	Σ
Václav Matuszný	3/4	1.5/4	1.5/2	0/3	0/4	3/3	9/20

2 Zápočtové úkoly. Algebra II. – Kombinované studium.

Zadání: 13.3.2015 – Odevzdání: Na zkoušce

1. [6 bodů] Nalezněte vlastní čísla a vlastní vektory matic A, B, C, D, je-li:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ -1 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. [4 body] Nalezněte vlastní čísla pro matice

$$A^{-1}, B^{-1}, C^{-1}, A^2, 2A^3 + 6,$$

kde A, B, C jsou stejné jako v předchozím zadání.

3. [3 body] Na prostoru polynomů $\mathbb{R}[x]$ je dáno lin. zobrazení $f : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$ předpisem

$$f(p(x)) = xp'(x),$$

($p'(x)$ je derivace polynomu p). Nalezněte jeho vlastní čísla a vlastní vektory tj. vyřešte rovnici

$$xp' = \lambda p.$$

4. [4 body]Rozhodněte, zda jsou následující dvojice matic podobné:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \overset{?}{\approx} \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ -1 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \overset{?}{\approx} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \overset{?}{\approx} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

5. [3 body] Pro $A \in \mathbb{M}_{2,2}$ platí $\det A = \lambda_1 \lambda_2$ a $\mathrm{tr} A = \lambda_1 + \lambda_2$, kde λ_1, λ_2 jsou vlastní čísla matice A a $\mathrm{tr} A$, tzv. stopa matice je definována jakou součet prvků na diagonále. Dokažte obráceně, že

$$\lambda_{1,2} = \frac{\mathrm{tr} A \pm \sqrt{(\mathrm{tr} A)^2 - 4 \det A}}{2}.$$

2.1 Vysledky

Jméno	1	2	3	4	5	Σ
Václav Matuszný	4.5/6	3.2/4	0/3	2.6/4	3/3	13.3/20

3 Zápočtové úkoly. Algebra II. – Kombinované studium.

Zadání: 27.3.2015 – Odevzdání: Na zkoušce

1. [4 body] Najděte největší společný násobek polynomů $f, g \in \mathbb{R}[x]$, kde

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2, \qquad g(x) = x^3 - 3x^2 + 2x. \tag{1}$$
$$f(x) = x^5 - 1, \qquad g(x) = x^2 - 1. \tag{2}$$
$$f(x) = x^4(x-1)^{15}(x+1)^5, \qquad g(x) = x^3(x-1)^5(x+2)^4. \tag{3}$$

2. [4 body] Rozložte následující polynomy na ireducibilní činitele nad $\mathbb{C}$, resp. nad $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - 4x^2 + 5x - 2, && (1)\\ f(x) &= x^3 - 3x^2 + 2x, && (2)\\ f(x) &= x^3 + x^2, && (3)\\ f(x) &= x^3 + 1, && (4)\\ f(x) &= x^4 + 1. && (5)\\ & && (6) \end{aligned}$$

3. [4 body] Určete kořeny polynomu $f \in \mathbb{R}[x]$ z rovnice

$$\frac{f}{\gcd(f, f')} = 0,$$

kde

$$f(x) = x^4 - 5x^3 + 9x^2 - 7x + 2.$$

4. [4 body] Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^3$ (s klasickým skalárním součinem) vytvořte z daného systému vektorů $\{u_1, u_2, u_3\}$ orthonormální systém pomocí Gramm-Schmidtovy orthogonalizace, kde

$$u_1 = (1,2,3), \quad u_2 = (1,0,1), \quad u_3 = (-1,2,-1). \tag{1}$$
$$u_1 = (1,0,0), \quad u_2 = (0,1,0), \quad u_3 = (5,2,3). \tag{2}$$

5. [4 body] Převeďte následující matice symetrických bilineárních forem do kanonického tvaru:

$$B := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Návod: Kanonický tvar matice bilineární formy je diagonální matice, jejíž každý prvek na diagonále je buď 1,0, nebo -1. Každá matice symetrické bilineární formy B je kongruentní s maticí v kanonickém tvaru K, tj. existuje invertibilní matice Q tak, že

$$B = Q^\top K Q.$$

Postup při hledání kanonického tvaru je tento: Maticí B pomocí řádkových úprav upravujeme do schodovitého tvaru, ale za každou řádkovou úpravou udělejme ještě tu samou sloupcovou úpravu. Jelikož každá řádková úprava se dá interpretovat jako násobení nějakou maticí Q z leva a sloupcová úprava znamená násobení transponovanou maticí z prava, celá operace výjde $QBQ^\top$, čímž zajistíme kongruenci s původní maticí.

Příklad:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -11 \end{pmatrix},$$

V prvním kroku jsem první řádek vynásobil -3 a přičetl k druhému řádku. Ve druhém kroku musím udělat stejnou sloupcovou úpravu tedy vynásobit první sloupec -3 a přičíst ke druhému.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{11}{\sqrt{11}} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} =: K.$$

V dalším kroku jsem vynásobil druhý řádek číslem $\frac{1}{\sqrt{11}}$ a tedy je třeba vynásobit druhý sloupec tímtéž číslem. Výsledkem je už matice v kanonickém tvaru. Pokud vezmu jen řádkové úpravy, které jsem použil a aplikuji je na jednotkovou matici, tedy

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{3}{\sqrt{11}} & \frac{1}{\sqrt{11}} \end{pmatrix} =: Q,$$

dostanu inverzní matici přechodu, tedy

$$K = QBQ^\top, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{3}{\sqrt{11}} & \frac{1}{\sqrt{11}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{\sqrt{11}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{11}} \end{pmatrix}.$$

3.1 Vysledky

Jméno	1	2	3	4	5	Σ
Václav Matuszný	4/4	3.2/4	4/4	4/4	-/-	15.2/16

4 Vysledky

Jméno	1	2	3	Σ	Zápočet
Václav Matuszný	45%	67%	95%	69%	ANO