1 úkol

1. Nechť
$$H(x) := \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases},$$
je tzv. *Heavisidova funkce*. Dokaže, že
$$H'(x) = \delta(x).$$
Nechť $f, g \in C^1(\mathbb{R})$, definujme
$$h(x) := \begin{cases} f(x) & x > 0 \\ g(x) & x < 0 \end{cases}$$
dokažte, že
$$h'(x) = \begin{cases} f'(x) & x > 0 \\ g'(x) & x < 0 \end{cases} + (f(0) - g(0))\delta.$$
Hint:$h(x) = f(x)H(x) + g(x)H(-x)$.

2. Dokažte
$$(\ln|x|)' = P\frac{1}{x}.$$

3. Buď $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ takový, že
$$< T, \varphi(x,t) >:= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, -x)\mathrm{d}x.$$
Dokažte, že
$$(\partial_x - \partial_t)T = 0.$$

Výsledky:

Jméno	1	2	3	Σ
Kasáková	1	1	0	2/3

2 úkol

1. Spočítejte n-dimenzionální Fourierův obraz Gaussovy funkce

$$\left(\mathcal{F}e^{-a|x|^2}\right)(\xi),$$

kde $a > 0$ a $x \in \mathbb{R}^n$, $|x|^2 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$ a

$$(\mathcal{F}f)(\xi) := \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-\mathrm{i}\langle \xi, y \rangle} \mathrm{d}y.$$

2. Řešte pomocí Fourierovy transformace rovnici

$$y' = -axy$$

a z toho usuďte, že

$$(\mathcal{F}e^{-a\frac{x^2}{2}})(\xi) = e^{-\frac{1}{a}\frac{\xi^2}{2}} c,$$

kde c je konstanta rovna $(\mathcal{F}e^{-a\frac{x^2}{2}})(0)$.

3. Spočítejte

$$(\mathcal{F}H(x)^2)(\xi), \qquad (\mathcal{F}e^{\mathrm{i}ax})(\xi), \qquad (\mathcal{F}x^n H(x)e^{-ax})(\xi), \qquad (\mathcal{F}\delta^{(n)}(x-a))(\xi)$$

kde $a > 0$ a $H(x)$ je Heavisidova funkce.

4. Dokažte, že řešení následující diferenco-funkcionální rovnice

$$\begin{aligned} u_t(x,t) &= u(x+1,t), \\ u(x,0) &= u_0(x), \qquad u_0 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

je

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} u_0(x+n),$$

3 úkol

1. Ukažte, že pokud je funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ homogenní stupně s, tak její n-rozměrná Fourierova transforce je funkce homogenní stupně $-n-s$, tedy pro $t \in \mathbb{R}$
$$f(tx) = t^s f(x) \Rightarrow (\mathcal{F}f)(t\xi) = t^{-n-s}(\mathcal{F}f)(\xi).$$

2. Použijte Plancherelův vzorec ke spočítání
$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2} \mathrm{d}x.$$

3. Spočítejte v $\mathbb{R}^n$
$$\mathcal{F}\,|x|^{\alpha}, \qquad -n < \alpha < 0,$$
kde $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots x_n^2}$ a z toho odvodtě n-rozměrnou Greenovu funkci $G(x)$ pro Poissonovu rovnici, tj.
$$\Delta G = \delta(x),$$
pro $n = 3, 4, \ldots$ a pro rovnici
$$\Delta^2 G = \delta(x),$$
pro $n = 5, 6, \ldots$

4 Úkol

1. Dokažte, že pro každou funkci $f \in L^2(\Omega)$, kde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ existuje jediné slabé řešení u rovnice

$$\Delta\Delta u = f, \qquad u \in H_0^2(\Omega),$$

kde prostor $H_0^2(\Omega)$ je Sobolevův prostor s nulovými hodnotami na hranici oblasti ve smyslu stop.

2. Dokažte existenci a jednoznačnost minima funkcionálu

$$E(u) := \int_0^1 \frac{a(x)}{2} u''(x)^2 - f(x)u(x)\mathrm{d}x,$$

kde $a(x) \in L^\infty((0,1))$ takové, že $a(x) \geq a > 0$ na intervalu (0,1), $f \in L^2((0,1))$ a $u \in H^2((0,1))$.

3. Dokažte, že existuje slabé řešení rovnice

$$\nabla^\top A(x)\nabla u - u = f, \qquad \text{on } \Omega = (1,2) \times (1,2),$$

kde matice $A(x) = \begin{pmatrix} x_2 & 0 \\ 0 & x_1 \end{pmatrix}$ a $f \in L^2(\Omega)$. Symboly $\nabla, \nabla^\top$ znamenají

$$\nabla := \begin{pmatrix} \partial_{x_1} \\ \partial_{x_2} \end{pmatrix}, \qquad \nabla^\top := (\partial_{x_1}, \partial_{x_2}).$$

4. Pro jaké hodnoty $\lambda \in \mathbb{R}$ existuje jednoznačné slabé řešení rovnice

$$\Delta\Delta u - \Delta u + \lambda u = f, \qquad u \in H_0^2(\Omega),$$

kde Ω je omezená oblast v $\mathbb{R}^n$ a $f \in L^2(\Omega)$?