

Matematická analýza III, IV

Texty k přednáškám M. Málka

září 2023

Obsah

Obsah	iii
1 Přirozená topologie v $\mathbb{R}^n$	1
1.1 Normované prostory	1
1.2 $\mathbb{R}^n$ jako normovaný prostor	4
1.3 $\mathbb{R}^n$ jako součin topologických prostorů	5
1.4 Kompaktní množiny v $\mathbb{R}^n$	6
1.5 Spojitost základních zobrazení	7
1.6 Konečněrozměrné normované prostory	8
1.7 Prostory lineárních zobrazení	8
2 Derivace prvního řádu	11
2.1 Fréchetova derivace	11
2.2 Derivace podle vektoru, Gâteauxova derivace	15
2.3 Parciální derivace	17
2.4 Věty o střední hodnotě	18
2.5 Spojitá diferencovatelnost	20
3 Inverzní a implicitní zobrazení	23
3.1 Inverzní zobrazení	23
3.2 Věta o implicitní funkci	23
3.3 Obecná věta o inverzním zobrazení	26
3.4 Obecná věta o implicitním zobrazení	29
4 Derivace vyšších řádů	31
4.1 Bilineární a kvadratická zobrazení	31
4.2 Derivace a diferenciál druhého řádu	32
4.3 Multilineární a homogenní zobrazení	34
4.4 Derivace vyššího řádu	35
4.5 Diferenciál a Taylorův polynom	37
5 Extrémy funkcí více proměnných	39
5.1 Extremální úlohy bez vazby	39
5.2 Vázané extrémy	41
6 Riemannův integrál na $\mathbb{R}^n$	45
6.1 Integrál na obdélníku v $\mathbb{R}^n$	45
6.2 Integrál na množině v $\mathbb{R}^n$	49
7 Integrovaní diferenciálních forem	53
7.1 Formy na $\mathbb{R}^n$	53
7.2 Diferenciální formy	54
7.3 Integrál z diferenciální formy na krychli	56
7.4 Stokesova věta	57
7.5 Integrovaní diferenciálních forem	58
8 Obyčejné diferenciální rovnice	61
8.1 Obecné	61
8.2 Řešení speciálních typů diferenciálních rovnic	63
8.3 Lineární diferenciální rovnice	64
8.4 Soustavy diferenciálních rovnic	64
8.5 Lineární diferenciální rovnice vyššího řádu	67
Rejstřík	70

1. Přirozená topologie v $\mathbb{R}^n$

V první části tohoto textu zavádíme přirozenou topologii na množině $\mathbb{R}^n$, nejprve jako topologii normovaného prostoru, a pak jako topologii součinu topologických prostorů. Dvojí definice nám umožní v dalším výkladu a při řešení úloh zvolit přístup, vždy vhodný pro danou situaci. Tato oboustrannost se nám osvědčí již v této kapitole.

V celé kapitole (i v dalším textu) budeme uvažovat množinu $\mathbb{R}^n$ s přirozenou strukturou vektorového prostoru nad polem $\mathbb{R}$.

1.1. Normované prostory. Všechny vektorové prostory, s nimiž budeme pracovat v tomto odstavci, budeme uvažovat nad polem reálných čísel.

Vektorový prostor X se nazývá *normovaný*, je-li na něm definována *norma*, což jest zobrazení $\|\cdot\|: X \rightarrow \mathbb{R}$ splňující následující tři podmínky:

1. Pro každé $x \in X$ je $\|x\| \neq 0$ jestliže $x \neq 0$.
2. Pro každé $x \in X$ a $t \in \mathbb{R}$ je $\|tx\| = |t| \cdot \|x\|$.
3. Pro každé $x, y \in X$ platí $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Z druhé podmínky pro $t = -1$ a $t = 0$ nám plyne $\|-x\| = \|x\|$ a $\|0\| = 0$.

Nejpřirozenějším příkladem normy je absolutní hodnota na $\mathbb{R}$. Dalším důležitým příkladem, se kterým se čtenář určitě setkal je $\|(x_1, x_2)\| = \sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2}$ definovaná na $\mathbb{R}^2$.

Definici a základní vlastnosti normovaného prostoru známe z algebry. V tomto odstavci si všimneme, jak lze pomocí normy na vektorovém prostoru definovat topologii.

Nechť $x \in X$, $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$. Položme

$$B_r^{\|\cdot\|}(x) = \{y \in X \mid \|y - x\| < r\}, \quad (1.1.1)$$

$$\bar{B}_r^{\|\cdot\|}(x) = \{y \in X \mid \|y - x\| \leq r\}, \quad (1.1.2)$$

Množina $B_r^{\|\cdot\|}(x)$ (respektive $\bar{B}_r^{\|\cdot\|}(x)$) se nazývá *otevřená* (respektive *uzavřená*) *koule* (vzhledem k normě $\|\cdot\|$) se středem x a poloměrem r . V případě, že nedojde k nedorozumění, budeme používat jednodušších symbolů $B_r(x)$ a $\bar{B}_r(x)$.

To, že jsme si dovolili užít v názvu těchto objektů topologických pojmů (otevřená a uzavřená), je zde opodstatněné, neboť definici otevřené respektive uzavřené množiny splňovat budou, až nadefinujeme příslušnou topologii. Můžete si to ověřit.

Z definice koulí vidíme, že $B_r(x) \subset \bar{B}_r(x)$ a pro $r < s$ je $B_r(x) \subset B_s(x)$ i $\bar{B}_r(x) \subset \bar{B}_s(x)$.

Množina $A \subset X$ se nazývá *ohraničená*, je-li množina $\|A\|$ (obraz množiny A při zobrazení $\|\cdot\|$) ohraničená. Ekvivalentně: množina A je ohraničená, existuje-li otevřená koule $B_r(0)$ taková, že $A \subset B_r(0)$.

Pomocí otevřených koulí nyní můžeme definovat na X topologii τ generovanou normou následovně: množina $G \subset X$ je *otevřená* (tedy prvkem topologie), jestliže pro každý bod $x \in G$ existuje $B_r(x)$ taková, že $B_r(x) \subset G$.

Stejného výsledku dosáhneme, pokud v definici místo otevřené koule použijeme uzavřenou.

Lemma 1.1. *Takto definovaný systém je skutečně topologie na X .*

D ů k a z. Ověříme, že systém τ splňuje axiomy topologie. Uvažujme systém $(G_\alpha)_{\alpha \in A}$ prvků τ , dokážeme, že $\bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$ je rovněž prvek τ . Pokud $x \in \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$ potom existuje $\alpha_0 \in A$ takové, že $x \in G_{\alpha_0}$. Z definice topologie existuje $B_r(x)$ s $B_r(x) \subset G_{\alpha_0}$. Proto $B_r(x) \subset \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$.

Nechť $G_1, G_2 \in \tau$, ověřme, že $G_1 \cap G_2 \in \tau$. Zvolme $x \in G_1 \cap G_2$. Jelikož je x prvkem G_1 existuje $B_{r_1}(x) \subset G_1$, analogicky existuje $B_{r_2}(x) \subset G_2$. Potom pro $r = \min\{r_1, r_2\}$ máme $B_r(x) \subset G_1 \cap G_2$. Tedy $G_1 \cap G_2 \in \tau$.

Prostor X i prázdná množina jsou prvky τ . $\square$

Systém všech otevřených koulí normovaného prostoru X tvoří bázi topologie na X .

Otevřené koule jsou otevřené množiny a uzavřené koule jsou uzavřené množiny v topologii generované normou.

Každá otevřená i uzavřená koule je souvislá množina.

Každý normovaný prostor je Hausdorffův topologický prostor.

Podívejme se nyní na spojitost zobrazení mezi normovanými prostory. Uvažujme X a Y dva normované prostory s topologiemi generovanými normami. Jak víme ze základů topologie zobrazení $f: X \rightarrow Y$ je *spojité* pokud vzorem otevřené množiny v X je otevřená množina v Y . Zde máme topologii na X i na Y definovanou pomocí normy, proto lze spojitost definovat vycházejíc z normy

Věta 1.2 (ε - δ kritérium spojitosti). *Nechť X a Y jsou normované prostory s normami $\|\cdot\|_X$ a $\|\cdot\|_Y$, dále $A \subset X$. Zobrazení $f: A \rightarrow Y$ je spojitě, právě když pro každé $x_0 \in A$ a pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $x \in A$, $\|x - x_0\|_X < \delta$ platí $\|f(x) - f(x_0)\|_Y < \varepsilon$ (alternativně zapsáno: $f(A \cap B_\delta^{\|\cdot\|_X}(x_0)) \subset B_\varepsilon^{\|\cdot\|_Y}(f(x_0))$).*

Norma je spojitě zobrazení. Skutečně, například spojitost v nule: Vzor intervalu $(-\varepsilon, \varepsilon)$ při zobrazení $\|\cdot\|$ je přece $B_\varepsilon^{\|\cdot\|}(0)$. Proto $\|B_\varepsilon^{\|\cdot\|}(0)\| \subset (-\varepsilon, \varepsilon)$.

Nechť $x \in X$ je libovolný vektor, definujeme $f_x: \mathbb{R} \rightarrow X$ předpisem $f_x(t) = tx$. Toto zobrazení je lineární a spojitě.

Uvažme nyní dvě normy $(\|\cdot\| \text{ a } |\cdot|)$ na vektorovém prostoru X a zkoumejme, za jakých okolností bude topologie indukovaná normou $\|\cdot\|$ silnější, než topologie indukovaná normou $|\cdot|$. V následující větě tyto topologie označujeme symboly $\tau_{\|\cdot\|}$ a $\tau_{|\cdot|}$.

Věta 1.3. *Nechť $\|\cdot\|$ a $|\cdot|$ jsou dvě normy na vektorovém prostoru X . Následující čtyři výroky jsou ekvivalentní:*

1. $\tau_{\|\cdot\|}$ je silnější než $\tau_{|\cdot|}$.
2. Existuje číslo $m > 0$ takové, že $B_m^{\|\cdot\|}(0) \subset B_1^{|\cdot|}(0)$.
3. Existuje číslo $m > 0$ takové, že $\bar{B}_m^{\|\cdot\|}(0) \subset \bar{B}_1^{|\cdot|}(0)$.
4. Existuje číslo $M > 0$ takové, že $|\cdot| \leq M \cdot \|\cdot\|$.

Důkaz. Předpokládejme, že platí tvrzení 1, že každá otevřená množina v topologii $\tau_{|\cdot|}$ je otevřená i v topologii $\tau_{\|\cdot\|}$. Pak množina $B_1^{|\cdot|}(0)$ je otevřená v topologii $\tau_{\|\cdot\|}$, což znamená že existuje otevřená koule $B_m^{\|\cdot\|}(0)$ tak, že $B_m^{\|\cdot\|}(0) \subset B_1^{|\cdot|}(0)$. To je tvrzení 2.

Postupujeme sporem, předpokládejme, že platí tvrzení 2. a neplatí tvrzení 3. Nejprve existuje $m > 0$ takové, že pro každé $\|x\| < m$ platí $|x| < 1$ a jelikož neplatí tvrzení 3. existuje $x \in X$, $\|x\| = m$ a $|x| > 1$. Pak pro vektor

$$\bar{x} = \frac{|x| + 1}{2|x|}x$$

platí jednak

$$\|\bar{x}\| = \left| \frac{|x| + 1}{2|x|} \right| \|x\| = \frac{|x| + 1}{2|x|} m = \left(\frac{|x|}{2|x|} + \frac{1}{2|x|} \right) m < m$$

a jednak

$$|\bar{x}| = \left| \frac{|x| + 1}{2|x|} \right| |x| = \frac{|x| + 1}{2|x|} |x| = \frac{|x| + 1}{2} > 1,$$

což je spor. Platí tedy tvrzení 3.

Nyní předpokládejme platnost výroku 3. a položíme $M = 1/m$. Kdyby existoval vektor $x \in X$ takový, že $|x| > M\|x\|$, pak by pro vektor

$$x_0 = \frac{m}{\|x\|} x$$

platilo $\|x_0\| = m$, neboli $x_0 \in \bar{B}_m^{\|\cdot\|}(0)$, a

$$|x_0| = \frac{m|x|}{\|x\|} > mM = 1,$$

neboli $x_0 \notin \bar{B}_1^{|\cdot|}$. To je spor, který dokazuje výrok 4.

Konečně, předpokládejme platnost tvrzení 4. Nechť U je množina otevřená v $\tau_{|\cdot|}$, $x \in U$ bod. Nechť $\varepsilon > 0$ je takové číslo, že $B_\varepsilon^{|\cdot|} \subset U$. Pak $B_{\varepsilon/M}^{\|\cdot\|}(x) \subset B_\varepsilon^{\|\cdot\|}(x) \subset U$, což dokazuje, že množina U je otevřená v topologii $\tau_{\|\cdot\|}$.

Tím je důkaz hotov. $\square$

Dvě normy na vektorovém prostoru se nazývají *ekvivalentní*, mají-li shodné indukované topologie. Z předchozí věty nyní snadno plyne

Věta 1.4. Normy $\|\cdot\|$ a $|\cdot|$ na vektorovém prostoru X jsou ekvivalentní, právě když existují čísla $m, M > 0$ taková, že

$$m \cdot \|\cdot\| \leq |\cdot| \leq M \cdot \|\cdot\|.$$

Důsledek 1.5. Jsou-li normy $\|\cdot\|$ a $|\cdot|$ na vektorovém prostoru X ekvivalentní, pak každá množina, ohraničená vzhledem k jedné z nich, je ohraničená i vzhledem k druhé.

Platí i opačné tvrzení. Zformulujte je a dokažte!

Nechť X, Y jsou normované prostory $A \subset X$, $f: A \rightarrow Y$ zobrazení bod $a \in X$ hromadný bod množiny A (ne nutně prvek A). Prvek $L \in Y$ nazveme *limitou f pro x jdoucí k a* , pokud pro každou kouli $B_\varepsilon(L)$ existuje koule $B_\delta(a)$ taková, že $f(A \cap B_\delta(a) \setminus \{a\}) \subset B_\varepsilon(L)$. Zapisujeme

$$L = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

Snadno lze ukázat následující tvrzení

Věta 1.6 (ε - δ kritérium limity v normovaných prostorech). Nechť X, Y jsou normované prostory $L \in Y$ je limitou $f: A \rightarrow Y$ a pokud pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pokud $x \in A$, $x \neq a$, $\|x - a\|_X < \delta$, potom $\|f(x) - L\|_Y < \varepsilon$.

Všimněme si, že limitou funkce je prvek Y . Proto pokud hovoříme o limitech v $\mathbb{R}^m$ už neuvažujeme nevlastní limity na rozdíl od $\mathbb{R}$, kde jsem uvažovali dva nevlastní body. Již v $\mathbb{R}^2$ bychom museli zavést jeden nevlastní bod „okolo“ celého $\mathbb{R}^2$ nebo různá nekonečna v závislosti na směru.

Podobnosti v definici limity a spojitosti lze jen těžko přehlédnout. Jde skutečně o těsně související pojmy.

Věta 1.7 (o souvislosti spojitosti a limity). Nechť X, Y jsou normované prostory $A \subset X$, $f: A \rightarrow Y$ zobrazení a bod $a \in X$ hromadný bod množiny A . Bod $L \in Y$ je limitou f pro x jdoucí k a a právě když zobrazení $\bar{f}: A \cup \{a\} \rightarrow Y$ definovaná

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{jestliže } x \in A; \\ L & \text{jestliže } x = a, \end{cases}$$

je v a spojitě.

D ů k a z. Plyne z definic obou pojmů. $\square$

Vypočítejte limitu funkce $f: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2}.$$

Na definičním oboru funkce si funkční předpis můžeme upravit. Pro limitu tedy máme

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x^2 - y^2)(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x^2 - y^2 = 0.$$

1.2. $\mathbb{R}^n$ jako normovaný prostor.. Uvažme zobrazení $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_\infty: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \|x\|_1 &= |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n| \\ \|x\|_2 &= \sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2 + \cdots + (x_n)^2} \\ \|x\|_\infty &= \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\} \end{aligned} \quad (1.2.1)$$

Lemma 1.8. Každé ze zobrazení (1.2.1) je norma na $\mathbb{R}^n$.

D ů k a z. Přenecháváme čtenáři. $\square$

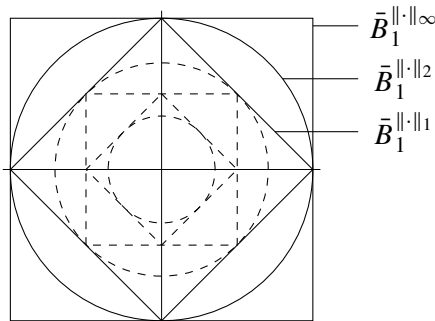
Snadno lze zjistit, že pro normu $\|\cdot\|_\infty$ platí

$$B_r^{\|\cdot\|_\infty}(x) = (x_1 - r, x_1 + r) \times (x_2 - r, x_2 + r) \times \cdots \times (x_n - r, x_n + r). \quad (1.2.2)$$

$$\bar{B}_r^{\|\cdot\|_\infty}(x) = [x_1 - r, x_1 + r] \times [x_2 - r, x_2 + r] \times \cdots \times [x_n - r, x_n + r]. \quad (1.2.3)$$

Otevřené koule v této normě jsou tedy krychle. Jak vypadají koule v nadefinovaných normách lze vidět na obrázku.

Pro $n = 1$ všechny tři uvedené normy splývají, otevřené (respektive uzavřené) koule jsou otevřené (respektive uzavřené) intervaly a indukují přirozenou topologii na $\mathbb{R}$.



Lemma 1.9. Pro zobrazení $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_\infty$ platí

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_1 &\geq \|\cdot\|_2 \geq \|\cdot\|_\infty, \\ \|\cdot\|_1 &\leq \sqrt{n} \|\cdot\|_2, \\ \|\cdot\|_2 &\leq n \|\cdot\|_\infty, \end{aligned}$$

D ů k a z. Přenecháváme čtenáři. $\square$

Z předchozího lemmatu a Věty 1.4 nyní plyne

Věta 1.10. Normy $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_\infty$ jsou ekvivalentní.

Topologie na $\mathbb{R}^n$, indukovaná normami $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_\infty$, se nazývá *přirozená (eukleidovská) topologie $\mathbb{R}^n$* .

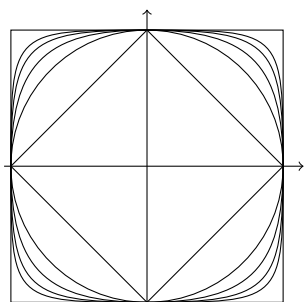
Uvedené definice můžeme ještě dále zobecnit, když pro libovolné $p \geq 1$ položíme

$$\|x\|_p := \sqrt[p]{|x_1|^p + |x_2|^p + \cdots + |x_n|^p}$$

Takto definované zobrazení $\|\cdot\|_p$ je norma; trojúhelníková nerovnost vyplývá z Minkowského nerovnosti

$$\sqrt[p]{|x_1 + y_1|^p + \cdots + |x_n + y_n|^p} \leq \sqrt[p]{|x_1|^p + \cdots + |x_n|^p} + \sqrt[p]{|y_1|^p + \cdots + |y_n|^p},$$

která platí pro každé $p \geq 1$.



Koule $B_1^{\|\cdot\|_p}(0)$, $p = 1, 2, 3, 4, 5, \infty$

Všechny normy $\|\cdot\|_p$ indukují tutéž topologii (jsou ekvivalentní); tato skutečnost snadno vyplývá Věty 1.4, Lemmatu 1.9 a Jensenovy nerovnosti

$$\sqrt[p]{|x_1|^p + \dots + |x_n|^p} \leq \sqrt[q]{|x_1|^q + \dots + |x_n|^q},$$

která platí pro každé p, q , $0 < p \leq q$.

Poznamenejme ještě, že označení $\|\cdot\|_\infty$ pro třetí normu z 1.2.1 je přirozené, jelikož platí

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \sqrt[p]{|x_1|^p + \dots + |x_n|^p} = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\} = \|x\|_\infty.$$

1.3. $\mathbb{R}^n$ jako součin topologických prostorů. Uvažme na množině $\mathbb{R}$ přirozenou topologii (jako obvykle) a na množině $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$ topologii součinu topologických prostorů. Víme, že bazí této topologie je systém všech otevřených kvádrů v $\mathbb{R}^n$, tj. množin

$$I_1 \times I_2 \times \dots \times I_n$$

kde $I_1, I_2, \dots, I_n$ jsou otevřené intervaly.

Věta 1.11. Topologie součinu na $\mathbb{R}^n$ je shodná s přirozenou topologií.

D ů k a z. Podle (1.2.2) existuje báze přirozené topologie na $\mathbb{R}^n$, jejíž každý prvek je otevřený kvádr tedy generátor součinné topologie. Tím je ukázáno, že přirozená topologie je silnější než součinná.

Naopak, jestliže x je prvkem nějaké množiny U otevřené v součinné topologii, existuje otevřený kvádr I , pro který platí

$$x \in I = (x_1 - r_1, x_1 + r_1) \times (x_2 - r_2, x_2 + r_2) \times \dots \times (x_n - r_n, x_n + r_n) \subset U.$$

Položíme $r = \min\{r_1, r_2, \dots, r_n\}$. Potom platí

$$x \in B_r^{\|\cdot\|_\infty}(x) \subset (x_1 - r_1, x_1 + r_1) \times (x_2 - r_2, x_2 + r_2) \times \dots \times (x_n - r_n, x_n + r_n) \subset I \subset U.$$

Našli jsme tedy kouli (zvolili jsme si výhodně normu $\|\cdot\|_\infty$ — však jsou všechny ekvivalentní) tedy otevřenou množinu v přirozené topologii, která je podmnožinou U . To dokazuje, že každý otevřený kvádr je otevřená množina v přirozené topologii. Součinná topologie je silnější než přirozená. $\square$

Uvažujme funkci $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ k této funkci definujeme m funkcí $f_1, f_2, \dots, f_m: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f_i = \text{pr}_i \circ f$ a nazveme je *složkami funkce* f .

Máme-li funkci $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y, \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y \right)$ (otočení o $\pi/4$ proti směru hodinových ručiček), pak jeho složky jsou samozřejmě $f_1(x, y) = \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y$ a $f_2(x, y) = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y$. A často pak využíváme zápisu $f = (f_1, f_2)$.

Následující věta nám usnadňuje ověřování spojitosti funkcí.

Věta 1.12. Funkce $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ je spojitá právě, když je spojitá každá z jejích složek.

Věta 1.13. Nechť $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $a \in \mathbb{R}^n$ hromadný bod A a $L = (l_1, l_2, \dots, l_m) \in \mathbb{R}^m$. Potom $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L = (L_1, L_2, \dots, L_m)$, právě když $\lim_{x \rightarrow a} f_i(x) = L_i$ pro každé $i = 1, 2, \dots, m$.

Následující věta dává do souvislosti limitu zobrazení mezi kartézskými součiny $\mathbb{R}$ a jednorozměrnou limitou.

Věta 1.14. *Nechť $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $a \in \mathbb{R}^n$ hromadný bod A , existuje limita $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \in \mathbb{R}^m$. Dále $g: \rightarrow A$ je spojitý v 0 a $g(0) = a$. Potom existuje limita $\lim_{t \rightarrow 0} f \circ g(t) = L$.
D ů k a z. Plyne věty o limitě složené funkce [4, věta 4.28, str. 47]. $\square$*

Důsledek 1.15. *Nechť $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ hromadný bod A , existuje limita $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \in \mathbb{R}^m$. Potom pro každé $i = 1, 2, \dots, n$ existuje limita f zúženého na podmnožinu $A_i = \{x \mid x_1 = a_1, \dots, x_{i-1} = a_{i-1}, x_{i+1} = a_{i+1}, \dots, x_n = a_n\}$ a platí $\lim_{t \rightarrow a_i} f|_{A_i}(t) = L$.*

Ačkoliv předchozí věta mluví o existenci, my ji budeme využívat pro důkaz neexistence limity, jak ukazuje následující příklad.

Zjistěte zda existuje limita

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{x + y} \quad (1.3.1)$$

Na podmnožinách $A_1 = \{(x, y) \mid y = 0\}$ (t.j. osa x)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{x + y} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 0}{x + 0} = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0;$$

i $A_2 = \{(x, y) \mid x = 0\}$ (t.j. osa y)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{x + y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0 + y^2}{0 + y} = \lim_{y \rightarrow 0} y = 0;$$

limity existují a rovnají se. Pokud ve větě 1.14 za funkci g pro libovolné $k \in \mathbb{R}$ vezmeme $g(t) = (t, kt)$ limita opět vyjde 0 (ověřte). Stejně tak dopadne i $g(t) = (t, kt^2)$, tedy substituce $y = kx^2$. To ovšem neznamená, že limita v (1.3.1) existuje a rovná se 0.

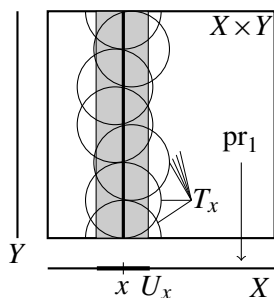
Ovšem pokud položíme $g(t) = (t, -t - t^2)$, což by šlo zjednodušeně označit jako substituce $y = -x - x^2$, dostáváme

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{x + y} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + (-x - x^2)^2}{x + -x - x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x^2 + 2x^3 + x^4}{-x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} -2 - 2x - x^2 = -2.$$

Limita (1.3.1) tedy neexistuje.

1.4. Kompaktní množiny v $\mathbb{R}^n$. Z odstavce (1.1) víme, že $\mathbb{R}$ je Hausdorffův topologický prostor a že otevřené koule jsou souvislé množiny. Podívejme se nyní podrobně, jak vypadají kompaktní množiny v $\mathbb{R}^n$. Nejprve uvedeme pomocné topologické tvrzení.

Věta 1.16. *Budte X a Y topologické prostory. Pak topologický prostor $X \times Y$ je kompaktní, právě když je kompaktní každý z prostorů X a Y .*



D ů k a z. Předpokládejme, že prostory X a Y jsou kompaktní a zvolme otevřené pokrytí S prostoru $X \times Y$. Pro každé $x \in X$ označme S_x systém těch množin $W \in S$, pro které $x \in \text{pr}_1(W)$ (pr_1 je projekce $\text{pr}_1: X \times Y \rightarrow X$). S_x je otevřené pokrytí množiny $\{x\} \times Y$, která je určité kompaktní (proč?), má tedy konečné podpokrytí $T_x \subset S_x$ (Y je kompaktní). Označme nyní U_x průnik množin $\text{pr}_1(W)$, kde $W \in T_x$. U_x je otevřená podmnožina X (jde o průnik konečně mnoha otevřených množin pr_1 je otevřené zobrazení). Systém $(U_x)_{x \in X}$ je otevřené pokrytí množiny X , má tedy konečné podpokrytí. Označme A konečnou množinu prvků $x \in X$ takovou, že systém $(U_x)_{x \in A}$ je otevřené pokrytí množiny X .

Konečně, položme $T = \bigcup_{x \in A} T_x$. Necháme nyní na čtenáři, aby ukázal, že $T \subset S$ a že T je konečné otevřené pokrytí množiny $X \times Y$.

Nyní dokážeme opačnou implikaci. Předpokládejme, že $X \times Y$ je kompaktní a ukážeme, že potom je X kompaktní. Nechť $(U_i)_{i \in I}$ je otevřené pokrytí X , nalezneme jeho konečné podpokrytí. Pro každé $i \in I$ položme $O_i = \text{pr}_1^{-1}(U_i)$, pak $(O_i)_{i \in I}$ je otevřeným pokrytím $X \times Y$. Jelikož je $X \times Y$ kompaktní existuje jeho konečné podpokrytí $(O_i)_{i \in K}$. Potom je ale $(U_i)_{i \in K}$ konečným podpokrytím $(U_i)_{i \in I}$. Kompaktnost Y se ukáže obdobně. $\square$

Důsledek 1.17. *Nechť $A, B \subset X$ jsou kompaktní množiny, potom je $A \times B$ kompaktní podmnožina v $X \times X$.*

Důsledek 1.18. *Nechť $I_1, I_2, \dots, I_n \subset \mathbb{R}$ jsou kompaktní intervaly. Pak uzavřený kvádr $I_1 \times I_2 \times \dots \times I_n \subset \mathbb{R}^n$ je kompaktní množina.*

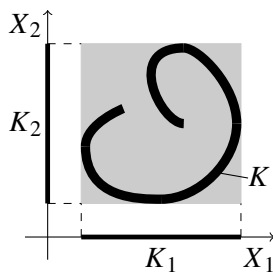
D ů k a z. Indukcí pomocí předchozího důsledku. $\square$

Důsledek 1.19. *Nechť $\bar{B}(x)$ je uzavřená koule vzhledem k libovolné z norem $\|\cdot\|_p$, $1 \leq p \leq \infty$. Pak $\bar{B}(x)$ je kompaktní množina.*

D ů k a z. Plyne z toho, že každá uzavřená koule v $\mathbb{R}^n$ je podmnožinou nějakého kvádru a z toho, že uzavřená podmnožina kompaktní množiny je kompaktní. $\square$

Tvrzení ve větě 1.16 lze samozřejmě indukcí rozšířit na součin konečného počtu topologických prostorů. Ovšem platí, že součin libovolného (i nekonečného) systému kompaktních prostorů je kompaktní — Tichonovova věta.

Věta 1.20. *Množina $K \subset \mathbb{R}^n$ je kompaktní, právě když je uzavřená a ohraničená.*



D ů k a z. Důkaz provedeme pro $n = 2$. Předpokládejme, že $K \subset \mathbb{R}^2$ je kompaktní. Jelikož je $\mathbb{R}^2$ Hausdorffův, tak je K uzavřená (podle [4, věta 3.2, str. 38]). Zbývá ohraničenost. Položme $K_1 = \text{pr}_1(K)$ a $K_2 = \text{pr}_2(K)$, kde pr_1, pr_2 jsou, jak již čtenář vytušil, první a druhá projekce. Tyto projekce jsou spojité a K_1, K_2 kompaktní v $\mathbb{R}$ (podle [4, věta 3.6, str. 39]) a tedy ohraničené. Existuje tedy uzavřený ohraničený interval $I_r = [-r, r]$ takový, že $K_1, K_2 \subset I_r$. Potom ovšem $\bar{B}_r^{\|\cdot\|_\infty}(0) = I_r \times I_r \supset K$.

Nyní opačná implikace, nechť $K \subset \mathbb{R}^2$ je uzavřená a ohraničená. Tedy $K \subset \bar{B}_r^{\|\cdot\|_\infty}(0)$, jelikož $\bar{B}_r^{\|\cdot\|_\infty}(0) = [-r, r] \times [-r, r]$, což je kompaktní množina podle důsledku 1.18, potom je K uzavřenou podmnožinou kompaktní množiny a tedy je sama kompaktní. $\square$

1.5. Spojitost základních zobrazení. Nechť $s, p: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ jsou zobrazení definovaná předpisem

$$\begin{aligned} s(x_1, x_2) &= x_1 + x_2 \\ p(x_1, x_2) &= x_1 x_2 \end{aligned}$$

Ukážeme, že tato zobrazení jsou spojitá.

Nechť $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, $s = s(x_0, y_0) = x_0 + y_0$, zvolme libovolné $\varepsilon > 0$. Pokud libovolné $(x', y') \in B_\varepsilon^{\|\cdot\|_1}(x_0, y_0)$, pak platí

$$|x' - x_0| + |y' - y_0| < \varepsilon$$

Máme

$$|s(x', y') - s(x_0, y_0)| = |x' + y' - x_0 - y_0| \leq |x' - x_0| + |y' - y_0| < \varepsilon.$$

což znamená, že pro každé $(x', y') \in B_\varepsilon^{\|\cdot\|_1}(x_0, y_0)$ platí $s(x', y') \in (x_0 + y_0 - \varepsilon, x_0 + y_0 + \varepsilon)$ nebo-li $s(B_\varepsilon^{\|\cdot\|_1}(x_0, y_0)) \subset (s(x_0, y_0) - \varepsilon, s(x_0, y_0) + \varepsilon)$ a dokazuje spojitost zobrazení s v bodě (x_0, y_0) .

Nyní dokážeme spojitost zobrazení p . Nechť $(t, x) \in \mathbb{R}^2$, $y = p(t, x) = tx$, zvolme $\varepsilon > 0$. Položme $M = \|(t, x)\|_1$ a $\delta = \min\{1, \varepsilon/2(M+1)\}$. Pro libovolné $(t', x') \in B_\delta^{\|\cdot\|_1}(t, x)$ máme $|t'| < M+1$, $|x' - x| < \delta$, $|t' - t| < \delta$, $|x| \leq M < M+1$ a

$$\begin{aligned} |p(t', x') - tx| &= |t'x' - tx| = |t'(x' - x) + (t' - t)x| \\ &\leq |t'| \cdot |x' - x| + |t' - t| \cdot |x| < (M+1)\delta + \delta(M+1) \\ &\leq (M+1) \frac{\varepsilon}{2(M+1)} + \frac{\varepsilon}{2(M+1)} (M+1) = \varepsilon. \end{aligned}$$

To dokazuje spojitost zobrazení p v bodě (t, x) .

Ze spojitosti zobrazení s a p a z věty o spojitosti kompozice spojitých zobrazení plynou známá tvrzení o spojitosti součtu a součinu dvou spojitých funkcí.

Zobrazení s je samozřejmě lineární. Dokažte, že každé lineární zobrazení $l: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ je spojitě.

1.6. Konečněrozměrné normované prostory. V odstavci 1.2 jsme zavedli různé normy na prostoru $\mathbb{R}^n$ a o některých z nich jsme ukázali, že jsou ekvivalentní. Nyní ukážeme, že se jedná o speciální případ obecnějšího tvrzení.

Věta 1.21. *Libovolné dvě normy na konečněrozměrném vektorovém prostoru jsou ekvivalentní.* Důkaz. Stačí dokázat, že libovolné dvě normy na $\mathbb{R}^n$ jsou ekvivalentní (proč?). Nechť tedy $\|\cdot\|$ je norma na $\mathbb{R}^n$. Dokážeme, že je ekvivalentní normě $\|\cdot\|_1$.

Označme $(e_1, \dots, e_n)$ kanonickou bázi v $\mathbb{R}^n$ a položme $M = \max\{\|e_1\|, \|e_2\|, \dots, \|e_n\|\}$. Pro libovolný prvek $x \in \mathbb{R}^n$ platí

$$\begin{aligned} \|x\| &= \|x^1 e_1 + x^2 e_2 + \dots + x^n e_n\| \leq |x^1| \cdot \|e_1\| + |x^2| \cdot \|e_2\| + \dots + |x^n| \cdot \|e_n\| \\ &\leq |x^1| \cdot M + |x^2| \cdot M + \dots + |x^n| \cdot M = M \|x\|_1. \end{aligned}$$

Tím je dokázáno, že norma $\|\cdot\|$ je slabší než norma $\|\cdot\|_1$ (Věta 1.3).

Dokažme nyní naopak, že norma $\|\cdot\|$ je silnější než norma $\|\cdot\|_1$. Označme

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_1 = 1\}$$

(jednotková sféra vzhledem k normě $\|\cdot\|_1$ se středem v nule). Množina S je vzhledem k normě $\|\cdot\|_1$ ohraničená. V topologii normy $\|\cdot\|_1$ je také uzavřená (jako vzor uzavřené množiny $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ při spojitěm zobrazení normou). Je tedy v této topologii kompaktní (Věta 1.20), což znamená, že je kompaktní i ve slabší topologii normy $\|\cdot\|$ (proč?). Dále: funkce $\|\cdot\|: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je vzhledem k normě $\|\cdot\|$ spojitá, nabývá tedy na množině S minimum m . Je jisté $m > 0$ a $\bar{B}_m^{\|\cdot\|}(0) \subset \bar{B}_1^{\|\cdot\|_1}(0)$. Podle Věty 1.3 je tedy norma $\|\cdot\|$ silnější než norma $\|\cdot\|_1$.

Tím je věta dokázána. $\square$

1.7. Prostory lineárních zobrazení. V tomto odstavci zavedeme normovanou strukturu na prostoru lineárních zobrazení dvou vektorových prostorů.

Mějme dva konečněrozměrné normované prostory X, Y . Označme $L(X; Y)$ vektorový prostor lineárních zobrazení z X do Y .

Tento vektorový prostor je, jak víme, konečněrozměrný. Jeho dimenze je rovna součinu dimenzí prostorů X a Y .

Pro každé $l \in L(X; Y)$ položme

$$\|l\| = \max_{x \in \bar{B}_1(0)} \|l(x)\| \quad (1.7.1)$$

(množina $\bar{B}_1(0)$ je kompaktní, zobrazení l a $\|\cdot\|$ jsou spojitá; kompozice těchto zobrazení na této množině tedy má maximum).

Předpisem (1.7.1) je definováno zobrazení $\|\cdot\|: L(X; Y) \rightarrow \mathbb{R}$.

Lemma 1.22. Zobrazení $\|\cdot\|: L(X; Y) \rightarrow \mathbb{R}$ je norma.

D ů k a z. Musíme ověřit podmínky z definice normy.

1. Nechť $l \neq 0$. Pak existuje vektor $x \in X$, pro nějž je $l(x) \neq 0$. Platí $\|x\| \neq 0$ a pro vektor $x_0 = x/\|x\|$ platí $x_0 \in \bar{B}_1(0)$ a $\|l(x_0)\| > 0$. Tedy $\|l\| > 0$.
2. Mějme $l \in L(X; Y)$ a $c \in \mathbb{R}$. Platí

$$\|c \cdot l\| = \max_{x \in \bar{B}_1(0)} \|c \cdot l(x)\| = \max_{x \in \bar{B}_1(0)} |c| \cdot \|l(x)\| = |c| \cdot \max_{x \in \bar{B}_1(0)} \|l(x)\| = |c| \cdot \|l\|.$$

3. Pro $l_1, l_2 \in L(X; Y)$ dostáváme

$$\begin{aligned} \|l_1 + l_2\| &= \max_{x \in \bar{B}_1(0)} \|(l_1 + l_2)(x)\| = \max_{x \in \bar{B}_1(0)} \|l_1(x) + l_2(x)\| \\ &\leq \max_{x \in \bar{B}_1(0)} (\|l_1(x)\| + \|l_2(x)\|) = \max_{x \in \bar{B}_1(0)} \|l_1(x)\| + \max_{x \in \bar{B}_1(0)} \|l_2(x)\| = \|l_1\| + \|l_2\|. \end{aligned}$$

□

Věta 1.23. Pro libovolný vektor $x \in X$ a lineární zobrazení $l \in L(X; Y)$ platí

$$\|l(x)\| \leq \|l\| \cdot \|x\|.$$

D ů k a z. Pro vektor $x_0 = x/\|x\|$ platí $x_0 \in \bar{B}_1(0)$, což podle (1.7.1) znamená, že $\|l(x_0)\| \leq \|l\|$. Nyní dostáváme

$$\|l(x)\| = \|x\| \cdot \|l(x_0)\| \leq \|x\| \cdot \|l\|. \quad \square$$

V případě $X = \mathbb{R}^n$ a $Y = \mathbb{R}^m$ můžeme místo prvků prostoru $L(X; Y)$ uvažovat matice typu $m \times n$. Přesněji řečeno, zobrazení z $L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ do $M_{m,n}$ (to je prostor matic o m řádcích a n sloupcích s reálnými prvky), které lineárnímu zobrazení l přiřadí jeho matici vzhledem ke kanonickým bazím, je izomorfismus vektorových prostorů.

Na prostoru $L(X; Y)$ můžeme tedy kromě normy (1.7.1) uvažovat i libovolnou jinou normu, kterou umíme zavést na prostoru $M_{m,n}$. Tyto normy budou podle Věty 1.21 ekvivalentní. Jelikož prostor $M_{m,n}$ je izomorfní s prostorem $\mathbb{R}^{mn}$ (matice typu $m \times n$ jsou mn -tice čísel), můžeme použít například libovolnou normu zavedenou v odstavci 1.2. Tedy, pro matici $A = (a_{ij}^i)$ můžeme položit

$$\begin{aligned} \|A\|_1 &= \sum_{i,j} |a_{ij}^i|, \\ \|A\|_2 &= \sum_{i,j} \sqrt{(a_{ij}^i)^2}, \\ \|A\|_\infty &= \max_{i,j} |a_{ij}^i|. \end{aligned}$$

Věta 1.24. Nechť $|\cdot|$ je libovolná norma na prostoru $L(X; Y)$. Pak existuje číslo M takové, že pro každé $l \in L(X; Y)$ a $x \in X$ platí

$$\|l(x)\| \leq M|l| \cdot \|x\|.$$

D ů k a z. Plyne z vět 1.3, 1.21, a 1.23. □

DOPLŇKY

Prostor l_2

Ohraničený lineární operátor

Spojitosť lineárního operátoru

2. Derivace prvního řádu

V této základní kapitole pojednáváme o diferencovatelnosti zobrazení $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ (podmnožina U je vždy otevřená). Zavádíme několik základních pojmů derivace: Fréchetovu, Gâteauxovu, derivace podle vektoru a parciální derivace. Ukazujeme souvislost těchto pojmů s pojmem derivace z prvního ročníku. Ukazujeme pravidla pro derivování základních zobrazení. Vysvětluje, že pouze Fréchetova derivace splňuje základní větu o derivaci složeného zobrazení: derivace kompozice dvou zobrazení je rovna kompozici jejich derivací. Slabší derivace podle vektoru a zejména parciální derivace se zase poměrně snadno počítají. Ukazujeme, že v případě spojitě diferencovatelných zobrazení lze výhody všech pojmů derivace spojit: spojitou diferencovatelnost zobrazení na otevřené množině lze snadno odhalit pomocí parciálních derivací a přitom se jedná o pojem se stejně hezkými (či dokonce, jak zjistíme později, hezčími) vlastnostmi, jaké má Fréchetova derivace.

Většina výsledků této kapitoly je nezávislá na volbě normy na prostorech $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$. Na řídce výjimky vždy upozorňujeme.

2.1. Fréchetova derivace. Než přistoupíme k definici toho pojmu, podívejme se derivaci funkce na $\mathbb{R}$: Definovali jsme derivaci funkce $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ v bodě x jako následující limitu

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}. \quad (2.1.1)$$

Geometrický význam derivace (viz obrázek) je pak směrnice tečny ke grafu funkce f v bodě $(x, f(x))$. V čárkovaných souřadnicích tečna hraje roli lineárního zobrazení $l(h) = f'(x) \cdot h$. Pokud si toto uvědomíme, definici derivace pak lze formulovat takto: Mějme $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a $x \in \mathbb{R}$, potom $f'(x)$ je derivací, pokud

$$r(h) = f(x+h) - f(x) - l(h), \quad (2.1.2)$$

kde $l(h) = f'(x) \cdot h$, jde k nule rychleji než lineární zobrazení, tedy splňuje

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{h} = 0. \quad (2.1.3)$$

Jinak řečeno, v daném bodě „zkoušíme“ různé hodnoty $f'(x)$ (tedy různá zobrazení l), ke každé podle vzorce (2.1.2) určíme zbytkovou funkci r a pokud ta splňuje (2.1.3), našli jsme derivaci.

Podobného postupu použijeme pro definici diferencovatelnosti pro funkce $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Zobrazení $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ je *diferencovatelné v bodě* $x \in U$, existuje-li lineární zobrazení $l: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ takové, že

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(x+h) - f(x) - l(h)\|}{\|h\|} = 0. \quad (2.1.4)$$

V podmínce (2.1.4) vystupují dvě normy, které jsou označeny stejným symbolem: jedna na $\mathbb{R}^n$ a druhá na $\mathbb{R}^m$.

Věta 2.1. Lineární zobrazení l , splňující (2.1.4), existuje nejvýše jedno.

D ů k a z. Pripustme, že jsou taková zobrazení dvě, l a $\bar{l}$, a že existuje vektor $h \in \mathbb{R}^n$ takový, že $l(h) \neq \bar{l}(h)$. Jelikož má lineární zobrazení v nule hodnotu nula musí $h \neq 0$. Dále

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x+th) - f(x) - l(th)}{\|th\|} = 0, \quad (l \text{ splňuje (2.1.4)})$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x+th) - f(x) - \bar{l}(th)}{\|th\|} = 0. \quad (\bar{l} \text{ splňuje (2.1.4)})$$

Máme

$$\begin{aligned} 0 \neq \frac{l(h) - \bar{l}(h)}{\|h\|} &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{l(th) - \bar{l}(th)}{\|th\|} = \quad (\text{limita z konstantního výrazu}) \\ &= - \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x+th) - f(x) - l(th)}{\|th\|} + \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x+th) - f(x) - \bar{l}(th)}{\|th\|} = 0. \end{aligned}$$

Tento spor dokazuje větu. $\square$

Lineární zobrazení l z předchozí definice se označuje $df(x)$ a nazývá (Fréchetovou) derivací zobrazení f v bodě x .

Příklad. Uvažujme funkci $f(x, y) = x^2 + y^2$ a lineární zobrazení $l: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $l(h, k) = 2h + 2k$. Ověřme, že l je diferenciálem f v bodě $x = (1, 1)$.

$$\begin{aligned} r(h, k) &= f(x+h, y+k) - f(x, y) - l(h, k) = (1+h)^2 + (1+k)^2 - 1^2 - 1^2 - 2h - 2k = \\ &= h^2 + k^2. \end{aligned}$$

Ověříme (2.1.4). Máme

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{|r(h, k)|}{\|(h, k)\|} = \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{h^2 + k^2}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \sqrt{h^2 + k^2} = 0.$$

Následující tvrzení uvádějí základní vlastnosti Fréchetovy derivace.

Věta 2.2 (o diferenciálu). Zobrazení $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ je diferencovatelné v bodě x , právě když existuje lineární zobrazení $l: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, okolí $V \subset \mathbb{R}^n$ bodu $0 \in \mathbb{R}^n$ a zobrazení $\varepsilon: V \rightarrow \mathbb{R}^m$ tak, že

$$\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0 \quad (2.1.5)$$

a pro každé $h \in V$

$$f(x+h) - f(x) = l(h) + \varepsilon(h)\|h\|. \quad (2.1.6)$$

Platí $l(h) = df(x)(h)$.

D ů k a z. Podmínka (2.1.6) společně s (2.1.5) je ekvivalentní podmínce

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x) - l(h)}{\|h\|} = 0.$$

což dokazuje tvrzení. $\square$

Věta 2.3. Zobrazení $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, diferencovatelné v bodě x , je v tomto bodě spojitě.

D ů k a z. Z (2.1.6) plyne $\lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) - f(x) = 0$. $\square$

Porovnání s případem $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$ — pozn. konečnost derivace !!!!!

Nyní dokážeme základní větu o derivaci složeného zobrazení. Nejprve pomocné lemma:

Lemma 2.4. *Nechť zobrazení $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ je diferencovatelné v bodě $x \in U$. Pak zobrazení*

$$h \mapsto \frac{f(x+h) - f(x)}{\|h\|}$$

je na nějakém okolí bodu $0 \in \mathbb{R}^n$ ohraničené.

D ů k a z. Podle věty 2.2 je

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{\|h\|} = df(x) \left(\frac{h}{\|h\|} \right) + \varepsilon(h).$$

Norma prvního sčítance na pravé straně je ohraničena číslem $\|df(x)\|$, druhý má v bodě $0 \in \mathbb{R}^n$ podle zmíněné věty limitu rovnu 0 je tedy na nějakém okolí tohoto bodu rovněž ohraničený. $\square$

Věta 2.5 (o derivaci složeného zobrazení). *Nechť zobrazení $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ je diferencovatelné v bodě $x \in U$, zobrazení $g: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$ je diferencovatelné v bodě $y = f(x)$. Pak zobrazení $g \circ f$ je diferencovatelné v bodě x a platí*

$$d(g \circ f)(x) = dg(y) \circ df(x). \quad (2.1.7)$$

D ů k a z. Označme $l_f = df$, $l_g = dg$. Pro $h \in \mathbb{R}^n$ označme

$$k = f(x+h) - f(x) = f(x+h) - y.$$

V následujícím (krom jiného) přičteme a odečteme výraz $l_g(f(x+h) - f(x))$, dvakrát použijeme předchozí rovnici, použijeme větu 1.23 a 2.2, máme

$$\begin{aligned} \frac{\|g(f(x+h)) - g(f(x)) - l_g(l_f(h))\|}{\|h\|} &\leq \\ &\leq \frac{\|g(f(x+h)) - g(f(x)) - l_g(f(x+h) - f(x))\|}{\|h\|} + \frac{\|l_g(f(x+h) - f(x)) - l_g(l_f(h))\|}{\|h\|} \leq \\ &\leq \frac{\|g(y+k) - g(y) - l_g(k)\|}{\|h\|} + \|l_g\| \frac{\|f(x+h) - f(x) - l_f(h)\|}{\|h\|} = \\ &= \frac{\|k\| \cdot \|\varepsilon(k)\|}{\|h\|} + \|l_g\| \frac{\|f(x+h) - f(x) - l_f(h)\|}{\|h\|}, \end{aligned}$$

kde $\lim_{u \rightarrow 0} \varepsilon(u) = 0$. Z věty 2.3 plyne, že při $h \rightarrow 0$ je $\lim_{h \rightarrow 0} k = 0$. Navíc, podle lemmatu 2.4 je výraz $\|k\|/\|h\|$ na nějakém okolí nuly ohraničený. Proto je limita výrazu na pravé straně rovna nule a věta dokázána. $\square$

Věta 2.6. *Každé konstantní zobrazení $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ je diferencovatelné v každém bodě $x \in \mathbb{R}^n$. Platí $df(x) = 0$.*

D ů k a z.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x) - 0}{\|h\|} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{\|h\|} = 0. \quad \square$$

Věta 2.7. *Každé lineární zobrazení $l: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ je diferencovatelné v každém bodě $x \in \mathbb{R}^n$. Platí $df(x) = l$.*

D ů k a z.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{l(x+h) - l(x) - l(h)}{\|h\|} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{l(x) + l(h) - l(x) - l(h)}{\|h\|} = 0. \quad \square$$

Věta 2.8. Zobrazení $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ je diferencovatelné v bodě $x \in U$, právě když jsou v tomto bodě diferencovatelné jeho složky $f_1, f_2, \dots, f_m$. Pro každé $h \in \mathbb{R}^n$ platí

$$df(x)(h) = (df_1(x)(h), df_2(x)(h), \dots, df_m(x)(h)). \quad (2.1.8)$$

D ů k a z. Zřejmý. $\square$

Vztah (2.1.8) se dá napsat takto:

$$df(x) = (df_1(x), df_2(x), \dots, df_m(x)).$$

Věta 2.9. Zobrazení $s: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $s(x, y) = x + y$, a $p: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $p(x, y) = xy$, jsou diferencovatelná v každém bodě $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Platí

$$ds(x, y)(h, k) = h + k, \quad dp(x, y)(h, k) = yh + xk.$$

D ů k a z. Zobrazení s je lineární, proto podle věty 2.7 je $ds(x, y) = s$ tedy $ds(x, y)(h, k) = s(h, k) = h + k$.

Pro zobrazení p máme

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{|p(x+h, y+k) - p(x, y) - yh - xk|}{\|(h, k)\|_\infty} = \frac{|(x+h)(y+k) - xy - yh - xk|}{\|(h, k)\|_\infty} = \\ &= \frac{|hk|}{\max\{|h|, |k|\}} \leq \frac{|h| \max\{|h|, |k|\}}{\max\{|h|, |k|\}} = |h|. \end{aligned}$$

Takže

$$\lim_{(h,k) \rightarrow 0} \frac{|p(x+h, y+k) - p(x, y) - yh - xk|}{\|(h, k)\|_\infty} = 0$$

a tvrzení je dokázáno. $\square$

Věta 2.10. Jsou-li $f, g: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ zobrazení diferencovatelná v bodě $x \in U$, pak pro libovolná čísla $a, b \in \mathbb{R}$ je zobrazení $af + bg$ diferencovatelné v bodě x a platí

$$d(af + bg)(x) = adf(x) + bdg(x).$$

D ů k a z. Označme $l: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ lineární zobrazení, přiřazující každému vektoru $(h, k) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ vektor $ah + bk$ a nechť (f, g) je zobrazení $x \mapsto (f(x), g(x))$. Potom $af + bg = l \circ (f, g)$. Nyní máme

$$\begin{aligned} d(af + bg)(x) &= d(l \circ (f, g))(x) = && \text{(definice } l) \\ &= dl(f(x), g(x)) \circ d(f, g)(x) = && \text{(věta 2.5)} \\ &= l \circ (df, dg)(x) = && \text{(věta 2.7 a 2.8)} \\ &= adf(x) + bdg(x). \quad \square && \text{(opět definice } l) \end{aligned}$$

2.2. Derivace podle vektoru, Gâteauxova derivace.

Nechť $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $x \in U$ a $h \in \mathbb{R}^n$. Derivací zobrazení f podle vektoru h v bodě x rozumíme limitu

$$\frac{\partial f}{\partial h}(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + th) - f(x)}{t}. \quad (2.2.1)$$

Nechť $g_{x,h}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ je zobrazení, definované předpisem

$$g_{x,h}(t) = x + th. \quad (2.2.2)$$

Přímo z uvedené definice plyne následující jednoduché tvrzení.

Lemma 2.11. Zobrazení $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ má v bodě $x \in U$ derivaci podle vektoru $h \in \mathbb{R}^n$, právě když je zobrazení $f \circ g_{x,h}$ diferencovatelné v nule a platí

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial h}(x) &= d(f \circ g_{x,h})(0)(1) = \\ &= ((f_1 \circ g_{x,h})'(0), \dots, (f_m \circ g_{x,h})'(0)). \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

D ů k a z. Předpokládejme, že zobrazení $f \circ g_{x,h}$ je diferencovatelné v nule. Pak podle věty 2.2 je ve vztahu

$$(f \circ g_{x,h})(t) - (f \circ g_{x,h})(0) = d(f \circ g_{x,h})(0)(t) + t\varepsilon(t)$$

$\lim_{t \rightarrow 0} \varepsilon(t) = 0$. Vzhledem k tomu, že $(f \circ g_{x,h})(t) = f(x + th)$, dostáváme současně existenci uvažované derivace podle vektoru i první rovnost v (2.2.3). Druhá rovnost plyne z věty 2.8.

Obrácená implikace plyne ihned z !!!!!!! . $\square$

Derivaci zobrazení f v bodě x podle vektoru h budeme označovat následujícími způsoby

$$\frac{\partial f}{\partial h}(x), \quad d_h f(x).$$

Derivace zobrazení f v bodě x podle vektoru h je tedy derivací zobrazení $f \circ g_{x,h}$ v nule. To, společně s větou 2.8, umožňuje počítat derivace podle vektorů velice snadno.

Příklad. Mějme $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 + y^2$, spočítejme derivaci v bodě $(1, 1)$ podle vektoru $h = (1, 2)$. Podle předchozí věty spočítáme $f \circ g_{x,h}$. Předně $g_{(1,1),(1,2)}: t \mapsto (1 + t, 1 + 2t)$, tedy

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial (1,2)}(1, 1) &= (f(1+t, 1+2t))'_{t=0} = ((1+t)^2 + (1+2t)^2)'_{t=0} = \\ &= (2(1+t) + 4(1+2t))_{t=0} = 6. \end{aligned}$$

Je-li zobrazení $h \mapsto d_h f(x)$, které vektoru h přiřazuje derivaci ve směru h , lineární, nazýváme je Gâteauxovou derivací zobrazení f v bodě x a značíme $d_G f(x)$. Je tedy $d_G f(x) \in L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$.

Lemma 2.12. Je-li zobrazení $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ diferencovatelné v bodě $x \in U$, má v tomto bodě i Gâteauxovu derivaci a platí

$$d_G f(x) = df(x).$$

D ů k a z. Uvažujme zobrazení $g_{x,h}$ z (2.2.2). Toto zobrazení je diferencovatelné a platí $dg_{x,h}(0)(t) = th$. Podle věty 2.5 máme

$$d(f \circ g_{x,h})(0)(1) = (df(x) \circ dg_{x,h}(0))(1) = df(x)(h).$$

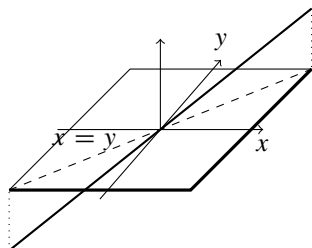
Tvrzení tedy plyne z lemmatu 2.11. $\square$

V následujících příkladech vidíme, že Gâteauxova derivace i derivace ve směru vektoru mohou existovat i funkcí, u kterých je diferencovatelnost vyloučena.

Příklad.

Uvažme funkci $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, definovanou předpisem

$$f(x, y) = \begin{cases} x & \text{když } x = y, \\ 0 & \text{jindy.} \end{cases}$$

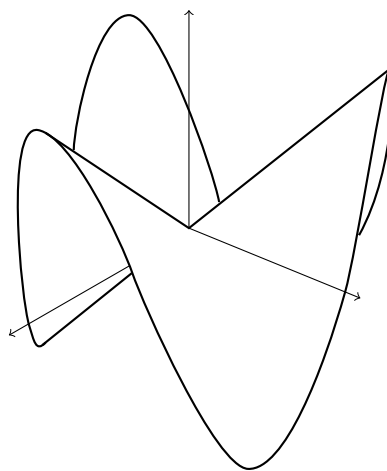


Vidíme, že derivace této funkce v nule podle libovolného vektoru $(h, k) \in \mathbb{R}^2$ existuje. Platí $\frac{\partial f}{\partial(h, k)}(0, 0) = 0$ pro $h \neq k$ a $\frac{\partial f}{\partial(h, k)}(0, 0) = (h, k)$ pro $h = k$, toto zobrazení ovšem není lineární (například derivace podle vektorů $(1, 0)$ a $(0, 1)$ je rovna nule, ale derivace podle jejich součtu, vektoru $(1, 1)$ je nenulová). Tedy $d_G f(0, 0)$ neexistuje.

Přesvědčte se, že podobnou vlastnost má funkce

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 - 3xy^2}{x^2 + y^2}, & \text{když } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{když } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

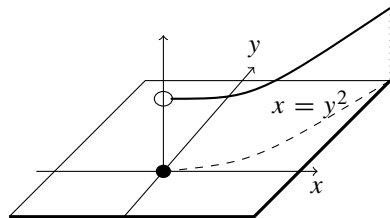
Tato funkce je dokonce spojitá. Graf této funkce vidíme na následujícím obrázku:



Příklad

Uvažujme nyní funkci $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, definovanou předpisem

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{když } x > 0, y = x^2, \\ 0 & \text{jindy.} \end{cases}$$



Snadno zjistíme, že tato funkce má v nule Gâteauxovu derivaci, ačkoli tam není spojitá. Vidíme tedy, že pro Gâteauxovu derivaci neplatí věta 2.3.

Pomocí poslední uvedené funkce lze snadno dokázat, že pro Gâteauxovu derivaci neplatí ani věta 2.5. Stačí definovat funkci $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ předpisem

$$g(t) = (t, t^2)$$

a uvažovat kompozici $f \circ g$.

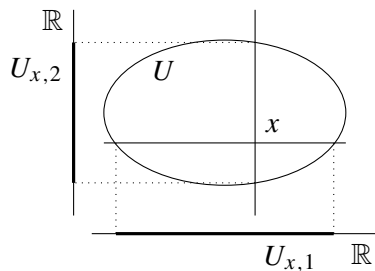
2.3. Parciální derivace. Nechť $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $x \in U$. Označme $e_1, e_2, \dots, e_n$ kanonickou bázi vektorového prostoru $\mathbb{R}^n$ (tedy $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, $\dots$, $e_n = (0, \dots, 0, 1)$). Derivace zobrazení f v bodě x podle e_i se nazývá *parciální derivací zobrazení f podle i -té proměnné v bodě x* . Klademe

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) &= \frac{\partial f}{\partial e_1}(x), \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) &= \frac{\partial f}{\partial e_2}(x), \\ &\vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) &= \frac{\partial f}{\partial e_n}(x),\end{aligned}$$

Takto se tradičně označují parciální derivace, z důvodu potřeby kompaktnějšího zápisu nebo v případech, kdy nejsou pojmenovány proměnné, označujeme parciální derivace také

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x), \quad \partial_{x_i} f(x), \quad \partial_i f(x).$$

Pro uvedené zobrazení f , bod $x \in U$ a číslo $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ označme $U_{x,i}$ množinu všech $t \in \mathbb{R}$ takových, že



$$(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_n) \in U$$

a $f_{x,i}$ zobrazení z $U_{x,i} \rightarrow \mathbb{R}^m$, definované předpisem

$$f_{x,i}(t) = f(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_n).$$

Toto zobrazení se nazývá *i -té parciální zobrazení zobrazení f v bodě x* .

Věta 2.13. Zobrazení $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ má v bodě $x \in U$ parciální derivaci podle i -té proměnné, právě když je v bodě x_i diferencovatelné parciální zobrazení $f_{x,i}$. Pro každé $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ platí

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x) = (f_{x,i})'_j(x_i).$$

D ů k a z. Necháváme na čtenáři. $\square$

Věta 2.13 ukazuje způsob, kterým se ve skutečnosti parciální derivace počítají.

Pro zobrazení $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, které má v bodě $x \in U$ parciální derivace podle všech proměnných, klademe

$$f'(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}.$$

Tato matice se jmenuje *matice parciálních derivací zobrazení f v bodě x* . V literatuře se čtenář může také setkat s označením *Jakobiho matice*.

Předpokládejme, že zobrazení $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ má v bodě $x \in U$ Gâteauxovu derivaci. Pak pro libovolný vektor $h \in \mathbb{R}^n$, $h = h^1 e_1 + h^2 e_2 + \dots + h^n e_n$ platí

$$\begin{aligned} d_G f(x)(h) &= d_G f(x)(h^1 e_1 + h^2 e_2 + \dots + h^n e_n) = \\ &= h^1 d_G f(x)(e_1) + h^2 d_G f(x)(e_2) + \dots + h^n d_G f(x)(e_n) = \\ &= h^1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) + h^2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) = \\ &= f'(x) \cdot h. \end{aligned}$$

Zde jsme využili faktu, že z definice je $d_G f(x)$ je lineární, dále že Gâteauxova derivace přiřazuje derivaci ve směru vektoru, což je v případě vektorů e_i parciální derivace.

To dokazuje následující větu

Věta 2.14. Pro zobrazení $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, které má Gâteauxovu derivaci v bodě $x \in U$, je matice $f'(x)$ maticí lineárního zobrazení $d_G f(x)$ v kanonické bázi.

Pokud je zobrazení f diferencovatelné (Fréchet), pak podle lemmatu 2.12 a předchozí věty dostaneme, že i matice $df(x)$ je $f'(x)$.

Příklad. Mějme zobrazení $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (x^2 + y^2, xy)$. Diferenciál df v bodě (x, y) bude mít (v kanonických bázích) matici

$$f'(x, y) = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ y & x \end{pmatrix},$$

v bodě $(1, 2)$ tedy bude

$$f'(1, 2) = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

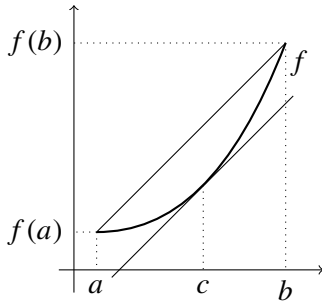
Z uvedeného a z věty 2.5 rovněž okamžitě vyplývá následující věta:

Věta 2.15. Nechť zobrazení $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ je diferencovatelné v bodě $x \in U$, zobrazení $g: V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ je diferencovatelné v bodě $y = f(x)$. Pak

$$(g \circ f)'(x) = g'(y) \cdot f'(x).$$

2.4. Věty o střední hodnotě.

Lagrangeova věta o střední hodnotě (nebo o přírůstku funkce) patří k základním nástrojům matematické analýzy. Zopakujme si ji. Nechť $f: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá a má derivaci v každém bodě (a, b) potom existuje bod $c \in (a, b)$ takový, že



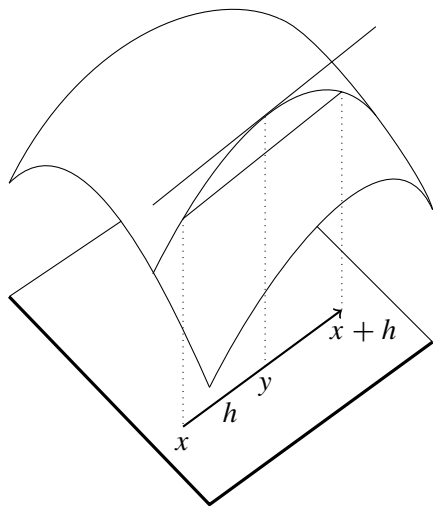
$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Tedy v intervalu (a, b) existuje bod v němž má f derivaci rovnou směrnicí sečny body $(a, f(a))$ a $(b, f(b))$. To lze využít například k odhadu hodnoty $f(b)$, neboť $f(b) = f(a) + f'(c)(b - a)$. Známe-li odhad derivace f na (a, b) , dostaneme odhad $f(b)$.

Nyní k situaci zobrazení mezi kartézskými součinými $\mathbb{R}$. Pro prvky $x, h \in \mathbb{R}^n$ klademe

$$[x, x + h] = g_{x,h}([0, 1])$$

(viz (2.2.2)). Je tedy $[x, x + h]$ množina všech bodů $x + th$, kde $t \in [0, 1]$, čili úsečka, spojující body x a $x + h$. Nyní můžeme přikročit k větě o střední hodnotě.



Věta 2.16 (o střední hodnotě pro funkce). *Nechť množina $U \subset \mathbb{R}^n$ obsahuje úsečku $[x, x + h]$ a funkce $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ má v každém bodě této úsečky derivaci podle vektoru h . Pak existuje bod $y \in [x, x + h]$ takový, že*

$$\frac{\partial f}{\partial h}(y) = f(x + h) - f(x).$$

D ů k a z. Nechť $t_0 \in [0, 1]$. Máme

$$\begin{aligned} f \circ g_{x,h}(t) &= f(x + t_0h + (t - t_0)h) \\ &= f \circ g_{x+t_0h,h}(t - t_0). \end{aligned} \quad (2.4.1)$$

Jelikož funkce $f \circ g_{x+t_0h,h}$ na pravé straně je diferencovatelná v bodě t_0 (to plyne z předpokladu, že funkce f má derivaci podle vektoru h v bodě $x + t_0h$), má zobrazení $f \circ g_{x,h}$ derivaci v bodě t_0 a tedy (vzhledem k libovolnosti bodu t_0) v každém bodě intervalu $[0, 1]$.

Podle Lagrangeovy věty tedy existuje bod $t_0 \in (0, 1)$ takový, že

$$f \circ g_{x,h}(1) - f \circ g_{x,h}(0) = (f \circ g_{x,h})'(t_0) \cdot (1 - 0).$$

Levá strana této rovnice je ovšem rovna $f(x + h) - f(x)$ (jak plyne z (2.2.2)), kdežto pravá $\frac{\partial f}{\partial h}(x + t_0h)$ (jak je vidět po zderivování (2.4.1) v t_0 a pochopení (2.4.1)). Můžeme tedy položit $y = x + t_0h$. $\square$

Důsledek 2.17. *Nechť množina $U \subset \mathbb{R}^n$ obsahuje úsečku $[x, x + h]$ a funkce $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ má Gâteauxovu derivaci v každém bodě této úsečky. Pak existuje prvek $y \in [x, x + h]$ takový, že*

$$f(x + h) - f(x) = d_G f(y)(h).$$

D ů k a z. Plyne z předchozí věty a definice Gâteauxovy derivace. $\square$

Věta 2.18 (o střední hodnotě pro zobrazení). *Nechť množina $U \subset \mathbb{R}^n$ obsahuje úsečku $[x, x + h]$ a zobrazení $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ má v každém bodě této úsečky derivaci podle vektoru h . Pak platí*

$$\|f(x + h) - f(x)\| \leq \sup_{y \in [x, x+h]} \left\| \frac{\partial f}{\partial h}(y) \right\|.$$

D ů k a z. Podobně jako v důkazu věty 2.16 uvažujeme zobrazení $f \circ g_{x,h}$. Toto zobrazení je diferencovatelné v každém bodě intervalu $[0, 1]$. Nechť $l: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ je lineární zobrazení takové, že $\|l\| = 1$ a $l(f(x + h) - f(x)) = \|f(x + h) - f(x)\|$ (takové zobrazení vždy existuje podle Hahn-Banachovy věty z funkcionální analýzy, není ovšem těžké dokázat ji pro jednoduchý případ $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$). Zobrazení $l \circ f \circ g_{x,h}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je diferencovatelné na celém intervalu $[0, 1]$ a můžeme na ně použít Lagrangeovu větu o střední hodnotě z prvního ročníku. Dostáváme

$$l \circ f \circ g_{x,h}(1) - l \circ f \circ g_{x,h}(0) = (l \circ f \circ g_{x,h})'(t_0),$$

pro nějaké $t_0 \in (0, 1)$. Pro levou stranu ovšem platí

$$l \circ f \circ g_{x,h}(1) - l \circ f \circ g_{x,h}(0) = l(f(x + h) - f(x)) = \|f(x + h) - f(x)\|$$

a pro pravou

$$\begin{aligned}
 (l \circ f \circ g_{x,h})'(t_0) &= (l \circ f \circ g_{x+ht_0,h})'(0) \leq \\
 &\leq |d(l \circ f \circ g_{x+ht_0,h})(0)(1)| \leq \\
 &\leq \|l\| \cdot \|d(f \circ g_{x+ht_0,h})(0)(1)\| = \\
 &= \|d_h f(x + ht_0)\| \leq \\
 &\leq \sup_{y \in [x, x+h]} \|d_h f(y)\|.
 \end{aligned}$$

□

Důsledek 2.19. *Nechť množina $U \subset \mathbb{R}^n$ obsahuje úsečku $[x, x+h]$ a zobrazení $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ má v každém bodě této úsečky Gâteauxovu derivaci. Potom*

$$\|f(x+h) - f(x)\| \leq \sup_{y \in [x, x+h]} \|d_G f(y)\| \cdot \|h\|.$$

Důkaz. Plyne z věty 2.18, definice Gâteauxovy derivace a věty 1.23. □

Komentář!!!!!!

Příklad Uvažujme zobrazení $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ definované předpisem

$$f(t) = (\cos t, \sin t)$$

a položíme $x = 0, h = 2\pi$. Platí $f(x+h) - f(x) = (0, 0)$. Přitom ale neexistuje bod $y \in [0, 2\pi]$, ve kterém by bylo $\frac{\partial f}{\partial h}(y) = (0, 0)$.

2.5. Spojitá diferencovatelnost. Předpokládejme, že zobrazení $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ má Gâteauxovu derivaci v každém bodě nějakého okolí $V \subset U$. Dostáváme zobrazení $d_G f: V \rightarrow L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$, přiřazující každému bodu z V Gâteauxovu derivaci zobrazení f v tomto bodě (tedy $d_G f(x)$).

Zvolme nyní bod $x \in U$. Řekneme, že zobrazení f je v bodě x *spojitě diferencovatelné*, je-li zobrazení $d_G f$ definováno na nějakém jeho okolí a je-li v tomto bodě spojitě.

Víme, že prostor $L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ je izomorfní s vektorovým prostorem matic typu $n \times m$. Podle věty 1.21 o spojitosti zobrazení $d_G f$ nerozhoduje, jakou normu na prostoru $L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ zvolíme. Můžeme tedy usoudit, že zobrazení $d_G f$ je spojitě, právě když je spojitě zobrazení f' . O spojitosti tohoto zobrazení se přitom rozhoduje poměrně snadno.

Věta 2.20. *Zobrazení spojitě diferencovatelné v bodě x je v tomto bodě diferencovatelné.*

Věta vypadá na první pohled podezřele triviální, uvědomme si, že v definici spojitě diferencovatelnosti požadujeme existenci Gâteauxovy derivace a její spojitou závislost. Ve tvrzení věty jde ovšem o Fréchetovu derivaci.

Důkaz. Nechť $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ je zobrazení, spojitě diferencovatelné v bodě $x \in U$. Zobrazení $d_G f$ je tedy definováno v každém bodě nějakého okolí V bodu x . Označme $d_G f(y) = l_y$ pro $y \in V$. Platí

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|l_{x+h} - l_x\| = 0.$$

Aplikujeme-li důsledek 2.19 věty o střední hodnotě pro zobrazení na zobrazení $f - l_x$, dostaneme

$$\|f(x+h) - f(x) - l_x(h)\| \leq \sup_{y \in [x, x+h]} \|l_y - l_x\| \cdot \|h\|.$$

Máme tedy

$$\frac{\|f(x+h) - f(x) - l_x(h)\|}{\|h\|} \leq \sup_{y \in [x, x+h]} \|l_y - l_x\|$$

přičemž limita pravé strany pro $h \rightarrow 0$ je rovna nule. $\square$

Věta 2.21. *Nechť zobrazení $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ a $g: V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ jsou spojitě diferencovatelná v každém bodě svých definičních oborů. Pak zobrazení $g \circ f$ je spojitě diferencovatelné v každém bodě množiny U .*

D ů k a z. Necháme čtenáři. $\square$

Lemma 2.22. *Předpokládejme, že zobrazení $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ má derivace podle vektorů h, k , v každém bodě množiny U a zobrazení $d_h f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ je spojitě v bodě $x \in U$. Pak pro každé $a, b \in \mathbb{R}$ existuje derivace $d_{ah+bk} f(x)$ a platí*

$$d_{ah+bk} f(x) = a d_h f(x) + b d_k f(x).$$

D ů k a z. Chceme dokázat, že

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + tah + tbk) - f(x)}{t} = a d_h f(x) + b d_k f(x) = d_{ah}(x) + d_{bk}(x).$$

Na pravé straně dostáváme

$$d_{ah}(x) + d_{bk}(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + tah) - f(x)}{t} + \frac{f(x + tbk) - f(x)}{t}.$$

Na levé straně

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + tah + tbk) - f(x)}{t} &= \quad \quad \quad (\text{trik}) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + tah + tbk) - f(x + tbk) + f(x + tbk) - f(x)}{t}. \end{aligned}$$

Stačí dokázat, že

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + tah + tbk) - f(x + tbk)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + tah) - f(x)}{t}$$

Označme

$$g(x) = \frac{f(x + tbk) - f(x)}{t}.$$

Ukážeme, že

$$g(x + tah) - g(x) = \frac{f(x + tah + tbk) - f(x + tah)}{t} - \frac{f(x + tbk) - f(x)}{t}.$$

jde k nule pro $t \rightarrow 0$. Podle věty 2.18 platí

$$\|g(x + tah) - g(x)\| \leq \sup_{y \in [x, x+tah]} \|d_{tah} g(y)\|. \quad (2.5.1)$$

Ale

$$d_{tah} g(y) = a(d_h f(y + tbk) - d_h f(y)),$$

což podle předpokladu o spojitosti zobrazení $d_h f$ znamená, že limita levé strany (2.5.1) pro $t \rightarrow 0$ je rovna nule. Tím je lemma dokázáno. $\square$

Věta 2.23. *Nechť pro zobrazení $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ existují všechny funkce $\partial_{x_j} f_i: U \rightarrow \mathbb{R}$, kde $i \in \{1, \dots, m\}$, $j \in \{1, \dots, n\}$, a jsou na množině U spojité. Pak zobrazení f je spojitě diferencovatelné v každém bodě množiny U .*

D ů k a z. Podle předchozího lemmatu má zobrazení f Gâteauxovu derivaci v každém bodě množiny U (proč?). Tvrzení tedy plyne z předpokladu o spojitosti parciálních derivací. $\square$

Důsledek: Spojité parc. derivace $\Rightarrow$ diferencovatelnost a matice parciálních derivací.

DOPLŇKY

Definice Fréchetovy derivace je nezávislá na volbě norem.

Gradient

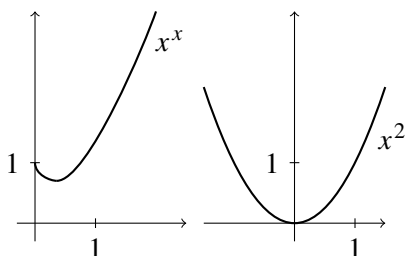
3. Inverzní a implicitní zobrazení

V této kapitole uvádíme dvě důležité věty, které nacházejí aplikace v mnoha oblastech matematiky: Větu o inverzním a větu o implicitním zobrazení.

3.1. Inverzní zobrazení. V tomto odstavci formulujeme větu o inverzním zobrazení na prostoru $\mathbb{R}^n$.

Nejprve se však vraťme k situaci funkce na $\mathbb{R}$. Pokud spojitá funkce $f: U \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je monotonní na intervalu I pak zúžení $f: I \rightarrow f(I)$ je homeomorfismus, tedy existuje inverze f^{-1} .

Příklad. Funkce $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^x$ je rostoucí na každém $[a, b] \subset [1, \infty)$ a má zde inverzi, ačkoli analytické řešení rovnice $y = x^x$ neznáme.



Situace se komplikuje v případě, že f není monotonní na celém definičním oboru, pak by přirozeným postupem bylo nalézt intervaly monotonnosti a na nich by pak existovaly inverze.

Příklad. Uvažujme $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, na intervalech $(-\infty, 0]$ a $[0, \infty)$ je f monotonní a existují na nich její inverze konkrétně $\sqrt{x}$ a $-\sqrt{x}$. Na druhou stranu neexistuje okolí bodu 0 na kterém by x^2 měla inverzi.

Zamysleme se ještě nad situací v předchozím příkladě, existence intervalu monotonnosti plyne z faktu, že se na něm znaménko derivace nemění. Pokud je funkce spojitě diferencovatelná, pak pouhý fakt, že je tato derivace nenulová, zaručuje existenci intervalu o stejném znaménku derivace a tedy lokální monotonnost.

To nás přivádí k tvrzení o inverzním zobrazení pro funkce z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$, které je jen jednoduchým důsledkem tvrzení z prvního ročníku.

Věta 3.1. *Nechť $f: U \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitě diferencovatelná v x_0 a $f'(x_0) \neq 0$, potom existuje okolí I bodu x_0 , okolí J bodu $y_0 = f(x_0)$ a funkce $f^{-1}: J \rightarrow I$, která je inverzí ke zúžení f na I a platí*

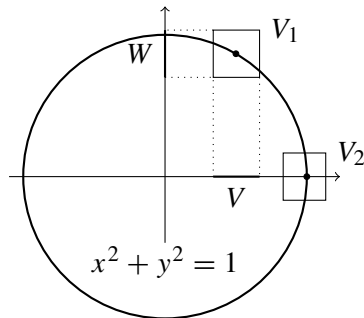
$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

V odstavci 3.3 dokážeme obecnější tvrzení pro zobrazení mezi prostory $\mathbb{R}^n$.

3.2. Věta o implicitní funkci. Uvažujme rovnici ve tvaru $f(x, y) = 0$, kde f je daná funkce $f: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. často nás zajímá, pro která (x, y) je rovnice splněna. Označme M množinu takových řešení, tedy $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = 0\}$.

Nyní si položíme otázku, zda lze množinu M popsat pomocí rovnice $y = g(x)$, pro nějakou funkci $g: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Příklad. Pokud $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$, pak množinou M je kružnice se středem v počátku a poloměrem 1. Tuto množinu nelze popsat jednou rovnicí ve tvaru $y = g(x)$ (lze snadno vidět, že pokud je $x = 0$, musela by g mít dvě hodnoty ± 1).



Obdobně lze snadno najít příklad rovnice $f(x, y) = 0$ s prázdnou množinou řešení, či případ kdy M bude mít neprázdný vnitřek. To nás přivádí na problém, kdy lze popsat množinu M alespoň lokálně.

Takže zda kolem každého bodu množiny M existuje jeho okolí V , jehož průnik s množinou $V \cap M$ je popsateľný jako $y = g(x)$, tedy zda $V \cap M$ je grafem funkce g .

V případě na obrázku vidíme, že V_1 je okolím, které po průniku s M je grafem nějaké funkce g (bude se zřejmě jednat o zúžení funkce $\sqrt{1-x^2}$ na nějaký interval). Na druhou stranu i kdybychom okolí V_2 kolem $(1, 0)$ zmenšovali nebude $V_2 \cap M$ grafem žádné funkce (ta by musela mít nalevo od 1 dvě hodnoty zatímco napravo žádnou).

Funkce g v předchozích odstavcích se nazývá *implicitně definovaná funkcí* f .

Odpověď kdy existuje implicitně definovaná funkce na okolí bodu množiny M dává následující věta.

Věta 3.2 (věta o implicitní funkci $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$). *Nechť $f: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá, spojitě diferencovatelná v (x_0, y_0) . Uvažujme množinu $M = \{(x, y) \in U \mid f(x, y) = 0\}$. Jestliže $\partial_y f(x_0, y_0) \neq 0$, potom existují okolí V bodu x_0 , W bodu y_0 a zobrazení $g: V \rightarrow W$ tak, že $M \cap (V \times W)$ je rovno grafu zobrazení g .*

Navíc zobrazení g je v x_0 diferencovatelné a platí

$$g'(x_0) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)}. \quad (3.2.1)$$

Na konci této kapitoly dokážeme obecnější tvrzení.

Příklad. Uvažujme opět množinu M danou body, pro které je funkce $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ rovna 0. Ukážeme, že existuje okolí bodu $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$, na kterém rovnice $f(x, y) = 0$ implicitně definuje y jako funkci x a určíme derivaci jejího vyjádření. (Víme, že toto vyjádření je $y = \sqrt{1-x^2}$ a derivace je -1 , ale použijeme právě uvedené věty o implicitní funkci.)

Derivace $\partial_y f(x, y) = 2y$, to je různé od nuly v bodě $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$, proto můžeme použít větu 3.2. Dostáváme, že existuje okolí bodu $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ na němž lze y vyjádřit jako funkci x , jestliže si tuto funkci označíme g je derivace $g'(\sqrt{2}/2)$ rovna

$$g'(\sqrt{2}/2) = -\frac{\partial_x f(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)}{\partial_y f(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)} = \frac{2x}{2y} \Big|_{(x,y)=(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)} = -1.$$

Pokud víme, že existuje implicitně definovaná funkce g , jako tomu je v předchozím příkladě, na jistém okolí x_0 platí rovnice

$$f(x, g(x)) = 0.$$

Derivací této konstantní funkce (jde o složenou funkci, vnitřní funkce je $x \mapsto (x, g(x))$), dostáváme

$$0 = (f(x, g(x)))' = \frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x)) \cdot 1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x)) \cdot g'(x).$$

Odtud lze pro $x = x_0$ obdržet vzorec (3.2.1). My však může zderivovat funkci podruhé a získáme vzorec pro $g''(x)$. V následujících výpočtech jsme použili označení a pojmy z kapitoly 4 o vyšších derivacích.

$$\begin{aligned} 0 &= (f(x, g(x)))'' = \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, g(x)) + \frac{\partial^2 f}{\partial xy}(x, g(x)) \cdot g'(x) + \frac{\partial^2 f}{\partial xy}(x, g(x)) \cdot g'(x) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, g(x)) \cdot (g'(x))^2 \\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x)) \cdot g''(x). \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x)) \cdot g''(x) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, g(x)) - 2 \frac{\partial^2 f}{\partial xy}(x, g(x)) \cdot g'(x) - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, g(x)) \cdot (g'(x))^2 \end{aligned}$$

V následující úpravě jsme pro $g'(x)$ využili vztah (3.2.1).

$$g''(x) = \frac{-\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, g(x)) \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial xy}(x, g(x)) \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, g(x)) \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right)^2}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right)^3}$$

Příklad. Ověřte, že $y = g(x)$ zadaná implicitně vztahem

$$f(x, y) = x^3 + 2x^2y + y^4 = 1$$

má v bodě $(x_0, y_0) = (0, 1)$ lokální maximum.

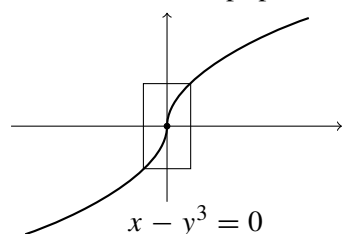
Nejprve ověříme, že f má v x_0 nulovou derivaci. Využijeme vztahu (3.2.1).

$$g'(x_0) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)} = \frac{3x_0^2 + 4x_0y_0}{2x_0^2 + 4y_0^3} = \frac{0}{4} = 0.$$

Druhou derivací g v bodě x_0 , kterou vypočítáme podle vzorce nad příkladem, zjistíme, že tato je záporná.

$$\begin{aligned} g''(x_0) &= \frac{(-6x_0 - 4y_0)(2x_0^2 + 4y_0^3)^2 + 2(4y_0)(3x_0^2 + 4x_0y_0)(2x_0^2 + 4y_0^3) - (12y_0^2)(3x_0^2 + 4x_0y_0)^2}{(2x_0^2 + 4y_0^3)^3} \\ &= \frac{-6(2)^2}{(2)^3} = -3. \end{aligned}$$

Věta 3.2 v žádném případě neříká, že v bodech, kde je $\partial_y f(x, y)$ rovna nule, vyjádření y jako funkce x neexistuje. V předchozím příkladě tomu tak sice bylo, ovšem obecně tomu tak být nemusí. Může existovat rovnice $f(x, y) = 0$ a na okolí bodu s $\partial_y f(0, 0) = 0$ na kterém lze vyjádřit y jako funkci x . Viz obrázek.



Z rovnice

$$x - y^3 = 0$$

lze vyjádřit y , vždyť

$$y = \sqrt[3]{x}.$$

Ačkoliv bylo $\partial_y f(0, 0) = 3y^2|_{y=0} = 0$.

Věta 3.3 (věta o implicitní funkci $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$). *Nechť $f: U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá, spojitě diferencovatelná v (x_0, y_0, z_0) . Uvažujme množinu $M = \{(x, y, z) \in U \mid f(x, y, z) = 0\}$. Jestliže $\partial_z f(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, potom existují okolí V bodu (x_0, y_0) , W bodu z_0 a zobrazení $g: V \rightarrow W$ tak, že $M \cap (V \times W)$ je rovno grafu zobrazení g . Navíc zobrazení g je v (x_0, y_0) diferencovatelné a platí*

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)}{\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)}, \quad (3.2.2)$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)}{\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)}. \quad (3.2.3)$$

Příklad!!!!

DOPLŇKY

3.3. Obecná věta o inverzním zobrazení.

Věta 3.4 (o inverzním zobrazení). *Nechť $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ je spojitě zobrazení, spojitě diferencovatelné v bodě $x_0 \in U$. Jestliže lineární zobrazení $df(x_0)$ je izomorfismus, pak existuje okolí V bodu x_0 tak, že množina $W = f(V)$ je okolí bodu $y_0 = f(x_0)$ a zúžení $f: V \rightarrow W$ je homeomorfismus. Inverzní zobrazení $f^{-1}: W \rightarrow V$ je diferencovatelné v bodě y_0 . Platí*

$$df^{-1}(y_0) = (df(x_0))^{-1}. \quad (3.3.1)$$

Lemma 3.5. *Nechť $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ je spojitě zobrazení, spojitě diferencovatelné v bodě $x_0 \in U$ a takové, že $df(x_0) = \text{id}_{\mathbb{R}^n}$. Pak existuje okolí V bodu x_0 tak, že množina $W = f(V)$ je okolí bodu $y_0 = f(x_0)$ a zúžení $f: V \rightarrow W$ je homeomorfismus.*

Důkaz. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že zobrazení f má Gâteauxovu derivaci v každém bodě množiny U . Položme $g = f - \text{id}_{\mathbb{R}^n}$ (čili $g(x) = f(x) - x$ pro každé $x \in U$). Máme

$$dg(x_0) = df(x_0) - d\text{id}_{\mathbb{R}^n}(x_0) = 0$$

(viz věty 2.10 a 2.7). Máme tedy

$$\|dg(x_0)\| = 0$$

Podle předpokladu je zobrazení f spojitě diferencovatelné v bodě x_0 . Zobrazení g je tedy rovněž spojitě diferencovatelné v bodě x_0 , což znamená, že zobrazení $d_G g: U \rightarrow L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ je spojitě v bodě x_0 . Existuje tedy uzavřená koule B se středem v bodě x_0 taková, že pro všechny její prvky x platí

$$\|d_G g(x)\| \leq \frac{1}{2}, \quad \det f'(x) \neq 0. \quad (3.3.2)$$

Zvolme nyní dva libovolné body $x_1, x_2 \in B$. Podle důsledku 2.19 věty o střední hodnotě 2.18 je

$$\|g(x_2) - g(x_1)\| \leq \sup_{y \in [x_1, x_2]} \|d_G g(y)\| \cdot \|x_2 - x_1\|$$

což společně s (3.3.2) dává

$$\|g(x_2) - g(x_1)\| \leq \frac{1}{2} \|x_2 - x_1\|$$

Máme tedy

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|x_2 - x_1\| &\geq \|g(x_2) - g(x_1)\| = \|f(x_2) - x_2 - f(x_1) + x_1\| = \\ &= \|(x_1 - x_2) - (f(x_2) - f(x_1))\| \geq \|x_2 - x_1\| - \|(f(x_2) - f(x_1))\|, \end{aligned}$$

neboli

$$2\|f(x_2) - f(x_1)\| \geq \|x_2 - x_1\|, \quad (3.3.3)$$

což dokazuje, že zobrazení f je na množině B injektivní.

Uvažme nyní množinu $f(\text{fr } B)$. Tato množina je kompaktní (množina $\text{fr } B$ je kompaktní a zobrazení f spojitě) a neobsahuje bod y_0 (zobrazení f je na kouli B prosté a $x_0 \notin \text{fr } B$). Existuje tedy číslo $d > 0$ takové, že pro každý prvek $y \in f(\text{fr } B)$ platí

$$\|y - y_0\| \geq d. \quad (3.3.4)$$

Položme

$$W = B_{d/2}(y_0) \quad (3.3.5)$$

a dokažme, že $W \subset f(\text{int } B)$.

Nechť $y_1 \in W$ je libovolný bod. Definujme funkci $h: B \rightarrow \mathbb{R}$ předpisem

$$h(x) = \|f(x) - y_1\|^2 = \sum_{i=1}^n (f^i(x) - (y_1)_i)^2$$

Tato funkce je spojitá a v každém bodě uvnitř množiny B má Gâteauxovu derivaci. Ze spojitosti této funkce a z kompaktnosti množiny B plyne, že existuje bod x_1 , ve kterém funkce h má minimum. Bod x_1 leží určitě uvnitř množiny B : kdyby totiž ležel na její hranici, bylo by $\|f(x_1) - y_1\| \geq d$ (to plyne z (3.3.4)) a $\|f(x_0) - y_1\| < d/2$ (viz (3.3.5)), což by znamenalo, že $h(x_0) < h(x_1)$ a v x_1 funkce h nemá minimum. A jelikož $x_1 \in \text{int } B$ a funkce h má v x_1 minimum, musí v tomto bodě mít všechny parciální derivace nulové:¹⁾ $\partial_i h(x_1) = 0$ pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$. Jelikož

$$\partial_j h(x_1) = \sum_{i=1}^n 2(f^i(x_1) - (y_1)_i) \partial_j f^i(x_1) = 0$$

a $\det f'(x_1) \neq 0$ (3.3.2), dostáváme, že $f(x_1) = y_1$.

Položme $V = f^{-1}(W) \cap \text{int } B$. Právě jsme ukázali, že zúžení $f: V \rightarrow W$ je bijekce. Zbývá tedy dokázat, že zobrazení $f^{-1}: W \rightarrow V$ je spojitě. To ovšem snadno plyne ze vztahu

$$\|f^{-1}(y_2) - f^{-1}(y_1)\| \leq 2\|y_2 - y_1\|,$$

který pro libovolné y_1, y_2 plyne z (3.3.3).

Tím je lemma dokázáno. $\square$

¹⁾Toto tvrzení je vcelku zřejmé; dokážeme je však až v kapitole 5

Lemma 3.6. *Nechť $f: V \rightarrow W$ je bijekce mezi otevřenými množinami v $\mathbb{R}^n$, diferencovatelná v bodě $x_0 \in V$ a taková, že $df(x_0) = \text{id}_{\mathbb{R}^n}$. Dále předpokládejme, že zobrazení f^{-1} je spojitě v bodě $y_0 = f(x_0)$. Pak zobrazení f^{-1} je diferencovatelné v bodě y_0 a platí*

$$df^{-1}(y_0) = \text{id}_{\mathbb{R}^n}.$$

D ů k a z. Pro libovolný bod $y \in W$, $y = f(x)$, máme

$$\begin{aligned} \|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0) - \text{id}_{\mathbb{R}^n}(y - y_0)\| &= \|x - x_0 - f(x) + f(x_0)\| = \\ &= \|f(x) - f(x_0) - \text{id}_{\mathbb{R}^n}(x - x_0)\| = \|x - x_0\| \cdot \varepsilon(x - x_0), \end{aligned}$$

kde $\lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x - x_0) = 0$ (viz větu 2.2 (o diferenciálu)). Dále,

$$\begin{aligned} \|x - x_0\| \cdot \varepsilon(x - x_0) &= \|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)\| \cdot \varepsilon(f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)) = \\ &= \|y - y_0\| \cdot \frac{\|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)\|}{\|y - y_0\|} \cdot \varepsilon(f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)). \end{aligned}$$

Jelikož $\lim_{y \rightarrow y_0} \varepsilon(f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)) = 0$ (zobrazení f^{-1} je spojitě v y_0), stačí ukázat, že výraz $\|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)\|/\|y - y_0\|$ je na nějakém okolí bodu y_0 ohraničený. Tvrzení pak bude vyplývat z věty 2.2 (o diferenciálu).

Nechť V_0 je okolí bodu x_0 takové, že pro každé $x \in V_0$ platí

$$\frac{\|f(x) - f(x_0) - x + x_0\|}{\|x - x_0\|} < \frac{1}{2} \quad (\text{diferencovatelnost } f \text{ s } df(x_0) = \text{id})$$

Pak

$$\frac{1}{2} > \frac{\|f(x) - f(x_0) - x + x_0\|}{\|x - x_0\|} \geq \frac{\|x - x_0\|}{\|x - x_0\|} - \frac{\|f(x) - f(x_0)\|}{\|x - x_0\|} = 1 - \frac{\|f(x) - f(x_0)\|}{\|x - x_0\|}$$

neboli

$$\frac{\|f(x) - f(x_0)\|}{\|x - x_0\|} > \frac{1}{2}.$$

Označme W_0 okolí bodu y_0 , pro jehož všechny prvky y platí $f^{-1}(y) \in V_0$. Pro libovolný prvek $y \in W$ a $x = f^{-1}(y)$ pak máme

$$\frac{\|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)\|}{\|y - y_0\|} = \frac{\|x - x_0\|}{\|f(x) - f(x_0)\|} < 2.$$

Tím je lemma dokázáno. $\square$

Nyní dokážeme dvě lemmata podobná lemmatům 3.5 a 3.6, avšak s oslabeným předpokladem o derivaci zobrazení f .

Lemma 3.7. *Nechť $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ je spojitě zobrazení, spojitě diferencovatelné v bodě $x_0 \in U$. Jestliže lineární zobrazení $df(x_0)$ je izomorfismus, pak existuje okolí V bodu x_0 tak, že množina $W = f(V)$ je okolím bodu $y_0 = f(x_0)$ a zúžení $f: V \rightarrow W$ je homeomorfismus.*

D ů k a z. Označme $l = df(x_0)$, $y_0 = f(x_0)$ a položme $\tilde{f} = l^{-1} \circ f$. Máme

$$d\tilde{f}(x_0) = d(l^{-1} \circ f)(x_0) = dl^{-1}(y_0) \circ df(x_0) = l^{-1} \circ l = \text{id}_{\mathbb{R}^n}.$$

Na zobrazení $\tilde{f}$ tedy lze aplikovat lemma 3.5. Platí $f^{-1} = l \circ \tilde{f}$. $\square$

Lemma 3.8. *Nechť $f: V \rightarrow W$ je bijekce mezi otevřenými množinami v $\mathbb{R}^n$, diferencovatelná*

v bodě $x_0 \in V$ a taková, že $df(x_0)$ je izomorfismus. Dále předpokládejme, že zobrazení f^{-1} je spojitě v bodě $y_0 = f(x_0)$. Pak zobrazení f^{-1} je diferencovatelné v bodě y_0 a platí

$$df^{-1}(y_0) = (df(x_0))^{-1}.$$

D ů k a z. Stejně jako v důkazu předchozího lemmatu označme $l = df(x_0)$ a položme $\tilde{f} = l^{-1} \circ f$. Máme $d\tilde{f}(x_0)$ a podle lemmatu 3.7 $d\tilde{f}^{-1}(y_0) = \text{id}_{\mathbb{R}^n}$. Nyní $f^{-1} = \tilde{f}^{-1} \circ l^{-1}$ a

$$df^{-1}(y_0) = d(\tilde{f}^{-1} \circ l^{-1})(y_0) = d\tilde{f}^{-1}(x_0) \circ dl^{-1}(y_0) = \text{id}_{\mathbb{R}^n} \circ l^{-1} = l^{-1}.$$

Tím je lemma dokázáno. $\square$

D ů k a z. (věty 3.4) Plyne z předchozích lemmat. $\square$

Tvrzení o derivaci inverzního zobrazení (vztah (3.3.1)) lze také dokázat přímo, pomocí věty 2.5 o derivaci složeného zobrazení. Platí totiž

$$\text{id}_{\mathbb{R}^n} = d\text{id}_{\mathbb{R}^n}(x_0) = d(f^{-1} \circ f)(x_0) = df^{-1}(y_0) \circ df(x_0).$$

Odtud už vztah (3.3.1) plyne.

Za poznámku jistě také stojí, že dimenze definičního oboru a oboru hodnot zobrazení f ve větě 3.4 musí být stejné; jinak by totiž nemohl platit vztah (3.3.1) (to víme z lineární algebry). Tento závěr lze dalekosáhle zobecnit: snadno lze například ukázat, že žádná spojitě diferencovatelná funkce $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ není bijekce (pokud je $\partial_1 f(x, y) \neq 0$ pro každé (x, y) z nějaké otevřené množiny V , pak stačí uvážit zobrazení $g(x, y) = (f(x, y), y)$).

Předpokládáme-li ve větě o inverzním zobrazení navíc, že zobrazení f je na množině U diferencovatelné, lze okolí V a W nalézt tak, aby inverzní zobrazení f^{-1} bylo diferencovatelné na okolí W a spojitě diferencovatelné v bodě y_0 . Pokuste se to dokázat.

3.4. Obecná věta o implicitním zobrazení. Mějme zobrazení $f: U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, diferencovatelné v bodě $(x_0, y_0) \in U$ a označme $l_1: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ a $l_2: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ lineární zobrazení, definovaná předpisy

$$\begin{aligned} l_1(h_1) &= df(x_0, y_0)(h_1, 0), \\ l_2(h_2) &= df(x_0, y_0)(0, h_2). \end{aligned} \tag{3.4.1}$$

Evidentně platí

$$df(x_0, y_0) = l_1 + l_2.$$

Zobrazením l_1 a l_2 se někdy říká *parciální derivace zobrazení f v bodě (x_0, y_0)* (zobecněného typu). Přestože my jsme si tento termín vyhradili pro jiný objekt, vidíme, že s ním velmi úzce souvisí.

Věta 3.9 (o implicitním zobrazení). Necht $f: U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ je spojitě zobrazení, spojitě diferencovatelné v bodě $(x_0, y_0) \in U$ takovém, že $f(x_0, y_0) = 0$. Uvažme lineární zobrazení l_1 a l_2 z (3.4.1) a množinu $M = \{(x, y) \in U \mid f(x, y) = 0\}$. Jestliže zobrazení l_2 je izomorfismus, pak existují okolí V_1 bodu x_0 , okolí V_2 bodu y_0 a zobrazení $g: V_1 \rightarrow V_2$ tak, že množina $M \cap (V_1 \times V_2)$ je rovna grafu zobrazení g .

Zobrazení g je v bodě x_0 diferencovatelné a platí

$$dg(x_0) = -l_2^{-1} \circ l_1. \tag{3.4.2}$$

D ů k a z. Uvažme zobrazení $F: U \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, $F(x, y) = (x, f(x, y))$. Toto zobrazení je spojitě na U a spojitě diferencovatelné v bodě (x_0, y_0) . Pro lineární zobrazení $dF(x_0, y_0)$ a libovolný vektor (h_1, h_2) platí

$$dF(x_0, y_0)(h_1, h_2) = (h_1, df(x_0, y_0)(h_1, h_2)) = (h_1, l_1(h_1) + l_2(h_2)),$$

Toto zobrazení je tedy izomorfismus: inverzní zobrazení je totiž dáno předpisem

$$(dF(x_0, y_0))^{-1}(u_1, u_2) = (u_1, l_2^{-1}(u_2 - l_1(u_1))) \quad (3.4.3)$$

Podle věty 3.4 tedy existují okolí V bodu (x_0, y_0) , okolí W bodu $(x_0, 0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ a inverzní zobrazení $F^{-1}: W \rightarrow V$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že množina V je rovna součinu dvou otevřených množin: $V = V_1 \times V_2$.

Nyní pro $x \in V_1$ položíme

$$g(x) = \text{pr}_2(F^{-1}(x, 0)). \quad (3.4.4)$$

Nyní dokážeme, že zobrazení g má požadované vlastnosti. Nechť $(x_0, y_0) \in M \cap (V_1 \times V_2)$. Máme $f(x, y) = 0$, neboli $F(x, y) = (x, 0)$, což znamená, že

$$g(x) = \text{pr}_2(F^{-1}(x, 0)) = \text{pr}_2(x, y) = y.$$

Naopak, pro libovolné $x \in V$ máme

$$(x, f(x, g(x))) = F(x, g(x)) = F(x, \text{pr}_2(x, 0)).$$

Přitom $\text{pr}_1(F^{-1}(x, 0)) = x$, což znamená

$$(x, f(x, g(x))) = F(F^{-1}(x, 0)) = (x, 0)$$

a celkově

$$f(x, g(x)) = 0.$$

Zbývá tedy dokázat vztah (3.4.2). Podle (3.4.3) a (3.4.4) máme

$$dg(x_0)(u_1) = \text{pr}_2(dF^{-1}(x_0, 0)(u_1, 0)) = \text{pr}_2(u_1, -l_2^{-1} \circ l_1(u_1)) = -l_2^{-1} \circ l_1(u_1).$$

Tím je celé tvrzení dokázáno. $\square$

O zobrazení g z předchozí věty se někdy říká, že je *implicitně definováno* zobrazením f .

Podobně jako u věty o inverzním zobrazení, vztah (3.4.2) můžeme dokázat přímo, pomocí vztahu (3.4.1): Víme, že pro každé $x \in V_1$ platí

$$f(x, g(x)) = 0$$

Derivací této rovnice v bodě x_0 dostaneme

$$0 = df(x_0, y_0) \circ d(\text{id}(x), g(x))|_{x_0} = l_1 + l_2 \circ dg(x_0) = 0$$

což je ekvivalentní s (3.4.2). Tento způsob odvozování derivace implicitního zobrazení se často používá při praktických výpočtech.

Větu o implicitním zobrazení jsme vlastně dokázali jako poměrně jednoduchý důsledek věty o inverzním zobrazení. Kdybychom ji dokázali bez použití této věty, mohli bychom pak naopak větu o inverzním zobrazení dokázat pomocí věty o implicitním zobrazení, a to pomocí vztahu

$$f(f^{-1}(x)) - x = 0.$$

Můžete se o to pokusit.

4. Derivace vyšších řádů

4.1. Bilineární a kvadratická zobrazení. Připomeňme si, že zobrazení $l: X_1 \times X_2 \rightarrow Y$, kde X_1, X_2 a Y jsou vektorové prostory, se nazývá bilineární, jsou-li pro každé $x_1 \in X_1, x_2 \in X_2$ zobrazení

$$\begin{aligned} X_1 &\rightarrow Y, x \mapsto l(x, x_2), \\ X_2 &\rightarrow Y, x \mapsto l(x_1, x), \end{aligned}$$

lineární. Vektorový prostor všech bilineárních zobrazení $l: X_1 \times X_2 \rightarrow Y$ označujeme symbolem $L(X_1 \times X_2; Y)$.

Libovolnému lineárnímu zobrazení $l \in L(X_1; L(X_2; Y))$ lze předpisem

$$\bar{l}(x_1, x_2) = l(x_1)(x_2)$$

přiřadit bilineární zobrazení $\bar{l} \in L(X_1 \times X_2; Y)$. Přiřazení $l \rightarrow \bar{l}$ je evidentně bijektivní.

Dokažte to.

Přesvědčte se o tom, že zobrazení $\bar{l}$ je skutečně bilineární!

Příklad Pro libovolné číslo x_1 definujme lineární zobrazení $l(x_1)$ předpisem

$$l(x_1)(x) = 2x_1x.$$

Zobrazení l je zjevně lineární. Příslušné zobrazení $\bar{l}: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je dáno předpisem

$$\bar{l}(x_1, x_2) = 2x_1x_2. \quad (4.1.1)$$

Bilineární zobrazení $l \in L(X \times X; Y)$ se nazývá *symetrické*, jestliže pro libovolné dva vektory $x_1, x_2 \in X$ platí

$$l(x_1, x_2) = l(x_2, x_1).$$

Bilineární zobrazení l z (4.1.1) je symetrické.

Každé bilineární zobrazení z $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$ je symetrické (lze dokázat pomocí vyjádření vektorů z $\mathbb{R}$ v bázi).

Symetrická a *antisymetrická* část bilineárního zobrazení $l \in L(X \times X; Y)$ jsou bilineární zobrazení $\text{sym } l$ a $\text{alt } l$, definovaná předpisy

$$\begin{aligned} \text{sym } l(x_1, x_2) &= \frac{1}{2}(l(x_1, x_2) + l(x_2, x_1)), \\ \text{alt } l(x_1, x_2) &= \frac{1}{2}(l(x_1, x_2) - l(x_2, x_1)). \end{aligned} \quad (4.1.2)$$

Pro každé bilineární zobrazení l platí

$$\text{sym } l + \text{alt } l = l.$$

Zobrazení l je symetrické, právě když $\text{sym } l = l$, což je ekvivalentní podmínce $\text{alt } l = 0$.

Zobrazení $l: X \rightarrow Y$ se nazývá *kvadratické*, existuje-li bilineární zobrazení $p: X \times X \rightarrow Y$ takové, že pro každé $x \in X$ platí

$$l(x) = p(x, x). \quad (4.1.3)$$

Vektorový prostor všech kvadratických zobrazení $l: X \rightarrow Y$ označujeme $L_2(X; Y)$.

Zobrazení p , která splňují vztah (4.1.3) je více; pokud platí $\text{sym } p_1 = \text{sym } p_2$, pak samozřejmě pro každé x $p_1(x, x) = p_2(x, x)$. Důležité je, že platí také opačné tvrzení:

Lemma 4.1. *Jestliže pro bilineární zobrazení $p_1, p_2: X \times X \rightarrow Y$ a každé $x \in X$ platí $p_1(x, x) = p_2(x, x)$, pak $\text{sym } p_1 = \text{sym } p_2$.*

Důkaz. Pro libovolné $x_1, x_2 \in X$ máme

$$\begin{aligned} \text{sym } p_1(x_1, x_2) &= \frac{1}{2}(p_1(x_1, x_2) + p_1(x_2, x_1)) = \\ &= \frac{1}{2}(p_1(x_1, x_2) + p_1(x_1, x_1) + p_1(x_2, x_1) + p_1(x_2, x_2) - p_1(x_1, x_1) - p_1(x_2, x_2)) = \\ &= \frac{1}{2}(p_1(x_1 + x_2, x_1 + x_2) - p_1(x_1, x_1) - p_1(x_2, x_2)) = \\ &= \frac{1}{2}(p_2(x_1 + x_2, x_1 + x_2) - p_2(x_1, x_1) - p_2(x_2, x_2)) = \\ &= \text{sym } p_2(x_1, x_2). \quad \square \end{aligned}$$

Z uvedeného vyplývá

Věta 4.2. *K libovolnému kvadratickému zobrazení $l \in L_2(X; Y)$ existuje právě jedno symetrické bilineární zobrazení $p \in X \times X \rightarrow Y$, splňující (4.1.3).*

Zobrazení l a p z uvedené věty se nazývají *asociovaná*.

Symetrické bilineární zobrazení, asociované s daným kvadratickým zobrazením l lze vypočítat podle vztahu

$$p(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(l(x_1 + x_2) - l(x_1)l(x_2)).$$

Na prostoru $L(X; L(X; Y))$ je dána norma pomocí předpisu (1.7.1). Pro zobrazení p a l z (4.1.3) můžeme položit

$$\|l\| = \|p\|.$$

Dostaneme tak normu na vektorovém prostoru $L_2(X; Y)$.

Uvedená definice patří k oněm poněkud abstraktním a napoprvé těžko pochopitelným. Pro začátek jistě postačí, když si z ní odneseme poznatek, že jsme na prostoru $L_2(X; Y)$ definovali normu. Beztak jsou podle věty 1.21 všechny ekvivalentní a my se budeme zajímat pouze o topologii touto normou indukovanou. To také znamená, že jsme normu na $L_2(X; Y)$ mohli definovat jinak—indukovaná topologie vyjde stejně.

4.2. Derivace a diferenciál druhého řádu. Než přistoupíme k definici derivace druhého řádu, uvědomme si, že v definici Fréchetovy derivace v kapitole 2 jsme ze všech vlastností prostoru $\mathbb{R}^n$ (a $\mathbb{R}^m$) využili pouze jeho strukturu normovaného prostoru. Téměř celý odstavec 2.1 tedy zůstane v platnosti, pokud v něm všude místo o $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$ budeme hovořit o libovolných normovaných prostorech. Výjimku tvoří jen věta 2.8, která pojednává o složkách zobrazení.

Mějme zobrazení $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, diferencovatelné v každém bodě nějakého okolí V bodu $x \in U$. Zobrazení df je tedy definováno v každém bodě množiny V a jeho oborem hodnot je normovaný prostor $L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$. Fréchetova derivace $d(df)(x)$ tohoto zobrazení v bodě x (pokud existuje) je tedy lineární zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do prostoru $L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$. Příslušné bilineární zobrazení z $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$ označujeme symbolem $d^2f(x)$ a nazýváme *druhou (Fréchetovou) derivací zobrazení f v bodě x* .

Zobrazení, které má v bodě x druhou derivaci, se nazývá *dvakrát diferencovatelné v bodě x* .

Pro derivace podle vektoru a parciální derivace zavádíme tato označení:

$$d_h(d_k f)(x) = d_{h,k} f(x), \quad \partial_i(\partial_j f)(x) = \partial_{i,j} f(x).$$

Lemma 4.3. *Nechť zobrazení $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ má v bodě $x \in U$ druhou derivaci. Pak pro libovolný vektor $h \in \mathbb{R}^n$ je derivace zobrazení $d_h f$ v bodě x rovna lineárnímu zobrazení $\bar{h} \mapsto d^2 f(x)(\bar{h}, h)$.*

D ů k a z. Uvažme zobrazení $ev_h: L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m) \rightarrow \mathbb{R}^m$, $ev_h(l) = l(h)$. Platí

$$d_h f(x) = df(x)(h) = ev_h(df(x)),$$

neboli

$$d_h f = ev_h \circ df.$$

Zobrazení ev_h je lineární, je tedy diferencovatelné v libovolném bodě $l \in L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ a platí $d ev_h(l) = ev_h$. Zobrazení $d_h f$ je tedy (jako kompozice diferencovatelných zobrazení) diferencovatelné v bodě x . Dostáváme

$$\begin{aligned} d(d_h f(x)(\bar{h})) &= d(ev_h \circ df)(x)(\bar{h}) = \\ &= (ev_h \circ d(df)(x))(\bar{h}) = & (d ev_h = ev_h \text{ a derivace kompozice}) \\ &= ev_h(d(df)(x)(\bar{h})) = (d(df)(x)(\bar{h}))(h) = \\ &= d^2 f(x)(\bar{h}, h) \end{aligned}$$

□

Podívejme se podrobněji na zobrazení ev , použité v minulém důkazu. Tak například pro $n = 2$ a $m = 1$ je každé lineární zobrazení $l \in L(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$ dáno maticí typu 1×2 (l_1, l_2) tak, že pro každé $h \in \mathbb{R}^2$ platí

$$l(h) = l_1(h_1) + l_2(h_2).$$

Pokud tedy například $h = (2, 3)$, pak zobrazení ev_h je určeno předpisem

$$ev_h(l) = 2l_1 + 3l_2.$$

Nyní tedy snad již není divu, že se jedná o lineární (a tedy spojitě a diferencovatelné) zobrazení.

Jiný důkaz lemmatu 4.3 pomocí definice derivace lze provést takto:

$$\begin{aligned} \lim_{\bar{h} \rightarrow 0} \frac{d_h f(x + \bar{h}) - d_h f(x) - d^2 f(x)(\bar{h}, h)}{\|\bar{h}\|} &= \lim_{\bar{h} \rightarrow 0} \frac{df(x + \bar{h})(h) - d_h f(x)(h) - d(df)(x)(\bar{h})(h)}{\|\bar{h}\|} = \\ &= \lim_{\bar{h} \rightarrow 0} \frac{(df(x + \bar{h}) - d_h f(x) - d(df)(x)(\bar{h}))(h)}{\|\bar{h}\|} = \\ &= \lim_{\bar{h} \rightarrow 0} \frac{ev_h(df(x + \bar{h}) - d_h f(x) - d(df)(x)(\bar{h}))}{\|\bar{h}\|} = \\ &= ev \left(\lim_{\bar{h} \rightarrow 0} \frac{df(x + \bar{h}) - d_h f(x) - d(df)(x)(\bar{h})}{\|\bar{h}\|} \right) = ev_h(0) = 0. \end{aligned}$$

Lemma 4.4. *Nechť zobrazení $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ má v bodě $x \in U$ druhou derivaci. Pak pro libovolné dva vektory $h, k \in \mathbb{R}^n$ platí*

$$d_{h,k} f(x) = d^2 f(x)(k, h). \quad (4.2.1)$$

D ů k a z. Plyne přímo z lemmatu 4.3 □

Věnujme se nyní chvíli pojmu spojitě diferencovatelnosti druhého řádu. Budeme postupovat podobně, jako v kapitole 2. Uvažme zobrazení $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ a předpokládejme, že v okolí V bodu $x \in U$ existují derivace df a $d_G(df)$. Druhá ze zmíněných derivací je zobrazením z V do prostoru $L(\mathbb{R}^n; L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m))$, na kterém je podle (1.7.1) definovaná norma. Můžeme tedy uvažovat spojitost zobrazení $d_G f$ v bodě x : Je-li zobrazení $d_G(df)$ v bodě x spojitě, pak se o zobrazení f říká, že je v bodě x *dvakrát spojitě diferencovatelné*. O spojitě diferencovatelnosti druhého řádu platí následující věty, které jsou (včetně důkazů!) velmi podobné větám 2.20 a 2.23.

Věta 4.5. Zobrazení dvakrát spojitě diferencovatelné v bodě x je v tomto bodě dvakrát diferencovatelné.

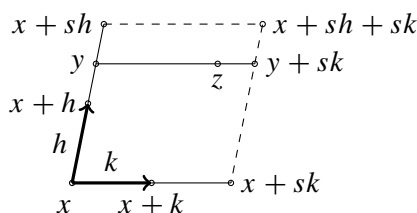
Věta 4.6. Necht' pro zobrazení $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ existují všechny funkce $\partial_j f_i: U \rightarrow \mathbb{R}$ a $\partial_{j,k} f_i: U \rightarrow \mathbb{R}$, kde $i \in \{1, \dots, m\}$, $j, k \in \{1, \dots, n\}$, a jsou na množině U spojitě. Pak zobrazení f je dvakrát spojitě diferencovatelné v každém bodě množiny U .

Jestliže zobrazení je dvakrát spojitě diferencovatelné v každém bodě množiny U , říkáme také, že je třídy C^2 .

Posledním úkolem tohoto odstavce je ukázat Schwartzovu větu o symetrii druhé derivace. Důkaz této věty je v obecném případě poměrně složitý, vybereme si proto pouze speciální (ale základní a nejobvyklejší) případ pro dvakrát spojitě diferencovatelná zobrazení.

Lemma 4.7. Mějme zobrazení $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ a vektory h, k takové, že zobrazení $d_{h,k} f$ je definováno na množině U a spojitě v bodě $x \in U$. Pak platí

$$d_{h,k} f(x) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(x + sh + sk) - f(x + sh) - f(x + sk) + f(x)}{s^2}.$$



D ů k a z. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $m = 1$, pokud budeme mít tvrzení dokázáno pro složky zobrazení f , tvrzení pro obecné m pak již vyplyne. Pro pevné $s \in \mathbb{R}$ definujme zobrazení g předpisem

$$g(x) = f(x + sk) - f(x).$$

Podle věty o střední hodnotě pro funkce (Věta 2.16) nyní platí

$$\begin{aligned} f(x + sh + sk) - f(x + sh) - f(x + sk) + f(x) &= g(x + sh) - g(x) = \\ &= d_{sh} g(y) = d_{sh} f(y + sk) - d_{sh} f(y) = d_{sk} d_{sh} f(z) = s^2 d_{h,k} f(z), \end{aligned}$$

kde bod y leží na úsečce $[x, x + sh]$ a bod z na úsečce $[y, y + sk]$. Určitě tedy

$$\|z - x\| \leq \|sh + sk\| = |s| \|h + k\|,$$

což znamená, že $\lim_{s \rightarrow 0} z = x$ a $\lim_{s \rightarrow 0} d_{h,k} f(z) = d_{h,k} f(x)$.¹⁾ Tím je lemma dokázáno. $\square$

Věta 4.8 (Schwarzova o symetrii druhé derivace). Necht' zobrazení $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ je dvakrát spojitě diferencovatelné v bodě $x \in U$. Pak bilineární zobrazení $d^2 f(x)$ je symetrické.

D ů k a z. Důkaz speciálního případu. Je-li zobrazení f v bodě x dvakrát spojitě diferencovatelné, pak můžeme použít předchozí lemma, z něhož plyne

$$d_{h,k} f(x) = d_{k,h} f(x).$$

Tvrzení tedy plyne z (4.2.1). $\square$

4.3. Multilineární a homogenní zobrazení. Pojmy bilineární a kvadratické zobrazení v tomto odstavci zobecníme pro případ vyššího než druhého řádu. Zobrazení $l: X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n \rightarrow Y$, kde $X_1, X_2, \dots, X_n, Y$ jsou vektorové prostory nazýváme *multilineární zobrazení*, je-li zobrazení

$$X_i \rightarrow Y, x \mapsto l(x_1, \dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

lineární pro každou volbu $x_1 \in X_1, \dots, x_{i-1} \in X_{i-1}, x_{i+1} \in X_{i+1}, \dots, x_n \in X_n$.

K libovolnému lineárnímu zobrazení $l \in L(X_1; L(X_2; \dots; L(X_n; Y) \dots))$ předpisem

¹⁾V těchto limitách jsme poněkud nepřesní; necháme na čtenáři, aby si v nich udělal jasno sám (je třeba místo z psát jinou funkci proměnné s).

$$\bar{l}(x_1, \dots, x_n) = l(x_1)(x_2) \dots (x_n)$$

kanonicky přiřadit multilineární zobrazení $\bar{l} \in L(X_1 \times \dots \times X_n; Y)$.

Stejně jako v případě bilineárního zobrazení definujeme *symetrickou* a *antisymetrickou* část multilineárního zobrazení

$$\begin{aligned} \text{sym } l(x_1, \dots, x_n) &= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma} l(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}), \\ \text{alt } l(x_1, \dots, x_n) &= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma} \text{sgn } \sigma \cdot l(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}), \end{aligned} \quad (4.3.1)$$

kde σ probíhá permutace množiny $\{1, \dots, n\}$ a $\text{sgn } \sigma$ je znaménko permutace. Zobrazení je *symetrické*.

Příklady. 1) Skalární součin $g: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ je symetrické multilineární zobrazením. Neboť, jak víme z algebry, $g(ax, y) = ag(x, y)$, $g(x + y, z) = g(x, z) + g(y, z)$ a $g(x, y) = g(y, x)$. $\text{alt } g(x, y) = \frac{1}{2}(g(x, y) - g(y, x)) = \frac{1}{2}(g(x, y) - g(x, y)) = 0$.

2) Vektorový součin na $\mathbb{R}^3$,

$$(u, v) \rightarrow u \times v$$

je antisymetrické multilineární zobrazení $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$.

3) Determinant n -tice vektorů z $\mathbb{R}^n$

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto \det(x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} x_{1,1} & \dots & x_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n,1} & \dots & x_{n,n} \end{vmatrix}$$

je antisymetrické multilineární zobrazení $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Zobrazení $l: X \rightarrow Y$ se nazývá *homogenní řádu n* jestliže existuje multilineární zobrazení $p: X^n \rightarrow Y$ takové, že pro každé $x \in X$ platí

$$l(x) = p(x, \dots, x). \quad (4.3.2)$$

Stejně jako v případě kvadratického zobrazení, ke každému homogennímu zobrazení l existuje jediné symetrické multilineární zobrazení p splňující (4.3.2). Tato zobrazení opět nazýváme *asociovaná*. Vektorový prostor homogenních zobrazení řádu n označíme $L_n(X; Y)$ a definujeme normu na jeho prvcích pomocí normy s ním asociovaným zobrazením, tedy

$$\|l\| = \|p\|.$$

4.4. Derivace vyššího řádu.

Uvažujme $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, pro $p \in \mathbb{N}$ definujeme p -tou Fréchetovu derivaci v bodě $x \in U$ obdobně jako jsme definovali druhou derivaci, tedy jako $d(d^{p-1}f)(x)$ pokud existuje. Jedná se o zobrazení $L(\mathbb{R}^n; L(\mathbb{R}^n \dots; L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m) \dots))$, což ovšem ztotožňujeme s $L(\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$. O takovém zobrazení říkáme, že je *p -krát diferencovatelné v bodě x* .

Podobně zavádíme derivace podle vektorů (parciální derivace) vyššího řádu, jako derivace podle vektorů (parciální derivace) o řád nižší. Tedy pro funkci f , bod $x \in U$ a k -tici vektorů $h_1, \dots, h_{k-1}, h_k \in \mathbb{R}^n$ máme

$$d_{h_1, \dots, h_{k-1}, h_k} f(x) = d_{h_k}(d_{h_1, \dots, h_{k-1}} f)(x), \quad \frac{\partial f}{\partial h_1, \dots, h_{k-1}, h_k}(x) = \frac{\partial}{\partial h_k} \left(\frac{\partial f}{\partial h_1, \dots, h_{k-1}} \right)(x),$$

a parciální derivaci pro k -tici indexů $i_1, \dots, i_{k-1}, i_k \in \{1, \dots, n\}$

$$\partial_{i_1, \dots, i_{k-1}, i_k} f(x) = \partial_{i_k} (\partial_{i_1, \dots, i_{k-1}} f)(x), \quad \frac{\partial f}{\partial x_{i_1}, \dots, x_{i_{k-1}}, x_{i_k}}(x) = \frac{\partial}{\partial x_{i_k}} \left(\frac{\partial f}{\partial x_{i_1}, \dots, x_{i_{k-1}}} \right)(x).$$

Vraťme se nyní k první derivaci funkce (pro jednoduchost $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$) má-li f derivaci v x pak má, jako lineární zobrazení matici v kanonických souřadnicích složenou z parciálních derivací. Tedy

$$df(x)(h) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right) \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)h_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)h_n. \quad (4.4.1)$$

Pokud si uvědomíme, že $h_i = \text{pr}_i(h)$ (pr_i je i -tá kartézská projekce), lze (4.4.1) přepsat:

$$df(x)(h) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \text{pr}_1(h) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \text{pr}_n(h). \quad (4.4.2)$$

Tradičně ovšem pr_1 značíme dx , případně dx_1 , podobně s pr_2 je označováno dy či dx_2 , tedy pro lineární operátory máme

$$df(x) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)dx_n. \quad (4.4.3)$$

Nyní pokud uvažujeme druhou derivaci, pak druhá derivace jako bilineární zobrazení lze popsat pomocí druhých parciálních derivací následovně:

$$d^2 f(x)(h, k) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) h_i k_j$$

To lze maticově popsat zápisem

$$d^2 f(x)(h, k) = (h_1, \dots, h_n) \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}.$$

Toto lze zobecnit pro derivaci p -tého řádu.

Věta 4.9 (o reprezentaci). *Nechť $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je p -krát diferencovatelná v bodě $x \in U$. Potom pro každé $h^1, \dots, h^p \in \mathbb{R}^n$ platí*

$$d^p f(x)(h^1, \dots, h^p) = \sum_{i_1=1}^n \dots \sum_{i_p=1}^n \frac{\partial^p f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_p}}(x) h_{i_1}^1 \dots h_{i_p}^p,$$

zde $h^k = (h_1^k, \dots, h_n^k)$.

Věta 4.10 (symetrie parciálních derivací). *Nechť zobrazení $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ je p -krát spojitě diferencovatelné v bodě $x \in U$. Pak multilineární zobrazení $d^p f(x)$ je symetrické.*

Důsledek 4.11. *Nechť zobrazení $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ je p -krát spojitě diferencovatelné v bodě*

$x \in U$ a $h_1, \dots, h_k \in \mathbb{R}^n$. Pak pro libovolnou permutaci σ množiny $\{1, \dots, k\}$ platí

$$d_{h_1, \dots, h_k} f(x) = d_{h_{\sigma(1)}, \dots, h_{\sigma(k)}} f(x),$$

speciálně

$$\frac{\partial f}{\partial x_{i_1}, \dots, x_{i_k}}(x) = \frac{\partial f}{\partial x_{i_{\sigma(1)}}, \dots, x_{i_{\sigma(k)}}}(x)$$

Důkaz. Plyne z definice derivace podle vektoru (parciální) vyššího řádu a faktu, že každou permutaci lze realizovat jako výměnu dvou sousedních indexů. Tento částečný výsledek byl dokázáno ve větě 4.8. $\square$

4.5. Diferenciál a Taylorův polynom. Nechť zobrazení $f: \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ má v bodě $x \in U$ derivaci řádu k , definujeme *diferenciál k -tého řádu funkce f v bodě a* a označíme jej $\mathbf{d}^k f(a)$ jako homogenní zobrazení z $L_p(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ asociované s $\mathbf{d}^k f(x)$. Tedy pro každé $h \in \mathbb{R}^n$ platí

$$\mathbf{d}^p f(x)(h) = \mathbf{d}^p f(x)(h, \dots, h). \quad (4.5.1)$$

Lemma 4.12. Nechť $l \in L_r(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$. Pak

- a) pro libovolné $p < r$ platí $\mathbf{d}^p l(0) = 0$,
- b) $\mathbf{d}^r l(0) = r! \cdot l$,
- c) pro libovolné $p > r$, $x \in \mathbb{R}^n$ platí $\mathbf{d}^p l(x) = 0$.

Lemma 4.13. Nechť pro zobrazení $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ a bod $x \in U$ platí

$$\begin{aligned} df(x) &= 0 \\ d^2 f(x) &= 0 \\ &\vdots \\ d^k f(x) &= 0. \end{aligned}$$

Pak

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(x+h) - f(x)\|}{\|h\|^k} = 0.$$

Důkaz. Pro $k = 1$ tvrzení plyne přímo z definice derivace. Předpokládejme nyní platnost tvrzení pro $k = r - 1$ a položme $g = df$. Máme $g(x) = 0$ a

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|g(x+h) - g(x)\|}{\|h\|^{r-1}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|g(x+h)\|}{\|h\|^{r-1}} = 0,$$

což znamená, že k libovolnému $\varepsilon > 0$ existuje otevřená koule $B \subset \mathbb{R}^n$ se středem v nule taková, že pro každé $h \in B$ platí

$$\|g(x+h)\| = \|g(x+h) - g(x)\| < \varepsilon \|h\|^{r-1}.$$

Pro libovolný vektor $h \in B$ nyní podle důsledku 2.19 věty o střední hodnotě platí

$$\|f(x+h) - f(x)\| \leq \sup_{y \in [x, x+h]} \|df(y)\| \cdot \|h\| = \sup_{y \in [x, x+h]} \|g(y)\| \cdot \|h\| < \varepsilon \|h\|^{r-1} \|h\| = \varepsilon \|h\|^r.$$

Tím je tvrzení dokázáno i pro $k = r$. $\square$

Věta 4.14 (o diferenciálu vyššího řádu). *Nechť zobrazení $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ má derivaci řádu k v bodě $x \in U$. Pak*

$$f(x+h) - f(x) = \mathbf{d}f(x)(h) + \frac{1}{2!}\mathbf{d}^2f(x)(h) + \cdots + \frac{1}{k!}\mathbf{d}^kf(x)(h) + \varepsilon(h)\|h\|^k,$$

kde

$$\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0. \quad (4.5.2)$$

D ů k a z. Položme

$$g(h) = f(x+h) - f(x) - \mathbf{d}f(x)(h) - \frac{1}{2!}\mathbf{d}^2f(x)(h) - \cdots - \frac{1}{k!}\mathbf{d}^kf(x)(h).$$

Podle lemmatu 4.12 máme pro $r \in \{1, \dots, k\}$ $\mathbf{d}^r g(0) = 0$ a podle lemmatu 4.13 pro

$$\varepsilon(h) = \frac{g(h)}{\|h\|^k}$$

platí (4.5.2). $\square$

Věta 4.15 (Taylova pro funkce více proměnných). *Nechť zobrazení $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ spojitě diferencovatelné řádu $k+1$ na U a úsečka $[x, x+h]$ leží v U . Potom existuje bod $\xi \in [x, x+h]$ takový, že*

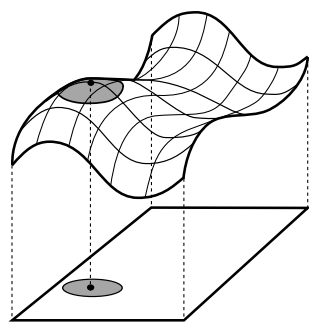
$$\begin{aligned} f(x+h) = f(x) + \mathbf{d}f(x)(h) + \frac{1}{2!}\mathbf{d}^2f(x)(h) + \cdots + \frac{1}{k!}\mathbf{d}^kf(x)(h) + \\ + \frac{1}{(k+1)!}\mathbf{d}^{k+1}f(\xi)(h) \end{aligned} \quad (4.5.3)$$

D ů k a z. Položme $g(h) = f(x) + \mathbf{d}f(x)(h) + \frac{1}{2!}\mathbf{d}^2f(x)(h) + \cdots + \frac{1}{k!}\mathbf{d}^kf(x)(h) + \frac{1}{(k+1)!}$. $\square$

5. Extrémy funkcí více proměnných

5.1. Extremální úlohy bez vazby. V této sekci se budeme věnovat problému. . .

Nechť $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je funkce, řekneme, že funkce f nabývá v bodě $x \in U$ *lokálního minima* jestliže existuje okolí V bodu x takové, že pro každé $y \in V$, $y \neq x$ platí



Lokální maximum.

$$f(x) \leq f(y). \quad (5.1.1)$$

Pokud lze ve výrazu (5.1.1) nahradit nerovnost $\leq$ ostrou nerovností $<$, říkáme, že f nabývá v x *ostrého lokálního minima*. Zcela obdobně definujeme také pojmy *lokální maximum funkce* a *ostré lokální maximum funkce*. *Lokální extrém* je potom souhrnný název pro lokální minimum a maximum.

Následující věta uvádí nutnou (nikoliv však postačující) podmínku lokálního extrému pro funkce, jistého stupně diferencovatelnosti.

Věta 5.1 (zobecněná Fermatova). *Nechť funkce $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ má v bodě $x \in U$ lokální minimum. Pokud pro nějaké $h \in \mathbb{R}^n$ existuje $d_h f(x)$ pak $d_h f(x) = 0$.*

D ů k a z. Uvažujme funkci $g_{x,h}$ z definice derivace podle vektoru (viz (2.2.2)). Ukážeme, že $(f \circ g_{x,h})'(0) = 0$, to spolu s větou 2.11 dává tvrzení věty. Je jasné, že $f \circ g_{x,h}$ má v $0 \in \mathbb{R}$ lokální minimum. Podle nutné podmínky existence extrému z prvního ročníku máme $(f \circ g_{x,h})'(0) = 0$. $\square$

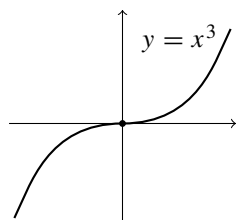
Důsledek 5.2. *Nechť funkce $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ má v bodě $x \in U$ lokální minimum.*

1. *Pokud $d_G f(x)$ existuje, je $d_G f(x) = 0$.*
2. *Pokud existují parciální derivace f v bodě x , potom*

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) = 0, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) = 0.$$

Samozřejmě, pokud existuje $df(x)$ v bodě lokálního extrému, je nulová.

Obdobně tvrzení lze dokázat také pro lokální maximum.



Věta 5.1 nedává postačující podmínku existence lokálního extrému. To ukazuje následující příklad.

Příklad. Funkce $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ má derivaci v bodě nula rovnu nule. Ovšem neexistuje okolí bodu nula takové, aby hodnota v nule byla menší než hodnoty funkce z toho okolí.

Věta 5.1 dává jen nutnou podmínku pro lokální extrém, to znamená, že pokud hledáme lokální extrémy, stačí se omezit na body, ve kterých je nutná podmínka splněna. Takové body nazýváme *stacionární body*.

Nechť l je kvadratické zobrazení, řekneme, že l je: *pozitivně definitní* jestliže pro libovolný $h \in \mathbb{R}^n$, $h \neq 0$ je $l(h) > 0$;

negativně definitní jestliže pro libovolný $h \in \mathbb{R}^n$, $h \neq 0$ je $l(h) < 0$;
indefinitní jestliže existují $h, k \in \mathbb{R}^n$ takové, že $l(h) > 0$ a $l(k) < 0$.

Pokud nahradíme ostrou nerovnost v definici pozitivní definitnosti neostrou, dostaneme *pozitivně semidefinitní*, obdobně *negativně semidefinitní*.

Lemma 5.3. *Pokud je kvadratické zobrazení $l: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ pozitivně definitní, potom existuje $K > 0$ takové, že pro každé $h \in \mathbb{R}^n$ je $l(h) \geq K \|h\|^2$.*

D ů k a z. Označme $S = \{h \in \mathbb{R}^n \mid \|h\| = 1\}$ jednotkovou sféru v $\mathbb{R}^n$. Množina S je kompaktní (evidentně je ohraničená a je uzavřená, jelikož je vzorem množiny $\{0\}$ při spojitým zobrazení $\|\cdot\|$). l tedy na S nabývá svého minima, označme jej K . Určitě $K \neq 0$, protože l je pozitivně definitní. Nyní pokud je $h \neq 0$, máme

$$l(h) = l\left(\|h\| \frac{h}{\|h\|}\right) = \|h\|^2 l\left(\frac{h}{\|h\|}\right) \geq K \|h\|^2.$$

Pro $h = 0$ je nerovnice $l(h) \geq K \|h\|^2$ splněna taktéž. $\square$

Následující věta dává postačující podmínku existence lokálního extrému.

Věta 5.4. *Nechť $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitě diferencovatelná na okolí bodu $x \in U$, který je stacionárním bodem f .*

1. *Je-li $\mathbf{d}^2 f(x)$ pozitivně definitní, pak má f v bodě lokální minimum.*
2. *Je-li $\mathbf{d}^2 f(x)$ negativně definitní, pak má f v bodě lokální maximum.*
3. *Je-li $\mathbf{d}^2 f(x)$ indefinitní, pak f v bodě x nemá lokální extrém.*

D ů k a z. 1. Jelikož je x stacionárním bodem, pak podle věty 4.14 o diferenciálu vyššího řádu pro $k = 2$, máme

$$f(x+h) - f(x) = \frac{1}{2} \mathbf{d}^2 f(x)(h) + \varepsilon(h) \|h\|^2,$$

kde $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$. Podle lemmatu 5.3 existuje $K > 0$ takové, že $\mathbf{d}^2 f(x)(h) \geq K \|h\|^2$. Tedy

$$f(x+h) - f(x) \geq \frac{1}{2} K \|h\|^2 + \varepsilon(h) \|h\|^2 = \left(\frac{1}{2} K + \varepsilon(h)\right) \|h\|^2$$

Limita závorky pro $h \rightarrow 0$ je rovna $\frac{1}{2} K$, proto existuje koule $B_0(r)$, že pro všechna $h \in B_0(r)$ je $\frac{1}{2} K + \varepsilon(h) > 0$. Pro taková $h \neq 0$ je

$$f(x+h) - f(x) \geq \frac{1}{2} K \|h\|^2 > 0.$$

Hledaným okolím, na němž je $f(x)$ nejmenší hodnotou, je tedy $B_x(r)$.

2. Převeďte se na předchozí případ uvažováním zobrazení $-f$.

3. Existují $h, k \in \mathbb{R}^n$ takové, že $\mathbf{d} f(x)(h) > 0$ a $\mathbf{d} f(x)(k) < 0$. Pro $t \neq 0$ máme

$$f(x+th) - f(x) = \frac{1}{2} \mathbf{d}^2 f(x)(th) + \varepsilon(th) \|th\|^2 = t^2 \left(\frac{1}{2} \mathbf{d}^2 f(x)(h) + \varepsilon(t) \|h\|^2\right).$$

Jelikož $\lim_{t \rightarrow 0} \varepsilon(t) \|h\|^2 = 0$, pro dostatečně malá t je $\frac{1}{2} \mathbf{d}^2 f(x)(h) + \varepsilon(t) \|h\|^2 > 0$. Proto libovolně blízko x existuje bod $x+th$ takový, že $f(x+th) - f(x) > 0$.

Na druhou stranu pokud v předchozí úvaze místo h použijeme k , dostáváme, že existují libovolně malá t , pro které $\frac{1}{2} \mathbf{d}^2 f(x)(k) + \varepsilon(t) \|k\|^2 < 0$ a následně $t^2 \left(\frac{1}{2} \mathbf{d}^2 f(x)(k) + \varepsilon(t) \|k\|^2\right) < 0$. Odtud $f(x+tk) - f(x) < 0$. $\square$

Zopakujme z algebry známé *Sylvestrovo pravidlo* pro kvadratickou formy l : *Nechť p je symetrická bilineární forma asociovaná s l a A je matice p v libovolné bázi. Uvažujme $\det A_1, \det A_2, \dots, \det A_n$ její hlavní minory.*

1. Pokud $\det A_1 > 0, \det A_2 > 0, \dots, \det A_n > 0$, potom je l pozitivně definitní.
2. Pokud $\det A_1 < 0, \det A_2 > 0, \det A_3 < 0, \det A_4 > 0 \dots$, potom je l negativně definitní.

Příklad. Nalezněte lokální extrémy funkce $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = x^3 - 3xy + 3y^2.$$

Nejprve nalezneme stacionární body f , tím že parciální derivace f položíme rovny nule:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 - 3y = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -3x + 6y = 0.$$

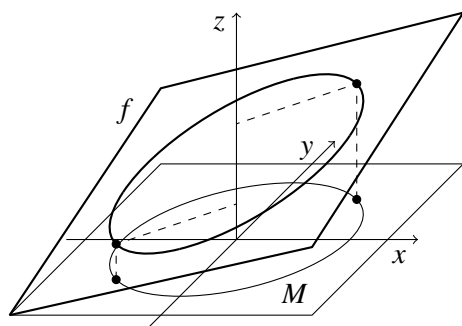
Stacionárními body — tedy body podezřelými z lokálního extrému jsou $(0, 0)$ a $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$. Abychom zjistili je-li extrém v některém z nich vyřešíme definitnost $\mathbf{d}^2 f(x, y)$ v těchto bodech. Matice příslušného kvadratického zobrazení se skládá z druhých parciálních derivací.

$$f''(x, y) = \begin{pmatrix} \partial_{xx}^2 f(x, y) & \partial_{xy}^2 f(x, y) \\ \partial_{xy}^2 f(x, y) & \partial_{yy}^2 f(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$$

Pro $(x, y) = (0, 0)$ jsou jeho hlavní minory: $\det A_1 = 0, \det A_2 = \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = -9$. Nyní, pro $(x, y) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ jsou jeho hlavní minory: $\det A_1 = 3, \det A_2 = 9$.

To znamená, že v bodě $(0, 0)$ nemá f lokální extrém ale v bodě $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ má lokální minimum.

Čtenáři jistě neuniklo, že věta 5.4 nic neříká v případech, že je $\mathbf{d}^2 f(x)$ semidefinitní. Tak tomu bylo již v případě funkce na $\mathbb{R}$ a k vyšetření extrému, kdy $f'(x) = 0, f''(x) = 0$, bylo nutné použít jiného postupu.



5.2. Vázané extrémy. Nechť $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, a $M \subset U$, řekneme, že f nabývá lokálního extrému v $x \in M$ na M jestliže x je extrémem (stejněho druhu) funkce $f|_M$.

Ačkoliv funkce $f(x, y) = x + y + 1$ lokální extrém nemá pokud ji vyšetřujeme na množině M dané rovnicí $x^2 + y^2 - 1 = 0$ extrému nabývat musí (jako spojitá funkce na kompaktní množině).

Jedním ze způsobů, jak zjednodušit problém hledání extrému na množině, je parametrizaci množiny M . Tím se může snížit i počet neznámých v rovnicích, které je třeba potom vyřešit.

Věta 5.5 (o parametrizaci M). Nechť $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je funkce a $M \subset U$ množina. Pokud pro nějaký bod $x \in M$ existuje homeomorfismus $\varphi: W \subset \mathbb{R}^r \rightarrow V \subset M$ takový že V je otevřená množina¹⁾ v M , $x \in V$ a $f \circ \varphi$ má lokální minimum v $t = \varphi^{-1}(x)$, potom f má v x lokální minimum na množině M .

D ů k a z. Tvrzení je zřejmé. $\square$

Obdobně lze tvrzení formulovat pro lokální maximum

Příklad. Najdeme lokální minimum funkce $f(x, y) = x + y + 1$ na množině M dané rovnicí $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$. Použijeme větu 5.5. Položme $\varphi(t) = (\cos t, \sin t)$ to jistě není injektivní, ale až budeme znát bod podezřelý z minima, můžeme φ definovat jen na otevřeném intervalu kolem tohoto bodu na němž u prostá bude.

Hledáme lokální minimum složení $(f \circ \varphi)(t) = \cos t + \sin t + 1$. Proto jej zderivujeme a položíme rovno nule:

¹⁾otevřená množina v M je zde myšleno jako otevřená množina v indukované topologii na M , tedy $V = M \cap O$ pro nějakou otevřenou množinu $O \subset \mathbb{R}^n$.

$$(f \circ \varphi)'(t) = -\sin t + \cos t = 0$$

Rovnice je splněna, je-li $t = \pi/4$ nebo $t = 5\pi/4$ ostatní řešení rovnice se po aplikaci φ nezobrazují již na nic nového. Body podezřelé z extrému jsou tedy $t = \pi/4, 5\pi/4$ potažmo $\varphi(\pi/4) = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ a $\varphi(5\pi/4) = (-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$. Druhou derivací (čeho?) zjistíme, že bod $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ je bodem lokálního maxima f na M a $(-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$ bodem lokálního minima.

Další metodou hledání lokálního extrému na množině jsou tzv. Lagrangeovy multiplikátory. Ta zahrnuje funkci, která popisuje množinu, do nové funkce a hledáme její extrémy. Tímto postupem se převádí problém hledání extrémů na množině na problém hledání lokálního extrému bez podmínek.

Množina $M \subset \mathbb{R}^n$ je zadána pomocí funkce $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ následovně

$$M = \{x \in U \mid g(x) = 0\}. \quad (5.2.1)$$

Jelikož má g oborem hodnot $\mathbb{R}^k$ je M zadána k rovnicemi

$$M = \{x \in U \mid g^1(x) = 0, \dots, g^k(x) = 0\}. \quad (5.2.2)$$

Rovnicím v (5.2.2) se někdy říká *vazbové podmínky*.

Pro $\lambda \in \mathbb{R}^k$ položíme

$$L_\lambda(x) = f(x) + \lambda_1 g^1(x) + \dots + \lambda_k g^k(x). \quad (5.2.3)$$

Funkci L_λ říkáme *Lagrangeova funkce*.

Věta 5.6 (o Lagrangeových multiplikátorech, postačující podmínka). *Nechť $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $M \subset U$ definovaná (5.2.1), uvažujeme Lagrangeovu funkci definovanou (5.2.3).*

Jestliže pro nějaké $\lambda \in \mathbb{R}^k$ má Lagrangeova funkce L_λ lokální minimum v bodě $x \in M$, potom má f v x lokální minimum na množině M .

Důkaz. Nechť x je lokálním minimem L_λ . Evidentně je x také lokálním minimem L_λ na množině M . Jelikož $L_\lambda|_M = f|_M + \sum_{i=1}^k \lambda_i \cdot g^i|_M$ a $g|_M = 0$, musí být x lokálním minimem $f|_M$. $\square$

Větu lze samozřejmě zformulovat i pro případ lokálního maxima.

Poznamenejme pro zajímavost, že na funkci f nejsou ve větě 5.6 kladeny žádné předpoklady.

Následující věta nám usnadní hledání lokálních extrémů. Je opět zformulována pro lokální minimum, ale platí samozřejmě i pro lokální maximum.

Věta 5.7 (o Lagrangeových multiplikátorech, nutná podmínka). *Nechť $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $M \subset U$ je definovaná (5.2.1), $x \in M$, f a g jsou spojitě diferencovatelné v x a $dg(x)$ je surjektivní. Jestliže x je lokálním minimem f na množině M potom existuje $\lambda \in \mathbb{R}^k$ takové, že funkce L_λ definovaná (5.2.3) má v x stacionární bod, tedy $dL_\lambda(x) = 0$.*

Podmínka $dg(x)$ je surjektivní v předchozí větě znamená, že matice partiálních derivací

$$g'(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g^1}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial g^1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g^k}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial g^k}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

má maximální hodnotu.

Kombinace vět 5.6 a 5.7 dává silný nástroj. Nejprve nalezneme stacionární body funkcí L_λ , pro všechny volby λ . Věta 5.7 nám zaručuje, že lokální extrémy jsou tímto pokryty. Vyšetříme tyto stacionární body Lagrangeovy funkce a věta 5.6 nám zaručuje, že lokální extrémy, které jsme našli, jsou lokálními extrémy f na množině M .

Podrobný postup při hledání lokálních extrémů pomocí Lagrangeových multiplikátorů bez velkých skoků v postupu ilustruje následující příklad.

Příklad. Vraťme se k příkladu funkce f s vazbovou podmínkou g , kde

$$f(x, y) = x + y + 1, \quad g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0.$$

Nejprve ověříme podmínku surjektivit derivace g . Máme

$$\partial_x g(x, y) = 2x, \quad \text{a} \quad \partial_y g(x, y) = 2y.$$

Tedy $dg(x, y)$ má matici

$$g'(x, y) = (2x, 2y).$$

Ta má nulovou hodnotu jen v počátku, ten ovšem bodem množiny M není. Proto všechny body M by mohly být bodem x z věty 5.7. Spojitá diferencovatelnost f i g je ve všech bodech M zřejmá. Lagrangeova funkce pro $\lambda \in \mathbb{R}$ má tvar

$$L_\lambda(x, y) = x + y + 1 + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$

Pokud je nějaké (x, y) stacionárním bodem některé L_λ (tedy pro nějaké λ) splňuje

$$\begin{aligned} \partial_x L_\lambda &= 1 + 2\lambda x = 0 \\ \partial_y L_\lambda &= 1 + 2\lambda y = 0 \end{aligned}$$

Tuto soustavu dvou rovnic o třech neznámých doplňuje podmínka, že $(x, y) \in M$ tedy $g(x, y) = 0$, konkrétně

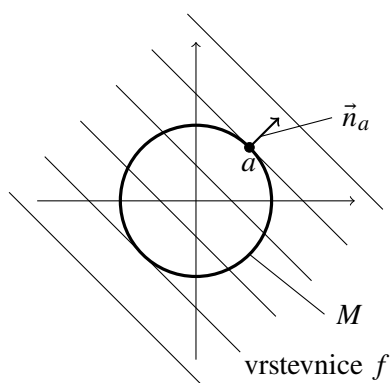
$$x^2 + y^2 - 1 = 0.$$

Vyřešením této soustavy dostáváme jednak $x = \sqrt{2}/2$, $y = \sqrt{2}/2$, $\lambda = -\sqrt{2}/2$ a jednak $x = -\sqrt{2}/2$, $y = -\sqrt{2}/2$, $\lambda = \sqrt{2}/2$. Nyní ověříme, že zda je $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ lokálním extrémem $L_{-\sqrt{2}/2}$ a zda je $(-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$ lokálním extrémem $L_{\sqrt{2}/2}$.

Kvadratická forma $dL_{-\sqrt{2}/2}(x, y)$ má matici

$$L''_\lambda(x, y) = \begin{pmatrix} 2\lambda & 0 \\ 0 & 2\lambda \end{pmatrix}, \quad L''_{-\sqrt{2}/2}(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2) = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}.$$

Ta je negativně definitní, to znamená, že $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ je lokální maximum $L_{-\sqrt{2}/2}$ a věta 5.7 říká, že $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ lokálním maximum f na M .



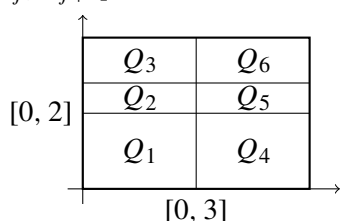
Princip metody Lagrangeových multiplikátorů spočívá v nalezení bodu a množiny M , ve kterém bude normálový vektor $\vec{n}_a$ k množině M v bodě a kolmý na vrstevnice funkce f . Na obrázku je znázorněna situace tato situace z příkladu.

6. Riemannův integrál na $\mathbb{R}^n$

6.1. Integrál na obdélníku v $\mathbb{R}^n$. V prvním paragrafu této kapitoly zavedeme pojem integrálu funkce na obdélníku v $\mathbb{R}^n$. Postupujeme analogicky k případu Riemannova integrálu na $\mathbb{R}$.

Uspořádanou k -tici $P = (t_0, t_1, \dots, t_k)$, pro kterou je $a = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_k = b$, nazýváme *dělení intervalu* $[a, b]$. Nechť $Q = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$ je *obdélník* v $\mathbb{R}^n$. Pokud pro každé $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ je P_i dělením intervalu $[a_i, b_i]$, potom uspořádaná n -tice $P = (P_1, \dots, P_n)$ je dělením obdélníku Q . Množinu všech dělení obdélníku Q označujeme $\mathcal{P}(Q)$.

Rozklad obdélníku Q definovaný dělením P je konečná množina obdélníků $\text{Rect } P = \{Q_i\}$ takových, že jejich sjednocení je Q , průnik vnitřků libovolné různé dvojice je prázdný a $\text{pr}_j(Q_i) = [P_j, P_{j+1}]$

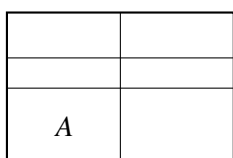


Dělení P obdélníku Q .

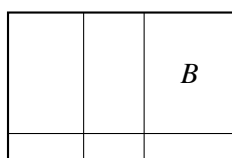
Příklad Mějme $Q = [0, 3] \times [0, 2]$. Uvažujeme dělení $P_1 = (0, \frac{3}{2}, 3)$ intervalu $[0, 3]$ a $P_2 = (0, 1, \frac{7}{5}, 2)$ intervalu $[0, 2]$. Dělení $P = (P_1, P_2) = ((0, \frac{3}{2}, 3), (0, 1, \frac{7}{5}, 2))$ je dělení obdélníku Q .

$$\{Q_i\} = \{[0, \frac{3}{2}] \times [0, 1], [0, \frac{3}{2}] \times [1, \frac{7}{5}], [0, \frac{3}{2}] \times [\frac{7}{5}, 2], [\frac{3}{2}, 2] \times [0, 1], [\frac{3}{2}, 2] \times [1, \frac{7}{5}], [\frac{3}{2}, 2] \times [\frac{7}{5}, 2]\}$$

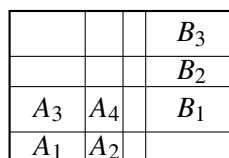
Dělení R obdélníku Q je *zjemněním dělení* P , pokud pro každé $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ je R_i zjemněním dělení P_i tedy pro každé $t_j = P_{i,j} = R_{i,l}$ pro nějaké l . Jinými slovy, R je zjemněním P v každé souřadnici. Dělení S obdélníku Q je *společným zjemněním dělení* P a Q , pokud S je zjemněním P i Q .



Dělení P obdélníku Q .



Dělení R



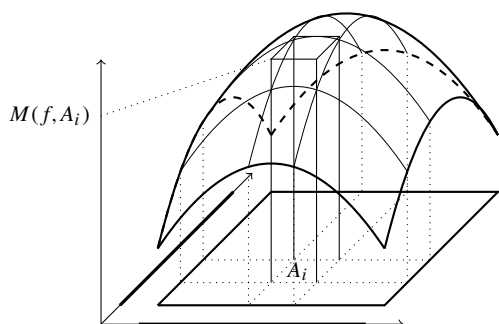
Společné zjemnění P a Q .

Evidentně, ke každým dvěma dělením existuje jejich společné zjemnění.

Je-li A obdélník dělení P a S je jeho zjemnění, potom existují obdélníky $A_1, \dots, A_l$ dělení S takové, že $A = A_1 \cup \dots \cup A_l$.

Nechť $f: Q \rightarrow \mathbb{R}$ je funkce na obdélníku Q . V celé této kapitole budeme předpokládat, že

je f omezená. Pro takovou funkci v následujících odstavcích definujeme integrál. V případě Riemannova integrálu v prvním ročníku jsme definovali horní a dolní součty příslušné určitému dělení intervalu. Pomocí délky těchto intervalů dělení vynásobené supremem a infimem. Proto nyní potřebujeme definovat n -rozměrný objem. Nechť $A = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$ je obdélník, definujeme n -rozměrný *objem obdélníku* A (nebo pouze *objem*), jako vol $A = (b_1 - a_1) \cdot \dots \cdot (b_n - a_n)$.



Pro funkci f a dělení P obdélníku Q definujeme *horní součet*

$$S(f, P) = \sum_{A_i} \sup_{A_i} f(x) \cdot \text{vol } A_i = \sum_{A_i} M(f, A_i) \text{vol } A_i \quad (6.1.1)$$

a *dolní součet*

$$s(f, P) = \sum_{A_i} \inf_{A_i} f(x) \cdot \text{vol } A_i = \sum_{A_i} m(f, A_i) \text{vol } A_i. \quad (6.1.2)$$

Poznamenejme, že supremum a infimum v rovnicích (6.1.1), (6.1.2) vždy existuje, jelikož je f ohraničená, a součet je konečný, neboť Q je ohraničený.

Označme

$$H(f) = \{S(f, P) \mid P \in \mathcal{P}(Q)\}, \quad (\text{množina horních součtů})$$

$$D(f) = \{s(f, P) \mid P \in \mathcal{P}(Q)\}. \quad (\text{množina dolních součtů})$$

Následující dvě lemmata jsou analogickými tvrzeními k těm z prvního ročníku.

Lemma 6.1. *Nechť R je zjemněním dělení P na Q , potom*

$$\begin{aligned} S(f, P) &\geq S(f, R), \\ s(f, P) &\leq s(f, R). \end{aligned}$$

Důkaz. Ke každému obdélníku A_i dělení P existuje $l(i) \in \mathbb{N}$ a obdélníky $A_{i,1}, \dots, A_{i,l(i)}$ příslušné k dělení R takové, že $A_i = A_{i,1} \cup \dots \cup A_{i,l(i)}$ (viz poznámka za definicí zjemnění). Navíc máme $Q = \bigcup_{i=1}^{k(P)} \bigcup_{j=1}^{l(i)} A_{i,j}$.

$$M(f, A_i) \geq M(f, A_{i,j})$$

$$\begin{aligned} S(f, P) &= \sum_{i=1}^{k(P)} M(f, A_i) \text{vol } A_i \\ &= \sum_{i=1}^{k(P)} M(f, A_i) \text{vol}(A_{i,1} \cup \dots \cup A_{i,l(i)}) \\ &= \sum_{i=1}^{k(P)} M(f, A_i) \sum_{j=1}^{l(i)} \text{vol } A_{i,j} \\ &\geq \sum_{i=1}^{k(P)} \sum_{j=1}^{l(i)} M(f, A_{i,j}) \text{vol } A_{i,j} \\ &= \sum_{i=1}^{k(R)} M(f, A_i) \text{vol } A_i = S(f, R). \end{aligned}$$

Výsledek pro dolní součty plyne stejným způsobem za pomoci nerovnosti $m(f, A_i) \leq m(f, A_{i,j})$. $\square$

Lemma 6.2. *Nechť P a R jsou dvě dělení Q , potom*

$$s(f, P) \leq S(f, R).$$

D ů k a z. Nechť T je společné zjemnění P a R potom podle lemmatu 6.1 máme

$$s(f, P) \leq s(f, T) \leq S(f, T) \leq S(f, R).$$

□

Předchozí tvrzení nás opravňuje k následujícímu.

Důsledek 6.3. Pro každou omezenou funkci $f: Q \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je

$$D(f) \leq H(f).$$

Množiny $D(f)$ a $H(f)$ jsou evidentně neprázdné a podle předchozího důsledku je $D(f)$ shora ohraničená libovolným horním součtem; stejně tak je $H(f)$ zdola ohraničená. Proto můžeme definovat *dolní integrál* f na Q jako

$$\int_Q f = \sup D(f) \quad (6.1.3)$$

a *horní integrál* f na Q jako

$$\overline{\int_Q f} = \inf H(f). \quad (6.1.4)$$

Nyní pokud pro omezenou $f: Q \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je $\int_Q f = \overline{\int_Q f}$, pak tuto hodnotu označíme $\int_Q f$ a říkáme ji *integrál funkce f na obdélníku Q* . Funkci f pak nazveme *integrovatelnou na Q* .

V případě konstantní funkce $f \equiv c$ jsou množiny $H(f)$ a $D(f)$ jednoprvkové obsahující číslo c vol Q , což je tím pádem její integrál. Přirozené, že? Ověřte!

Spojité funkce je také integrovatelná, jak uvidíme z pozdějšího tvrzení.

Věta 6.4. Nechť $f, g: Q \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ jsou omezené integrovatelné funkce na Q a $c \in \mathbb{R}$. Potom

$$\int_Q f + g = \int_Q f + \int_Q g.$$

2. cf je integrovatelná na Q a

$$\int_Q cf = c \int_Q f.$$

D ů k a z. !!!!

□

Věta 6.5. Nechť $A, B \subset \mathbb{R}^n$ jsou obdélníky s disjunktími vnitřky takové, že $A \cup B$ je obdélník. Dále $f: A \cup B \rightarrow \mathbb{R}$ je omezená integrovatelná funkce. Potom f je integrovatelná na A i B a

$$\int_{A \cup B} f = \int_A f + \int_B f. \quad (6.1.5)$$

D ů k a z. Z kritéria integrovatelnosti (věta 6.6) existuje dělení P obdélníku $A \cup B$ takové, že $S(f, P) - s(f, P) < \varepsilon$. Nechť R je zjemněním dělení P vzniklé přidáním bodů tak, aby

$R_i = (s_0, \dots, s_{k-1}, s_k = t_0, t_1, \dots, t_l)$. Potom S , kde $S_i = (s_0, \dots, s_{k-1}, s_k)$, a T , kde $T_i = (t_0, t_1, \dots, t_l)$, jsou děleními A a B . Platí

$$S(f, P) > S(f, R) = S(f, S) + S(f, T) \quad (R \text{ zjemnění } P, \text{ konstrukce } S \text{ a } T) \quad (6.1.6)$$

$$s(f, P) < s(f, R) = s(f, S) + s(f, T). \quad (R \text{ zjemnění } P, \text{ konstrukce } S \text{ a } T) \quad (6.1.7)$$

Což dává $S(f, S) - s(f, S) + S(f, T) - s(f, T) = S(f, R) - s(f, R) < \varepsilon$. Oba rozdíly jsou tedy menší než ε a věta 6.6 zaručuje integrovatelnost f na A a B . Rovnice (6.1.5) plyne z (6.1.6) a 6.1.7. $\square$

Věta 6.6 (kritérium integrovatelnosti). *Nechť $f: Q \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je omezená. Funkce f je integrovatelná, právě když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje dělení P obdélníku Q takové, že $S(f, P) - s(f, P) < \varepsilon$.*

Stejně jako v případě integrálu na $\mathbb{R}$ lze vyvodit, že každá spojitá funkce na obdélníku je integrovatelná. Pokud má funkce konečně či spočetně mnoho bodů nespojitosti je rovněž integrovatelná. Nyní se zaměříme na zjištění „jak velká“ může být množina bodů nespojitosti, aby funkce byla integrovatelná.

Množina $A \subset \mathbb{R}^n$ má (Lebesguovu) *míru nula* jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje spočetný systém $(Q_i)_i$ obdélníků v $\mathbb{R}^n$ takový, že $\bigcup_i Q_i \supset A$ a $\sum_i \text{vol } Q_i < \varepsilon$.

Konečná i spočetná množina má míru nula.

Úsečka v $\mathbb{R}^2$ má míru nula.

Obdélník v $\mathbb{R}^n$ s neprázdným vnitřkem nemá míru nula. Hranice obdélníku má míru nula.

Příklad. Kantorova množina $C \subset \mathbb{R}$ má míru nula. Skutečně, Kantorovu množinu lze psát ve tvaru $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} Q_n$, kde Q_n je sjednocení 2^n intervalů délky 3^{-n} . Objem vol $Q_n = (2/3)^n$, pro vhodné n může tento výraz být menší než libovolné předem dané ε .

Z definice množiny míry nula plyne následující očividné tvrzení.

Lemma 6.7. *Je-li $A \subset \mathbb{R}^n$ nulové míry, potom pro každou $B \subset A$ je B nulové míry.*

Lemma 6.8. *Pokud pro každé $i \in \mathbb{N}$ je $A_i \subset \mathbb{R}^n$ nulové míry, potom je nulové míry i $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$.*

Lemma 6.9. *Nechť $K \subset \mathbb{R}^n$ je kompaktní a Lebesgueovy míry nula, potom pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $N \in \mathbb{N}$ a obdélníky $Q_1, Q_2, \dots, Q_N \subset \mathbb{R}^n$, že $K \subset \bigcup_{i=1}^N Q_i$ a $\sum_{i=1}^N \text{vol } Q_i < \varepsilon$.*

Pro ohraničenou funkci $f: Q \rightarrow \mathbb{R}$ a bod x jejího definičního bodu x definujeme *oscilaci funkce f v bodě x*

$$\Omega_f(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{x \in B_\varepsilon(x) \cap Q} f(x) - \inf_{x \in B_\varepsilon(x) \cap Q} f(x).$$

Pro $A \subset Q$ definujeme *oscilaci funkce f na množině A* jako

$$\Omega_f(A) = \sup_{x \in A} f(x) - \inf_{x \in A} f(x).$$

Je-li P dělení obdélníku Q , potom označme

$$\Delta_{P,f} = S(f, P) - s(f, P) = \sum_{A \in \text{Rect } P} \Omega_f(A) \text{vol } A. \quad (6.1.8)$$

Lemma 6.10. *Funkce $f: Q \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá v bodě $x \in Q$, právě když je $\Omega_f(x) = 0$.*

Důkaz.

$\square$

Příklady. Funkce $\sin x$ má v každém bodě x oscilaci $\Omega_{\sin}(x) = 0$, jako každá spojitá funkce. Oscilace na intervalu $[0, \pi]$ je $\Omega_{\sin}([0, \pi]) = 1$ a $\Omega_{\sin}([0, 2\pi]) = 2$.

Funkce signum má v bodě 0 oscilaci $\Omega_{\text{sgn}}(0) = 2$. Na každém intervalu obsahujícím nulu, tedy například $[-1, 1]$ má $\Omega_{\text{sgn}}([-1, 1]) = 2$, na druhou stranu $\Omega_{\text{sgn}}([0, 1]) = 1$ a $\Omega_{\text{sgn}}([1, 2]) = 0$.

Lemma 6.11. *Nechť $f: Q \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je ohraničená. Potom pro každé $\varepsilon > 0$ je*

$$\begin{aligned} G_\varepsilon &= \{x \in Q \mid \Omega_f(x) < \varepsilon\} && \text{otevřená v } Q, \\ F_\varepsilon &= \{x \in Q \mid \Omega_f(x) \geq \varepsilon\} && \text{uzavřená v } Q. \end{aligned}$$

Lemma 6.12. *Nechť $f: Q \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je ohraničená, existuje $\varepsilon > 0$, že pro každé $x \in Q$ je $\Omega_f(x) < \varepsilon$. Potom existuje dělení P obdélníku Q takové, že*

$$\Delta_{P,f} = \sum_{A \in \text{Rect } P} \Omega_f(A) \text{ vol } A < \varepsilon \text{ vol } Q.$$

Věta 6.13 (Lebesguova). *Nechť $f: Q \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je ohraničená funkce. Označme $N \subset Q$ množinu bodů nespojitosti f . Funkce f je integrovatelná na Q , právě když N má míru nula.*

D ů k a z.

□

6.2. Integrál na množině v $\mathbb{R}^n$. Nechť $f: Q \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je omezená a $A \subset Q$ definujeme *integrál funkce f na množině A* jako

$$\int_A f = \int \chi_A \cdot f. \quad (6.2.1)$$

Je jasné, že definice $\int_A f$ nezávisí na volbě Q , pokud je $A \subset Q$

Následující věta nám dává nástroj pro počítání integrálu na obdélníku převodem na jednorozměrné integrály.

Věta 6.14 (Fubiniho). *Nechť A je obdélník v $\mathbb{R}^k$, B je obdélník v $\mathbb{R}^l$ a $f: A \times B \subset \mathbb{R}^{k+l} \rightarrow \mathbb{R}$ je omezená integrovatelná funkce. Předpokládejme, že pro každé t je $f|_{x=t}$ integrovatelná na B a pro každé $t \in A$ položme $u(t) = \int_B f|_{x=t}$. Potom u je integrovatelná na A a platí*

$$\int_{A \times B} f = \int_A u. \quad (6.2.2)$$

Rovnici (6.2.2) lze přepsat jako

$$\int_{A \times B} f = \int_A \left(\int_B f \right). \quad (6.2.3)$$

D ů k a z.

□

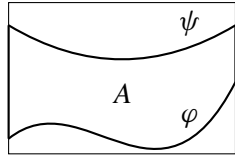
Označení. Pro integrál funkce f na obdélníku $Q = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ budeme v souladu s klasikou používat taktéž označení

$$\int_Q f = \int_Q f(x) \, dx_1 dx_2 \dots dx_n = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \cdots \int_{a_n}^{b_n} f(x) \, dx_1 dx_2 \dots dx_n.$$

Důsledek 6.15 (Fubiniho věta pro $\mathbb{R}^2$).

$$\int_{[a,b] \times [c,d]} f(x, y) \, dx dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx.$$

Důsledek věty 6.14 a definice integrálu na množině je následující tvrzení.



Množina $A \subset [a, b] \times [c, d]$ je ve tvaru

$$A = \{(x, y) \mid x \in [a, b], \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\},$$

kde φ, ψ jsou spojité funkce na intervalu $[a, b]$, $c \leq \varphi \leq \psi \leq d$

Důsledek 6.16. Necht' $A \subset [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$ je množina popsaná v předchozím odstavci, $f: Q \rightarrow \mathbb{R}$ omezená integrovatelná, potom

$$\int_A f = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy \right) dx \quad (6.2.4)$$

Řekneme, že ohraničená množina $A \subset \mathbb{R}^n$ je *Jordanovsky měřitelná* jestliže konstantní funkce $f = 1$ je na A integrovatelná ($\int_A 1$ existuje). Neboli $\int_Q \chi_A$ existuje pro $A \subset Q$, Q obdélník.

Pro obdélníky = vol Q .

Množina má Lebesguovu míru nula, právě když je Jordanova míra této množiny nula.

Tyto poznámky nás opravňují Jordanovskou míru množiny A označit stejným symbolem jako objem v případě obdélníků, tedy vol A .

Lemma 6.17. Ohraničená množina $A \subset \mathbb{R}^n$ je Jordanovsky měřitelná, právě když $\text{fr } A$ má míru nula.

D ů k a z. Plyne z faktu, že množina bodů nespojitosti χ_A je právě $\text{fr } A$ a samozřejmě věty 6.13. $\square$

Lemma 6.18. Jsou-li A, B Jordanovsky měřitelné množiny, potom jsou Jordanovsky měřitelné i množiny $A \cup B, A \cap B, A \setminus B$.

Věta 6.19. Necht' $A, B \subset \mathbb{R}^n$ jsou ohraničené Jordanovsky měřitelné množiny a f je integrovatelná na A i B . Potom

$$\int_{A \cup B} f = \int_A f + \int_B f - \int_{A \cap B} f.$$

D ů k a z. Necht' Q_A (respektive Q_B) je obdélník obsahující A (respektive B). Bez újmy na obecnosti, můžeme předpokládat, že $Q_A \cup Q_B$ je obdélník. Z definice integrálu na množině je $\int_A f = \int_{Q_A} f$ (stejně tak $\int_B f = \int_{Q_B} f$).

...
 $\square$

Lemma 6.20. Necht' $A \subset \mathbb{R}^n$ je ohraničená Jordanovsky měřitelná množina, potom pro každé $\varepsilon > 0$ existují množiny $M_\varepsilon, N_\varepsilon$ takové, že:

- 1) $M_\varepsilon, N_\varepsilon$ jsou sjednocením obdélníků;
- 2) $M_\varepsilon \subset A \subset N_\varepsilon$;
- 3) $\text{vol } N_\varepsilon - \text{vol } M_\varepsilon < \varepsilon$.

D ů k a z. jelikož je $A \subset Q$ Jordanovsky měřitelná, je χ_A integrovatelná na Q a tedy existuje dělení P obdélníku Q , že $M(\chi_A, P) - m(\chi_A, P) < \varepsilon$. Množina M_ε je pak sjednocení těch obdélníků z $\text{Rect } P$, které jsou podmnožinou A , a proto $\text{vol } M_\varepsilon = m(\chi_A, P)$. Obdobně N_ε je sjednocení těch obdélníků z $\text{Rect } P$, které mají neprázdný průnik s A , a tedy $\text{vol } N_\varepsilon = M(\chi_A, P)$. $\square$

Následující věta je hlavním výsledkem

Věta 6.21 (o substituci). *Nechť G, H jsou otevřené množiny v $\mathbb{R}^n$, $g: G \rightarrow H$ bijektivní spojitě diferencovatelné zobrazení. Potom pro každou integrovatelnou funkci $f: H \rightarrow \mathbb{R}$ platí*

$$\int_{g(A)} f = \int_A f \circ g \cdot |\det g'|. \quad (6.2.5)$$

Příklad Vypočítejte integrál

$$\int_A x^2 + y^2 dx dy,$$

kde A je mezikruží se středem v $(0, 0)$, poloměry $R_1 = 1$ a $R_2 = 2$.

Použijeme větu o substituci, množina A je obrazem obdélníka $[1, 2] \times [0, 2\pi]$ při zobrazení $g(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$. Věta 6.21 je formulována pro otevřené množiny G, H ...

7. Integrovaní diferenciálních forem

7.1. Formy na $\mathbb{R}^n$. V této kapitole si zopakujeme některé pojmy týkající se forem na vektorovém prostoru. Předpokládejme, že V je vektorový prostor nad polem reálných čísel. Symbolem $L(V)$ budeme označovat jeho *duální prostor*, tedy prostor všech *forem*, nebo-li všech lineárních zobrazení $l: V \rightarrow \mathbb{R}$.

Algebraická struktura na $L(V)$, sčítání a násobení skalárem.

Příklad. Uvažujme vektorový prostor $\mathbb{R}$ nad $\mathbb{R}$. Pak $L(V)$ tvoří všechna lineární zobrazení $l: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Jsou-li $l_1, l_2 \in L(\mathbb{R})$, pak $l_1 + l_2$ je definováno, jako zobrazení $l_1 + l_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ splňující

$$(l_1 + l_2)(x) = l_1(x) + l_2(x). \quad (\text{sčítání bod po bodu})$$

Speciálně je-li $l_1(x) = ax$ a $l_2(x) = bx$ (pro nějaká $a, b \in \mathbb{R}$), potom $l_1 + l_2$ je lineární zobrazení dané předpisem $(l_1 + l_2)(x) = (a + b)x$.

Obdobně s násobením skalárem $c \in \mathbb{R}$.

Pro $p \in \mathbb{N}$ definujeme *p-formu*, jako *p*-lineární zobrazení z V do $\mathbb{R}$. Prostor těchto *p*-forem značíme $L^p(V)$. A zavádíme na něm algebraické operace (bod po bodu), jako v případě $L(V)$. Nad

Pro $p = 2$ pojem 2-formy splývá s pojmem bilineárního zobrazení, viz 4.1.

I o *p*-formách jsme již mluvili, to bylo v kapitole 4.3.

Operace, kterou z jednodušších forem dostáváme složitější, se nazývá *tenzorový součin* a definujeme ji následovně. Nechť $u \in L^p(V)$, $v \in L^q(V)$ jsou formy, potom $p + q$ -forma, kterou značíme $u \otimes v \in L^{p+q}(V)$, je tenzorovým součinem u a v jestliže

$$(u \otimes v)(x_1, \dots, x_{p+q}) = u(x_1, \dots, x_p) \cdot v(x_{p+1}, \dots, x_{p+q}). \quad (7.1.1)$$

Příklad. Uvažujme $\mathbb{R}^2$ a na něm formy $\text{pr}_X: (x, y) \mapsto x$ a $\text{pr}_Y: (x, y) \mapsto y$. Potom je $\text{pr}_X \otimes \text{pr}_Y$ bilineární zobrazení, které $\text{pr}_X \otimes \text{pr}_Y((x, y), (u, v)) = \text{pr}_X(x, y) \cdot \text{pr}_Y(u, v) = xv$.

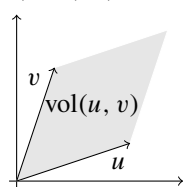
Záměnou vektorů (x, y) a (u, v) lze snadno ověřit, že zobrazení $\text{pr}_X \otimes \text{pr}_Y$ není symetrické.

Je symetrické zobrazení $\text{pr}_X \otimes \text{pr}_X$?

Věta 7.1 (o bázi v $L^p(\mathbb{R}^n)$). Uvažujme $L^p(\mathbb{R}^n)$ pro $n, p \in \mathbb{N}$, potom $\{\text{pr}_{i_1} \otimes \dots \otimes \text{pr}_{i_p}, \text{ kde } i_p \in \{1, \dots, n\}\}$, je báze $L^p(\mathbb{R}^n)$ a jeho dimenze je tedy n^p .

Příklad. 1) Uvažujme $\mathbb{R}^2$, podle předchozí věty je báze $L^1(\mathbb{R}^2)$ množina $\{\text{pr}_X, \text{pr}_Y\}$. Není divu, neboť je-li $l: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ lineární zobrazení, pak jej lze psát ve tvaru $l(x, y) = ax + by$. Proto $l = a \cdot \text{pr}_X + b \cdot \text{pr}_Y$ a uspořádaná dvojice (a, b) jsou složky l v bázi $\{\text{pr}_X, \text{pr}_Y\}$. Tato je asociovaná s bází $\{(1, 0), (0, 1)\}$ v $\mathbb{R}^2$, proto složky (a, b) lze obdržet jako $l(1, 0) = a \cdot 1 + b \cdot 0 = a$, $l(0, 1) = b$.

2) $L^2(\mathbb{R}^2)$



3) Orientovaná plocha rovnoběžníku⁰⁾ v $\mathbb{R}^2$ určeného vektory u, v je 2-forma na $\mathbb{R}^2$. Ověřte! Lze ji vypočítat pomocí determinantu

$$\text{vol}(u, v) = \det \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} = u_1 v_2 - v_1 u_2.$$

Proto $\text{vol}(u, v) = \text{pr}_1 \otimes \text{pr}_2(u, v) - \text{pr}_2 \otimes \text{pr}_1(u, v)$.

⁰⁾Jak orientovaná? Proč orientovaná?

Antisymetrické p -formy tvoří vektorový podprostor (značíme jej $\Lambda^p(V)$) prostoru $L^p(V)$.

Ověřte, že se skutečně jedná o podprostor.

Pro $u \in \Lambda^p(V)$, $v \in \Lambda^q(V)$ definujeme *vnější součin* u a v jako $p + q$ -formu

$$u \wedge v = \frac{(p+q)!}{p!q!} \text{alt}(u \otimes v). \quad (7.1.2)$$

Zopakujme, že $\text{alt } u$ je definováno v (4.3.1).

Příklad. Na $\Lambda^1(\mathbb{R}^2)$ uvažujme pr_1, pr_2 .

$$\text{pr}_1 \wedge \text{pr}_2 = \frac{2!}{1!1!} \text{alt}(\text{pr}_1 \otimes \text{pr}_2) = \frac{2}{1} \frac{1}{2} (\text{pr}_1 \otimes \text{pr}_2 - \text{pr}_2 \otimes \text{pr}_1)$$

tedy

$$\text{pr}_1 \wedge \text{pr}_2(u, v) = \text{pr}_1 \otimes \text{pr}_2(u, v) - \text{pr}_2 \otimes \text{pr}_1(u, v) = u_1 v_2 - u_2 v_1.$$

To znamená $\text{pr}_1 \wedge \text{pr}_2 = \det_{\mathbb{R}^2}$.

Obdobně lze odvodit na $\mathbb{R}^n$ je $\text{pr}_1 \wedge \dots \wedge \text{pr}_n = \det_{\mathbb{R}^n}$.

Věta 7.2 (o bázi v $\Lambda^p(\mathbb{R}^n)$). *Nechť $k \in \mathbb{N}$, $k \leq n$, potom $\{\text{pr}_{i_1} \wedge \dots \wedge \text{pr}_{i_k} \mid i_1 < \dots < i_k\}$ je báze $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$, to znamená $\dim \Lambda^k(\mathbb{R}^n) = \binom{n}{k}$.*

Pro $k > n$, je $\dim \Lambda^k(\mathbb{R}^n) = 0$, $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ obsahuje pouze nulovou formu. Na druhou stranu $L^p(\mathbb{R}^n)$ má dimenzi n^p .

Věta 7.3 (vlastnosti $\wedge$). *Nechť $u, u_1, u_2 \in \Lambda^p(V)$, $v \in \Lambda^q(V)$ a $w \in \Lambda^s(V)$, potom*

1. $(u_1 + u_2) \wedge v = u_1 \wedge v + u_2 \wedge v$.
2. $u \wedge v = (-1)^{pq} v \wedge u$.
3. $(u \wedge v) \wedge w = u \wedge (v \wedge w)$.

Pokud máme $\text{pr}_k \wedge \text{pr}_k \wedge w$ je tato forma nulová neboť záměnou prvních dvou forem dostáváme tentýž výraz ale ten musí mít podle předchozí věty opačné znaménko.

Jsou-li tedy ve výrazu $\text{pr}_{i_1} \wedge \dots \wedge \text{pr}_{i_k}$ dva indexy stejné, je tato forma nulová.

7.2. Diferenciální formy. Množina $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená a $p \in \mathbb{N}$, *diferenciální formou řádu p* (p -formou) na G rozumíme hladké zobrazení

$$\omega: G \rightarrow \Lambda^p(\mathbb{R}^n).$$

Jedná se tedy o pole p -forem na G . V každém bodu $x \in G$ je přiřazena $\omega(x)$ antisymetrická p -forma, navíc toto přiřazení je hladké.

V prostoru $\Lambda^p(\mathbb{R}^n)$ máme bázi $\{\text{pr}_{i_1} \wedge \dots \wedge \text{pr}_{i_k} \mid 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n\}$, v každém bodě má $\omega(x)$ složky v této bázi. Zadat p -formu tedy stačí pomocí funkcí daných těmito složkami. Tedy

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} f_{i_1, \dots, i_k} \text{pr}_{i_1} \wedge \dots \wedge \text{pr}_{i_k}. \quad (7.2.1)$$

K ověření hladkosti stačí ověřit hladkost těchto souřadnicových funkcí.

Tradičně se prvky báze pr_i značí symbolem dx_i . Proto

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} f_{i_1, \dots, i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}. \quad (7.2.2)$$

Příklad. 1. Každá hladká funkce na G je 0-forma.

2. Jsou-li f a g hladké funkce na $\mathbb{R}^2$, potom $\omega = f dx + g dy$ je hladká 1-forma na $\mathbb{R}^2$. Konkrétněji, například $\omega(x) = xy dx - x^2 y dy$ je 1-formou na $\mathbb{R}^2$. (Víme, že $f(x, y) = xy$ a $g(x, y) = x^2 y$ jsou hladké funkce.)

Množinu p -forem na G značíme $\Omega^p(G)$. Na této množině zavádíme operace $+$, skalární násobení hladkou funkcí a $\wedge$ bod po bodu.

$$\begin{aligned}(\omega + \eta)(x) &= \omega(x) + \eta(x), \\(f\omega)(x) &= f(x)\omega(x), \\(\omega \wedge \eta)(x) &= \omega(x) \wedge \eta(x).\end{aligned}$$

Mějme na $G \subset \mathbb{R}^n$ danou 0-formu, tedy hladkou funkci f . Definujeme *vnější derivaci* f , jako 1-formu, která je v každém bodě rovna derivaci f . Proto si dovolíme ji označit stejným symbolem, tedy df . Pomocí složek v bázi $\Lambda^1(\mathbb{R}^n)$ má df následující vyjádření

$$df(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k} dx_k. \quad (7.2.3)$$

Pro obecnou p -formu ω , která má vyjádření (7.2.2), je *vnější derivací* ω $k+1$ -forma $d\omega$, pro kterou

$$d\omega(x) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} df_{i_1, \dots, i_k} \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \quad (7.2.4)$$

což s využitím (7.2.3) dává

$$d\omega(x) = \sum_{k=1}^n \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \frac{\partial f_{i_1, \dots, i_k}}{\partial x^k} dx_k \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}. \quad (7.2.5)$$

Příklad. 1. Hladká funkce $f(x, y) = xy^2$ na $\mathbb{R}^2$. Vnější derivace této 0-formy je dle (7.2.3):

$$df(x, y) = y^2 dx + 2xy dy.$$

2. Mějme 1-formu $\omega(x, y) = xy dx - x^2 y dy$, její vnější derivací bude 2-forma $d\omega$. Podle (7.2.5) máme

$$d\omega(x, y) = y dx \wedge dx + x dy \wedge dx - (2xy dx \wedge dy + x^2 dy \wedge dy).$$

Podle poznámky za větou 7.3 je $dx \wedge dx = 0$ a $dy \wedge dy = 0$. Pokračujeme

$$d\omega(x, y) = x dy \wedge dx - 2xy dx \wedge dy = -(x + 2xy) dx \wedge dy.$$

3. 2-forma

Věta 7.4 (vlastnosti d). Necht' $\omega_1 \in \Omega^p(G)$ a $\omega_2 \in \Omega^q(G)$, potom

$$1. d(\omega_1 + \omega_2) = d\omega_1 + d\omega_2;$$

$$2. d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^p \omega_1 \wedge d\omega_2$$

$$3. d(d\omega_1) = 0.$$

7.3. Integrál z diferenciální formy na krychli. Označme symbolem $I^n \subset \mathbb{R}^n$ (n -násobný) kartézský součin intervalu $[0, 1]$ a řekněme mu *jednotková krychle* v $\mathbb{R}^n$. Nechť $\omega = f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n$ je diferenciální n -forma na otevřené množině G obsahující krychli I^n , definujeme *integrál z diferenciální formy ω na I^n* jako

$$\int_{I^n} \omega = \int_0^1 \cdots \int_0^1 f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n.$$

Diferencovatelné zobrazení $c: I^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ (taktéž obraz $\text{Im } c = c(I^m)$) nazýváme (m -rozměrná) *krychle* v $\mathbb{R}^n$.

Je-li $\varphi: G \subset \mathbb{R}^m \rightarrow H \subset \mathbb{R}^n$ diferencovatelné zobrazení mezi otevřenými množinami, definujeme *pull back diferenciální formy* $\omega \in \Omega(H)$ při zobrazení φ jako $\varphi^* \omega \in \Omega(G)$ pro kterou

$$(\varphi^* \omega)(x) = \omega(f(x)) \circ d\varphi(x).$$

Příklad. 1. Pro zobrazení $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $f = (f_1, \dots, f_m)$ a diferenciální formu $\omega = dy_i$ platí

$$f^* \omega = f^* dy_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j} dx_j,$$

kde $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ a $(y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$. Je-li $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definováno předpisem $(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) = (\cos u \cos v, \cos u \sin v, \sin u)$, potom je

$$f^* dy = \frac{\partial}{\partial u}(\cos u \sin v) du + \frac{\partial}{\partial v}(\cos u \sin v) dv = -\sin u \sin v du + \cos u \cos v dv.$$

2. Uvažujme zobrazení $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow (\cos t, \sin t)$ a diferenciální formu $\omega \in \Omega^1(\mathbb{R}^2)$ zadanou

$$\omega(x, y) = x dx - y dy.$$

Platí $\varphi'(t) = (-\sin t, \cos t)$, tedy $\varphi^* dx = -\sin t dt$ a $\varphi^* dy = \cos t dt$. Proto

$$\varphi^* \omega(t) = \cos t (-\sin t) dt - \sin t \cos t dt = -2 \sin t \cos t dt.$$

Definujeme *integrál z diferenciální k -formy přes m -rozměrnou krychli c* jako integrál z pull backu ω při zobrazení c . Tedy

$$\int_c \omega = \int_{I^m} c^* \omega$$

Příklad. Vypočteme integrál

$$\int_S z dx dy + x dy dz + y dz dx,$$

kde S je severní polovina ($z \geq 0$) jednotkové sféry.

...

Uzavřená forma!!!

Exaktní forma!!!

7.4. Stokesova věta. *Diferencovatelný řetězec* je lineární kombinace reálných čísel $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ a krychlí $c_1, \dots, c_p$. Tedy $c = \lambda_1 c_1 + \dots + \lambda_p c_p$. Jako lineární kombinaci definujeme integrál přes diferencovatelný řetězec

$$\int_c \omega = \lambda_1 \int_{c_1} \omega + \dots + \lambda_p \int_{c_p} \omega.$$

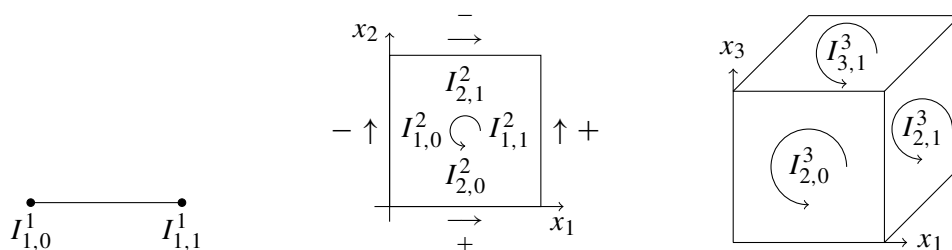
Pro jednotkovou krychli I^k definujeme její *stěny* jako $k-1$ rozměrné krychle, pro každou volbu $i \in \{1, \dots, k\}$ a $\alpha \in \{0, 1\}$ danou

$$I_{i,\alpha}^k: [0, 1]^{k-1} \rightarrow \mathbb{R}^k, (x_1, \dots, x_{k-1}) \mapsto (x_1, \dots, x_{i-1}, \alpha, x_{i+1}, \dots, x_{k-1})$$

Je-li zobrazení $c(I^k)$ krychle, potom její stěna $c_{i,j}$ je $c(I_{i,\alpha}^k)$.

Nechť c je k -rozměrná krychle definujeme její (orientovanou) *hranici* ∂c , jako diferencovatelný řetězec krychlí

$$\partial c = \sum_{i=1}^k \sum \alpha = 0, 1(-1)^{\alpha+i} c_{i,j} \quad (7.4.1)$$



Příklad. 1. Interval $[0, 1]$ je jednotkovou krychlí I^1 . Body $I_{1,0}^1 = \{0\}$ a $I_{1,1}^1 = \{1\}$ jsou její stěny.

2. Čtverec $I^2 = [0, 1]^2$ má následující stěny $I_{1,0}^2 = \{0\} \times [0, 1]$, $I_{1,1}^2 = \{1\} \times [0, 1]$, $I_{2,0}^2 = [0, 1] \times \{0\}$, $I_{2,1}^2 = [0, 1] \times \{1\}$.

$$\partial I^2 = -I_{1,0}^2 + I_{1,1}^2 + I_{2,0}^2 - I_{2,1}^2.$$

3. Krychle I^3 .

$$\partial I^3 = -I_{1,0}^3 + I_{1,1}^3 + I_{2,0}^3 - I_{2,1}^3 - I_{3,0}^3 + I_{3,1}^3.$$

Řekneme, že diferencovatelný řetězec je *uzavřený*, pokud její hranice je nulový řetězec (nulová krychle).

Snadno ověříte, že kružnice je příkladem jednorozměrného řetězce (jednorozměrné krychle), který je uzavřený.

Taktéž lze odvodit, že pro libovolný řetězec c je $\partial(\partial c) = 0$, tedy $\partial^2 = 0$. Podobnost operátoru ∂ na řetězcích s vnější derivací d diferenciálních forem není náhodná, jak uvidíme později.

Řekneme, že diferencovatelný řetězec c je *exaktní*, pokud je hranicí nějakého řetězce. Tedy pokud existuje h takové, že $\partial h = c$.

Lemma 7.5. *Nechť $c \subset G$ je k -rozměrná krychle a ω je k -forma na otevřené množině G . Potom*

$$\int_{\partial c} \omega = \int_{\partial[0,1]^k} c^* \omega \quad (7.4.2)$$

Nyní se dostáváme k důležitému výsledku diferenciální geometrie, který dává do souvislosti integrování forem na řetězcích a na jejich hranicích.

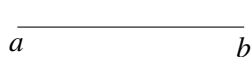
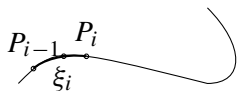
Věta 7.6 (Stokesova). *Nechť ω je $k - 1$ forma na otevřené množině G v $\mathbb{R}^n$ a c je k -rozměrný řetězec v G . Potom*

$$\int_{\partial c} \omega = \int_c d\omega. \quad (7.4.3)$$

7.5. Integrovaní diferenciálních forem. V tomto odstavci se podíváme integrování diferenciálních forem v $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$. Postupujeme od jednodušších případů ke složitějším a ilustrujeme na nich obecné principy z předchozích odstavců.

Křivkový integrál v $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$. Křivka C v $\mathbb{R}^2$ (případně v $\mathbb{R}^3$) je spojitý obraz uzavřeného intervalu $[a, b]$, tedy existuje spojitě zobrazení $\Gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ (případně v $\mathbb{R}^3$) — *parametrizace* křivky $C = \Gamma([a, b])$. Křivka je *jednoduchá*, jestliže existuje její bijektivní parametrizace. Křivka C je uzavřená, jestliže pro její parametrizaci platí $\Gamma(a) = \Gamma(b)$ a Γ je na (a, b) injektivní. Křivka je (po částech) *hladká*, jestliže je (po částech) hladká její parametrizace.

Pokud chceme definovat nějakou veličinu křivky C odvozenou od hodnot f v jejích bodech integrací (například hmotnost křivky integrováním délkové hustoty). Pak na křivce a tím pádem i na definičním oboru uvažujeme dělení pomocí integrálního součtu



$$s(P, f) = \sum_{i=1}^k f(\xi_i) \|P_i - P_{i-1}\|_2,$$

kde P_i jsou body dělení C a ξ_i leží na části křivky mezi P_{i-1} a P_i .

Limitním přechodem získáváme *křivkový integrál 1. druhu*

$$\int_C f(x, y) dC, \quad (7.5.1)$$

kde dC je diferenciální 1-forma, které říkáme *element délky* křivky C , a platí

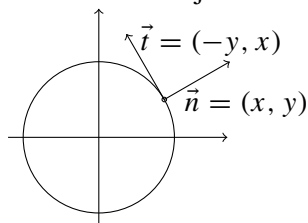
$$dC = c_1 dx + c_2 dy. \quad (7.5.2)$$

V předchozím vzorci je (c_1, c_2) tečný jednotkový vektor ke křivce C v souhlasném směru s orientací C . Obdobně, je-li C v $\mathbb{R}^3$, potom její element délky bude

$$dC = c_1 dx + c_2 dy + c_3 dz \quad (7.5.3)$$

Délka křivky C je rovna integrálu elementu délky přes C : $\int_C dC$.

Příklad. Uvažujme kružnici C středem v počátku a poloměrem jedna orientovanou ve směru hodinových ručiček. Nechť (x, y) je prvkem C pak vektor $\vec{n} = (x, y)$ je normálovým vektorem k C . Je jednotkový, neboť $x^2 + y^2 = 1$. Potom $\vec{t} = (-y, x)$ je tečný jednotkový vektor, navíc je souhlasně orientován.



Délkový element dC jednotkové kružnice je tedy

$$dC = -y dx + x dy.$$

Pokud tedy chceme spočítat délku jednotkové kružnice integrujeme objemový element:

$$L = \int_C -y dC = \int_C -y dx + x dy.$$

Zvolíme parametrizaci $\Gamma: [0, 2\pi] \rightarrow C$, $\varphi(t) = (\cos t, \sin t)$, máme

$$\begin{aligned} \int_C -y dx + x dy &= \int_{[0, 2\pi]} \varphi^*(-y dx + x dy) = \int_0^{2\pi} -\sin t d(\cos t) + \cos t d(\sin t) dt = \\ &= \int_0^{2\pi} \sin^2 t + \cos^2 t dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi. \end{aligned}$$

Věta 7.7 (Greenova). *Nechť $C \subset G$ je po částech hladká, kladně orientovaná, uzavřená křivka, ležící v otevřené množině G . Dále D je jednoduše souvislá oblast ohraničená C , funkce $P, Q: G \rightarrow \mathbb{R}$ mají spojitě parciální derivace. Potom*

$$\int_C P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_D \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} dx dy.$$

Důkaz. Důsledek věty 7.6. $\square$

Důsledek 7.8.

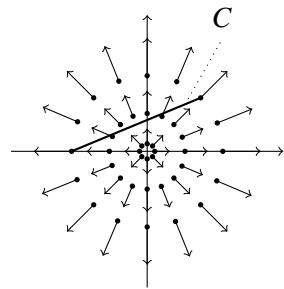
$$\text{vol } D = \frac{1}{2} \int_C x dy - y dx$$

Důsledek 7.9 (nezávislost integrálu na integrační cestě). *Nechť $P dx + Q dy$ je diferenciálem nějaké funkce $F: G \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $A, B \in G$, potom integrál*

$$\int_C P dx + Q dy = F(B) - F(A)$$

je stejný pro každou křivku C v otevřené oblasti G s počátkem v A a koncem v B .

Uvažujme vektorové pole na nějaké otevřené množině G v $\mathbb{R}^2$ (případně $\mathbb{R}^3$) tedy zobrazení $f: G \rightarrow \mathbb{R}^2$. Toto pole může reprezentovat magnetické, gravitační či jiné pole síly. V množině G leží křivka C s orientací z bodu A do bodu B . Integrál ze skalárního součinu přes křivku C



$$f(x, y) = (x, y)$$

$$\int_C f(\vec{x}, y) \cdot \vec{\tau},$$

kde τ je tečný vektor ke křivce C , nazýváme *křivkový integrál 2. druhu*. Vyjadřuje nám kolik práce je třeba vynaložit, či získáme, přesuneme-li se po křivce C . Pokud má f složky (f_1, f_2) a tečný vektor má složky (τ_1, τ_2) , pak tento integrál má tvar

$$\int_C f_1(x, y) \tau_1(x, y) dx + f_2(x, y) \tau_2(x, y) dy.$$

Toto je ovšem integrál 1-formy, o kterém jsme se již zmínili v odstavci 7.5.

Příklad Uvažujme vektorové pole $f(x, y) = (x, y)$ na $\mathbb{R}^2$ a úsečku C z bodu $A = (-1, 0)$ do bodu $B = (3, 3)$. Vypočítejme

$$\int_C f(x, y) \cdot d\tau.$$

Nejprve $B - A = (4, 3)$, velikost $\|B - A\| = 5$. Jednotkový tečný vektor v každém bodě C je tedy $\frac{1}{5}(4, 3)$.

$$\int_C f(x, y) \cdot d\tau = \int_C \frac{4}{5}x dx + \frac{3}{5}y dy$$

Dopočítáme

Plošný integrál v $\mathbb{R}^3$

Plošný element

Věta 7.10 (Gauss-Ostrogradski). *Nechť S je uzavřená plocha ohraničující krychli D orientovaná normálou ven, nechť f je hladké vektorové pole na $\mathbb{R}^3$. Potom*

$$\begin{aligned} \int_S f_1(x, y, z) dy dz + f_2(x, y, z) dz dx + f_3(x, y, z) dx dy = \\ = \int_D \frac{\partial f_1(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial f_2(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial f_3(x, y, z)}{\partial z} dx dy dz. \end{aligned}$$

D ů k a z. Plyne z věty 7.6. $\square$

Interpretace předchozí věty je následující: Tok vektorového pole f přes uzavřenou plochu S (směrem ven) je roven množství vznikajícího vektorového pole (divergence f) uvnitř krychle ohraničené S . Zapisujeme

$$\int_S \vec{f} \cdot dS = \int_D \operatorname{div} f,$$

kde symbolem dS označujeme pole normálového vektoru.

Speciální Stokesova věta.

Věta 7.11. *Nechť C je křivka ohraničující plochu $S \subset G$, G otevřená v $\mathbb{R}^3$, nechť f je hladké vektorové pole na G . Potom*

$$\int_S \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z} \right) dy dz + \left(\frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x} \right) dz dx + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) dx dy = \int_C f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz$$

D ů k a z. Plyne z věty 7.6. $\square$

$$\int_S \operatorname{rot} f dS = \int_C \vec{f} d\tau.$$

Příklady.

Příklady.

A zase

Příklady.

8. Obyčejné diferenciální rovnice

8.1. Obecné. *Diferenciální rovnice* jsou rovnice, kde neznámou je funkce y a vyskytuje se v ní derivace neznámé funkce. Tedy například

$$F(y'(x), y(x), x) = 0. \quad (8.1.1)$$

Příklad. Do nádoby, ve které je roztok o koncentraci K , přitéká čistá voda rychlostí v , stejnou rychlostí odtéká i roztok (v nádobě se roztok dokonale ředí přitékající vodou).

Pod pojmem *řešení diferenciální rovnice (8.1.1) na intervalu I* (může být i neohraničený) rozumíme libovolnou diferencovatelnou funkci $y: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, pro kterou je splněna rovnice (8.1.1).

Uvažujeme jednoduchou diferenciální rovnici na $\mathbb{R}$

$$y'(x) = x. \quad (8.1.2)$$

Řešení této rovnice dostaneme integrací, tedy hledáme primitivní funkci k identitě. Jak víme na každém intervalu má taková primitivní funkce tvar $y(x) = x^2/2 + c$, kde c je libovolné reálné číslo. Vidíme, že řešení rovnice (8.1.2) není jednoznačné. Toto je pro řešení obyčejné diferenciální rovnice typické, proto se v nich vyskytuje konstanta. Její volbou získáme funkci vyhovující (8.1.1).

Tato situace nám umožňuje předepsat hodnotu neznámé funkce v jednom bodě definičního oboru. Tedy pro x_0 požadujeme, aby hledaná funkce měla hodnotu $y_0 \in \mathbb{R}$. Máme soustavu dvou rovnic

$$F(y'(x), y(x), x) = 0, \quad (8.1.3)$$

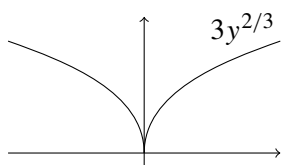
$$y(x_0) = y_0. \quad (8.1.4)$$

Takovému problému říkáme *Cauchyho počáteční problém* (případně *Cauchyho okrajová úloha*). Samozřejmě, že pod pojmem řešení Cauchyho úlohy se rozumí diferencovatelná funkce splňující rovnice (8.1.3) a (8.1.4).

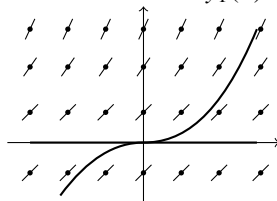
Následující věta odpovídá na základní otázku — řešitelnost diferenciálních rovnic.

Věta 8.1 (Peano). *Nechť $G, H \subset \mathbb{R}$ jsou otevřené množiny. Jestliže $F: G \times H \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá funkce. Potom pro každé $x_0 \in G$ a $y_0 \in H$ existuje řešení počáteční úlohy (8.1.3, 8.1.4) na nějakém intervalu v G .*

Jistě hned čtenáře napadne, zda takové řešení existuje jen jedno. Negativní odpověď dává:



Příklad. Uvažujme rovnici $y' = 3y^{2/3}$ na $\mathbb{R}$. Pro počáteční podmínku $y(0) = 0$ dostaneme dvě řešení $y_1(x) = 0$ a $y_2(x) = x^3$. Ověřte!



Důkaz existenční věty je založen na následující myšlence takzvaných Pikardových aproximací. Uvažujme Cauchyho počáteční úlohu (8.1.3, 8.1.4). Řešení této úlohy lze obdržet jako pevný bod jistého operátoru. Přesněji $\bar{y}(x)$ bude řešením Cauchyho problému pokud pro operátor φ je $\varphi(\bar{y}) = \bar{y}$ ($\bar{y}$ je pevným bodem φ), kde φ je definováno

$$\varphi(y) = y_0 + \int_{x_0}^x F(y(t), t) dt. \quad (8.1.5)$$

D ů k a z.

□

Řešení potom hledáme, jako limitu posloupnosti funkcí $y_0, y_1, y_2, \dots$, kde y_0 je konstantní funkce rovná y_0 (počáteční podmínce) a každá následující je obrazem při operátoru φ .

Příklad.

$$y'(x) = y, \quad y(0) = 1.$$

Zmíněný operátor φ je pro tuto rovnici

$$\varphi(y)(x) = 1 + \int_0^x y(t) dt$$

Proto $y_0 = 1$,

$$\begin{aligned} y_1(x) &= 1 + \int_0^x 1 dt = 1 + x. \\ y_2(x) &= 1 + \int_0^x 1 + t dt = 1 + x + \frac{1}{2}x^2. \\ y_3(x) &= 1 + \int_0^x 1 + t + \frac{1}{2}t^2 dt = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3. \end{aligned}$$

Řešení počáteční úlohy je limita částečných součtů

$$y_n(x) = 1 + \int_0^x 1 + t + \frac{1}{2}t^2 dt = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \dots + \frac{1}{n!}x^n,$$

tedy funkce $y(x) = e^x$, jak bylo jistě jasné od začátku.

Pokud je tedy zajištěna konvergence zmíněné posloupnosti, pak je zajištěna existence a jednoznačnost (díky jednoznačnosti limity) řešení počáteční úlohy. Kontraktivnost operátoru a následně konvergenci alespoň na nějakém intervalu obdržíme, pokud je funkce F spojitě diferencovatelná. To nám dává následující základní větu.

Věta 8.2 (Existence a jednoznačnost). *Nechť $G, H \subset \mathbb{R}$ jsou otevřené množiny. Jestliže $F: G \times H \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitě diferencovatelná funkce. Uvažujeme rovnici (8.1.1), potom existují intervaly $I \subset G$ a $J \subset H$, že pro každé $y_0 \in I$ existuje jediné řešení $y(x)$ na intervalu J*

Navíc na každém uzavřeném podintervalu I je závislost řešení na počáteční podmínce spojitá.

8.2. Řešení speciálních typů diferenciálních rovnic.**Separace proměnných.**

Pokud lze rovnici (8.1.1) psát ve tvaru

$$y'(x) = f(x)g(y(x)), \quad (8.2.1)$$

pak říkáme, že jsou v ní proměnné *separované*. Tuto rovnici bychom mohli přepsat do tvaru

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y).$$

Formálním vynásobením předchozí rovnice výrazem dx a podělením $f(x)$ dostaneme rovnici, kde nlevá strana závisí pouze na y a pravá pouze na x . Pokud nalezneme primitivní funkce k oběma stranám (obě strany zintegrujeme podle „svých“ proměnných), dostaneme řešení v implicitním tvaru.

Věta 8.3. *Nechť f, g jsou spojitě diferencovatelné na okolích bodů $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ a $g(y_0) \neq 0$. Dále nechť $y(x)$ je řešením počáteční úlohy (8.1.3, 8.1.4), které nám dává věta 8.2. Potom $y(x)$ je dáno implicitně rovnicí*

$$\int_{y_0}^y \frac{1}{g(z)} dz \int_{x_0}^x f(t) dt.$$

Příklad. Nalezněte řešení rovnice

$$y'(x) = 2xy(x).$$

Rovnici přepíšeme do tvaru se separovanými proměnnými

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= 2xy, \\ \frac{dx}{dy} &= 2x \cdot dx \end{aligned}$$

Nyní nalezneme primitivní funkce na obou stranách.

$$\ln |y| = x^2 + c,$$

kde $c \in \mathbb{R}$ je libovolné. Obdrželi jsme řešení rovnice v implicitním tvaru. Pokud rovnici ještě upravíme, dostáváme řešení v explicitním tvaru

$$y(x) = ke^{x^2},$$

kde $k \in \mathbb{R}$ je libovolné. Pokud by byla navíc přidána počáteční podmínka $x_0 = 0, y_0 = 2$, tedy $y(0) = 2$, dopočítali bychom konstantu k .

$$2 = y(0) = ke^0 = k.$$

Speciální případy.

Nezávislost na y . Pokud rovnice (8.2.1) neobsahuje výraz závislý na $y(x)$, tedy $g(y) = 1$, dostáváme řešení přímo a v explicitním tvaru

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t) dt.$$

Nezávislost na x . Obdobně, pokud (8.2.1) neobsahuje výraz závislý na x , tedy $f(x) = 1$, dostáváme řešení v implicitním tvaru

$$x - x_0 = \int_{y_0}^y \frac{1}{g(z)} dz = G(y(x)) - G(y_0).$$

G je primitivní funkcí k $1/g$.

8.3. Lineární difereční rovnice. Diferenciální rovnice je *lineární* pokud je ve tvaru

$$y'(x) + p(x)y(x) = q(x). \quad (8.3.1)$$

Pokud je v (8.3.1) funkce g rovna nule jedná se o *homogenní (lineární) diferenciální rovnici*. Tedy

$$y'(x) + p(x)y(x) = 0. \quad (8.3.2)$$

Velkou výhodou lineární diferenciální rovnice je fakt, že má řešení na celý interval. Přesněji řečeno, každé řešení (8.3.1) lze rozšířit na nějaký interval.

Další užitečnou vlastností je následující:

Věta 8.4. *Nechť $y_H: I \rightarrow \mathbb{R}$ je řešení (8.3.2) a $y_P: I \rightarrow \mathbb{R}$ je řešení (8.3.1) na téže intervalu. Potom funkce $y_H + y_P$ je řešení (8.3.1).*

Důkaz. Máme $y_H' + p y_H = 0$ a $y_P' + p y_P = q$. Nyní ověříme, že $y_H + y_P$ je řešení (8.3.1). Počítáme levou stranu rovnice

$$(y_H + y_P)' + p \cdot (y_H + y_P) = y_H' + p y_H + y_P' + p y_P = 0 + q.$$

Tím je věta dokázána. $\square$

Z předchozí věty plyne, že máme-li jediné řešení (8.3.1) a všechna řešení homogenizované rovnice (8.3.2), pak všechna řešení na daném intervalu získáme tak, že ke všem řešením homogenizované rovnice přičteme jedno určité (*partikulární*) řešení (8.3.1).

Věta 8.5 (o prostotu řešení). *Množina řešení (8.3.2) na intervalu I tvoří vektorový prostor. Přesněji, řešení má tvar*

$$y(x) = c \cdot e^{-\int_{x_0}^x p(t) dt}$$

kde $x_0 \in I$ a $c \in \mathbb{R}$ je libovolné.

Důkaz. Přímým dosazením. $\square$

Příklad.

Homogenní lineární diferenciální rovnici lze vždy řešit separací proměnných, nalezení partikulárního řešení lze nalézt pomocí takzvané variace konstant.

8.4. Soustavy diferenciálních rovnic. Uvažujeme soustavu n diferenciálních rovnic pro n neznámých funkcí:

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= a_{1,1}(x)y_1(x) + \cdots + a_{1,n}(x)y_n(x) + b_1(x), \\ &\vdots \\ y_n'(x) &= a_{n,1}(x)y_1(x) + \cdots + a_{n,n}(x)y_n(x) + b_n(x). \end{aligned} \quad (8.4.1)$$

Vektorově lze tuto soustavu psát ve tvaru

$$(y(x))' = A(x)(y(x)) + (b(x)). \quad (8.4.2)$$

Analogicky jako v případě jedné rovnice (viz 8.3) lze ukázat, že řešení soustavy (8.4.2) můžeme psát ve tvaru součtu řešení homogenní soustavy a partikulárního řešení. Proto se nejprve

budeme věnovat řešení homogenizované soustavy, tedy kdy je vektor funkcí $b(x)$ nulový. Omezíme se na případ, pouze číselné matice A . Tedy

$$(y(x))' = A(y(x)), \quad (8.4.3)$$

kde $A = (a_{i,j})$ a $a_{i,j} \in \mathbb{R}$. Uvědomme si, že pokud máme pouze jednu rovnici, tedy $y'(x) = a \cdot y(x)$, je jasné, že obecným řešením je $y_H(x) = ke^{ax}$, pro $k \in \mathbb{R}$. Pokud bychom použili tuto analogii na soustavu rovnic, je nutné definovat výraz e^A , pro číselnou matici A . Tento výraz definujeme stejně jako u číselné exponenciální funkce jako nekonečnou řadu

$$e^A = E + A + \frac{1}{2}A^2 + \dots + \frac{1}{n!}A^n + \dots,$$

kde E je jednotková matice příslušného řádu a $A^n = A \cdot \dots \cdot A$ je n -tá mocnina A . V případě, že A je diagonální matice. Lze snadno odvodit, že

$$e^A = \begin{pmatrix} e^{a_{1,1}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{a_{2,2}} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & e^{a_{n,n}} \end{pmatrix}$$

Proto se nám nyní hodí tvrzení lineární algebry, že každou matici lze psát ve tvaru $A = P^{-1}JP$, kde P je regulární matice z vlastních vektorů a J je matice v Jordanově tvaru (nejjednodušším případem je ten, kdy je J diagonální).

Definice e^A s faktem, že $A^n = (P^{-1}JP) \cdot (P^{-1}JP) \cdot \dots \cdot (P^{-1}JP) = P^{-1}J^nP$ dává

$$e^A = P^{-1}e^JP.$$

Obecné řešení (8.4.3) je potom

$$y_H(x) = kP^{-1}e^JP,$$

kde $k \in \mathbb{R}^n$ je libovolné. Tyto úvahy nám dávají následující tvrzení.

Věta 8.6. Množina řešení systému (8.4.3) na intervalu I tvoří n -rozměrný vektorový prostor.

Důkaz. Obdobně jako v případě jedné rovnice. $\square$

Lineárně nezávislé funkce $\varphi_1, \dots, \varphi_n$, které jsou bází v prostoru řešení (8.4.3) nazveme *fundamentální systém řešení* (8.4.3). Libovolné řešení tohoto systému lze tedy vyjádřit jako lineární kombinaci prvků fundamentálního systému.

Pro systému lineárních diferenciálních rovnic lze taktéž obdržet obdobu věty 8.4, proto dostáváme následující tvrzení.

Věta 8.7. Každé řešení $y(x)$ systému (8.4.2) lze vyjádřit ve tvaru $y(x) = \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i + y_P$, kde $c_i \in \mathbb{R}$ jsou libovolná, $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ tvoří fundamentální systém řešení (8.4.3) a $y_P(x)$ je řešení (8.4.2).

Vraťme se nyní k explicitnímu vyjádření řešení homogenní soustavy.

1. Matice J je diagonální. Tedy existují vlastní čísla $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, potom mají matice J a e^J tvar

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad e^J = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}.$$

Řešení homogenního systému je potom ve tvaru $y_H(x) = kP^{-1}e^{Jx}P$, a jelikož jsou matice P, P^{-1} vyjádřeny pomocí vlastních vektorů, dostaneme

$$y_H = c_1 u_1 e^{\lambda_1 t} + \dots + c_n u_n e^{\lambda_n t},$$

kde $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ jsou libovolné a $u_i \in \mathbb{R}^n$ je vlastní vektor příslušný λ_i .

Příklad.

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= 5y_1(x) + 2y_2(x) \\ y_2'(x) &= -4y_1(x) - y_2(x). \end{aligned}$$

Matice $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$ má vlastní čísla $\lambda_1 = 1$ a $\lambda_2 = 3$ k nim příslušné vlastní vektory jsou $u_1 = (1, -2)^\top$ a $u_2 = (1, -1)^\top$. Ověřte!

Fundamentální systém řešení je potom $\varphi_1(x) = (1, -2)^\top e^x$ a $\varphi_2(x) = (1, -1)^\top e^{3x}$. Obecné řešení je potom

$$y(x) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^x + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{3x}.$$

Nebo-li

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= c_1 e^x + c_2 e^{3x} \\ y_2'(x) &= -2c_1 e^x - c_2 e^{3x} \end{aligned}$$

2. *Případ, kdy máme vícenásobnou vlastní hodnotu*, si ukážeme na případě, kdy $n = 3$ a máme $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ a od ní různou vlastní hodnotu λ_3 . Potom

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

a

$$\begin{aligned} e^{Jx} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda x & 1 & 0 \\ 0 & \lambda x & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 x \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \lambda^2 x^2 & 2\lambda x & 0 \\ 0 & \lambda^2 x^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2 x^2 \end{pmatrix} + \dots + \frac{1}{n!} \begin{pmatrix} \lambda^n x^n & n\lambda^{n-1} x^n & 0 \\ 0 & \lambda^n x^n & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^n x^n \end{pmatrix} + \dots = \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n x^n / n! & \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} x^n / (n-1)! & 0 \\ 0 & \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n x^n / n! & 0 \\ 0 & 0 & \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_3^n x^n / n! \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda x} & x e^{\lambda x} & 0 \\ 0 & e^{\lambda x} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_3 x} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Je-li u vlastní vektor příslušný k λ , u_3 vlastní vektor příslušný λ_3 a v je vektor, který se zobrazí na u (zobecněný vlastní vektor), potom je řešení ve tvaru

$$y(x) = c_1 u e^{\lambda x} + c_2 (v + ux) e^{\lambda x} + c_3 u_3 e^{\lambda_3 x}$$

Příklad.

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= 3y_1(x) + y_2(x) \\ y_2'(x) &= -y_1(x) + y_2 \end{aligned}$$

Matice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ má jediné vlastní číslo $\lambda = 2$, vlastní vektor je $u = (1, -1)^\top$, zobecněný vlastní vektor v , který se zobrazí na u , je řešením $Av = u$. Dostáváme $v = (1/2, -1/2)^\top$. Proto

$$y(x) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2x} + c_2 \begin{pmatrix} 1/2 + 1x \\ -1/2 - 1x \end{pmatrix} e^{2x}.$$

3. *Případ komplexní vlastní čísla*. Pokud bychom se spokojili s řešením v komplexním oboru, pak lze postupovat jako v předchozích případech. Má-li reálná matice komplexní vlastní číslo, pak i číslo komplexně

sdužené je vlastním číslem a vlastní vektory k těmto číslům jsou také komplexně sdužené. Jsou-li φ a $\bar{\varphi}$ komplexně sdužené prvky fundamentálního systému, pak vhodnou lineární kombinací získáme reálné lineárně nezávislé funkce, které nahradí $\varphi, \bar{\varphi}$. Například můžeme zvolit $\frac{1}{2}(\varphi + \bar{\varphi})$ a $\frac{1}{2i}(\varphi - \bar{\varphi})$.

Příklad.

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= y_2(x) \\ y_2'(x) &= -y_1(x) \end{aligned}$$

Matice systému je $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Tato matice má vlastní hodnoty $i, -i$. k nim dostáváme vlastní vektory $u_1 = (-i, 1)^\top, u_2 = (i, 1)^\top$.

Fundamentální systém řešení je $\{\varphi_1, \varphi_2\} = \{u_1 e^{ix}, u_2 e^{-ix}\} = \{u_1(\cos x + i \sin x), u_2(\cos x - i \sin x)\}$. V prostoru řešení si zvolíme jinou lineárně nezávislou dvojici tím, že položíme $\psi_1 = \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2)$ a $\psi_2 = \frac{1}{2i}(\varphi_1 - \varphi_2)$. Máme

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \frac{1}{2}(u_1 \cos x + i u_1 \sin x + u_2 \cos x - i u_2 \sin x) = \frac{1}{2}(u_1 + u_2) \cos x + \frac{1}{2}(i u_1 - i u_2) \sin x = \\ &= \frac{1}{2}((-i, 1)^\top + (i, 1)^\top) \cos x + \frac{1}{2}((1, i)^\top - (-1, i)^\top) \sin x = (1, 0)^\top \sin x + (0, 1)^\top \cos x, \end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned} \psi_2 &= \frac{1}{2i}(u_1 \cos x + i u_1 \sin x - u_2 \cos x + i u_2 \sin x) = \frac{1}{2i}(i u_1 + i u_2) \sin x + \frac{1}{2i}(u_1 - u_2) \cos x = \\ &= (0, -1)^\top \sin x + (1, 0)^\top \cos x. \end{aligned}$$

Obecné řešení je potom

$$y(x) = c_1 \psi_1 + c_2 \psi_2 = c_1(\sin x, \cos x)^\top + c_2(\cos x, -\sin x)^\top.$$

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= c_1 \sin x + c_2 \cos x, \\ y_2'(x) &= c_1 \cos x - c_2 \sin x. \end{aligned}$$

Jak jsme již řekli obecné řešení soustavy (8.4.1) lze vyjádřit ve tvaru součtu obecného řešení systému homogenizované soustavy (8.4.3) a jednoho řešení s nenulovým vektorem $b(x)$. Toto partikulární řešení lze obdržet stejně jako v kapitole 8.3 variací konstant.

Věta 8.8 (variace konstant). *Uvažujme lineární diferenciální rovnici*

$$y'(x) = a(x)y(x) + b(x). \quad (8.4.4)$$

podle věty 8.5 je $y_H(x) = ce^{A(x)x}$ je pro každé $c \in \mathbb{R}$ řešením homogenizované rovnice $y'(x) = a(x)y(x)$ na intervalu $I \subset \mathbb{R}$. Potom existuje řešení y_P rovnice (8.4.4) na I ve tvaru

$$y_P(x) = C(x)e^{A(x)},$$

kde $C(x)$ je primitivní funkce k $b(x)e^{-A(x)}$.

D ů k a z. Předpokládejme, že $y_P(x) = C(x)e^{A(x)}$, pro nějakou primitivní funkci k $b(x)e^{-A(x)}$. Platí tedy

$$\begin{aligned} y_P'(x) &= C'(x)e^{A(x)} + C(x)e^{A(x)}A'(x) \\ &= C'(x)e^{A(x)} + a(x)C(x)e^{A(x)} && (A \text{ je primitivní k } a) \\ &= b(x)e^{-A(x)}e^{A(x)} + a(x)C(x)e^{A(x)} && (C \text{ je primitivní k } b(x)e^{-A(x)}) \\ &= a(x)y_P(x) + b(x). && (\text{definice } y_P) \end{aligned}$$

□

8.5. Lineární diferenciální rovnice vyššího řádu. Diferenciálními rovnicím, které obsahují

derivaci vyššího než prvního řádu, se budeme věnovat pouze v případě *lineárních rovnic vyššího řádu* a to jen s konstantními koeficienty.

Předpokládejme, že máme rovnici ve tvaru

$$y^{(n)}(x) + a_1 y^{(n-1)}(x) \cdots + a_{n-1} y'(x) + a_n y(x) = b(x) \quad (8.5.1)$$

kde $a_i \in \mathbb{R}$. Substitucí $y_1' = y_2, y_2' = y_3, \dots, y^{(n-1)} = y_n$ je rovnice (8.5.1) ekvivalentní se systémem lineárních diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= y_2(x) \\ &\vdots \\ y_{n-1}'(x) &= y_n(x) \\ y_n'(x) &= -a_1 y_n(x) \cdots - a_{n-1} y_2(x) - a_n y_1(x) - b(x) \end{aligned} \quad (8.5.2)$$

Pokud uvažujeme homogenizovanou soustavu k předchozímu, pak matice systému je

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & -a_2 & -a_1 \end{pmatrix}, \quad (8.5.3)$$

jejíž charakteristický polynom má tvar

$$\chi(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \lambda + a_n. \quad (8.5.4)$$

Podle počtu a násobnosti se situace rozpadá na následující případy:

n různých (jednonásobných) vlastních hodnot $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. V tomto případě každé vlastní číslo přispívá do lineární kombinace obecného řešení jedním sčítancem. Celkové je

$$y_H(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + \cdots + c_n e^{\lambda_n x},$$

kde $c_i \in \mathbb{R}$ jsou libovolné. Vlastní vektory znát nemusíme, protože ze soustavy (8.5.2) nás zajímá pouze y_1 a první složka vlastního vektoru, kterým by se při řešení vynásobila $e^{\lambda x}$, se „započítá“ do parametru c . Jinak řečeno, je-li u vlastní vektor k λ pak množina funkcí $c u_1 e^{\lambda x}$ je obsažena v $c e^{\lambda x}$, probíhá-li c celé $\mathbb{R}$.

Některé λ_k je p -násobné. Potom sčítance v lineární kombinaci od tohoto vlastního čísla, budou kromě $e^{\lambda_k x}$ obsahovat ještě $x e^{\lambda_k x}, \dots, x^{p-1} e^{\lambda_k x}$. Například, pokud λ_1 je p -násobné a ostatní vlastní čísla $\lambda_2, \dots, \lambda_{n-p-1}$ jsou jednonásobná, je

$$y_H(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 x e^{\lambda_1 x} + \cdots + c_p x^{p-1} e^{\lambda_1 x} + c_{p+1} e^{\lambda_2 x} + \cdots + c_n e^{\lambda_{n-p-1} x}$$

Vlastním číslem je $\lambda = \alpha + \beta i$. Potom je vlastním číslem i $\bar{\lambda} = \alpha - \beta i$, polynom (8.5.4) má reálné koeficienty. Funkce $e^{(\alpha + \beta i)x}$ případně i $x e^{(\alpha + \beta i)x}$ (v případě že je $\alpha + \beta i$ vícenásobné) by v libovolné lineární kombinaci tvořily část obecného řešení.

Příklad.

$$y'''(x) - 13y''(x) + 12y'(x) = 0.$$

Ačkoliv víme z (8.5.4), jak bude vypadat charakteristický polynom, provedeme detailně celý postup. Substitujeme $y_1 = y, y_2 = y_1', y_3 = y_2'$. Dostáváme soustavu

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= y_2(x) \\ y_2'(x) &= y_3(x) \\ y_3'(x) &= -12y_2(x) + 13y_3(x), \end{aligned} \quad A - \lambda E = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & -12 & 13 - \lambda \end{pmatrix}.$$

Potom

$$\det A - \lambda E = -\lambda(-\lambda(13 - \lambda) + 12) = -\lambda^3 + 13\lambda^2 - 12\lambda$$

Což odpovídá (8.5.4) (Znaménko zde roli nehraje). Kořeny charakteristického polynomu jsou $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 12$. Jelikož nás zajímá pouze y_1 , nemusíme počítat vlastní vektory, které určují „poměry“ mezi jednotlivými y_i . A protože jsou všechna vlastní čísla jednonásobná, budeme od každého z nich mít jeden prvek z nich se sestaví obecné řešení zadané rovnice. Tedy

$$y(x) = c_1 e^{0x} + c_2 e^{1x} + c_3 e^{12x} = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{12x}.$$

Příklad.

$$y'' - 4y' + 13y = 0.$$

Již se nebudeme zdržovat soustavou a sestavíme charakteristický polynom.

$$\chi(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 13$$

Kořeny jsou $\lambda_1 = 2 + 3i$ a $\lambda_2 = 2 - 3i$. Obecné řešení v komplexním tvaru je tedy

$$y(x) = c_1 e^{(2+3i)x} + c_2 e^{(2-3i)x}.$$

Fundamentální systém řešení $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ je $\varphi_1 = e^{(2+3i)x} = e^{2x}(\cos(3x) + i \sin(3x))$ a $\varphi_2 = e^{(2-3i)x} = e^{2x}(\cos(3x) - i \sin(3x))$. V tomto prostoru si může zvolit bázi $\{\psi_1, \psi_2\}$ z reálných funkcí tak, že položíme $\psi_1 = \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2)$,

$$\frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2) = \frac{1}{2}e^{2x}(\cos(3x) + i \sin(3x) + \cos(3x) - i \sin(3x)) = e^{2x} \cos(3x),$$

což odpovídá reálné části φ_1 nebo φ_2 . A

$$\frac{1}{2i}(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{1}{2}e^{2x}(\cos(3x) + i \sin(3x) - \cos(3x) + i \sin(3x)) = e^{2x} \sin(3x),$$

to zase odpovídá imaginární části φ_1 . Obecné řešení je tedy

$$y(x) = c_1 e^{2x} \cos(3x) + c_2 e^{2x} \sin(3x).$$

Obecné řešení diferenciální rovnice (8.5.1), pokud známe řešení homogenizované rovnice pro $b(x) = 0$, je samozřejmě ve tvaru součtu $y_H + y_P$. Partikulární řešení lze opět nalézt metodou variace konstant.

Rejstřík

- bod stacionární: 39
- derivace druhá Fréchetova: 32
 - Fréchetova p -tá: 35
 - Gâteauxova: 15
 - parciální: 17
 - — zobecněného typu: 29
 - podle vektoru: 15
- extrém lokální: 39
- Funkce definovaná implicitně: 24
 - integrovatelná: 47
- funkce Lagrangeova: 42
- integrál na množině: 49
- Integrál na obdélníku: 47
- Koule otevřená v normovaném prostoru: 1
 - uzavřená v normovaném prostoru: 1
- limita funkce: 3
- matice Jakobiho: 18
 - parciálních derivací: 18
- maximum lokální funkce: 39
 - — na množině: 41
- ostré lokální: 39
- minimum lokální funkce: 39
 - — na množině: 41
- ostré lokální: 39
- množina Jordanovsky měřitelná: 50
- míry nula: 48
- Množina ohraničená v normovaném prostoru: 1
- Norma: 1
- normy ekvivalentní: 3
- Obdélník v $\mathbb{R}^n$: 45
- Objem obdélníku n -rozměrný: 45
- oscilace funkce na množině: 48
 - — v bodě: 48
- Prostor normovaný: 1
- Složky funkce: 5
- Součet dolní: 46
- horní: 46
- Topologie eukleidovská na $\mathbb{R}^n$: 4
 - generovaná normou: 1
 - přirozená na $\mathbb{R}^n$: 4
- součinná na $\mathbb{R}^n$: 5
- zjemnění dělení: 45
 - — společné: 45
- zobrazení asociované: 32, 35
 - definované implicitně: 30
 - diferencovatelné p -krát: 35
 - — dvakrát spojitě: 33
 - — spojitě: 20
 - dvakrát diferencovatelné: 32
 - Fréchet diferencovatelné: 11
 - homogenní řádu n : 35
 - kvadratické: 31
 - — indefinitní: 40
 - — negativně definitní: 40
 - — pozitivně definitní: 39
 - multilineární: 34
 - parciální: 17
 - spojitě v normovaných prostorech: 2
 - symetrické: 31
 - — multilineární: 35
- třídy C^2 : 34

Literatura

- [1] V.I. Averbuch, *Matematická analýza 3-4*. Učební text Matematický ústav v Opavě, revize 2011.
- [2] V. Jarník, *Diferenciální počet I*. ČSAV, Praha, 1984.
- [3] V. Jarník, *Integrační počet I*. ČSAV, Praha, 1974.
- [4] M. Krupka, M. Málek, *Matematická analýza I,II*. Učební text Matematický ústav v Opavě, verze 2023.