

Matematická analýza III, IV

Texty k přednáškám M. Málka

září 2023

Obsah

Obsah	iii
1 Přirozená topologie v \mathbb{R}^n	1
1.1 Normované prostory	1
1.2 \mathbb{R}^n jako normovaný prostor	4
1.3 \mathbb{R}^n jako součin topologických prostorů	5
1.4 Kompaktní množiny v \mathbb{R}^n	6
1.5 Spojitost základních zobrazení	7
1.6 Konečněrozměrné normované prostory	8
1.7 Prostory lineárních zobrazení	8
2 Derivace prvního řádu	11
2.1 Fréchetova derivace	11
2.2 Derivace podle vektoru, Gâteauxova derivace	15
2.3 Parciální derivace	17
2.4 Věty o střední hodnotě	18
2.5 Spojitá diferencovatelnost	20
3 Inverzní a implicitní zobrazení	23
3.1 Inverzní zobrazení	23
3.2 Věta o implicitní funkci	23
3.3 Obecná věta o inverzním zobrazení	25
3.4 Obecná věta o implicitním zobrazení	28
4 Derivace vyšších řádů	31
4.1 Bilineární a kvadratická zobrazení	31
4.2 Derivace a diferenciál druhého řádu	32
4.3 Multilineární a homogenní zobrazení	34
4.4 Derivace vyššího řádu	35
4.5 Diferenciál a Taylorův polynom	37
5 Extrémy funkcí více proměnných	39
5.1 Extremální úlohy bez vazby	39
5.2 Vázané extrémy	41
6 Riemannův integrál na \mathbb{R}^n	45
6.1 Integrál na obdélníku v \mathbb{R}^n	45
6.2 Integrál na množině v \mathbb{R}^n	49
Rejstřík	51

1. Přirozená topologie v \mathbb{R}^n

V první části tohoto textu zavádíme přirozenou topologii na množině \mathbb{R}^n , nejprve jako topologii normovaného prostoru, a pak jako topologii součinu topologických prostorů. Dvojí definice nám umožní v dalším výkladu a při řešení úloh zvolit přístup, vždy vhodný pro danou situaci. Tato oboustrannost se nám osvědčí již v této kapitole.

V celé kapitole (i v dalším textu) budeme uvažovat množinu \mathbb{R}^n s přirozenou strukturou vektorového prostoru nad polem \mathbb{R} .

1.1. Normované prostory. Všechny vektorové prostory, s nimiž budeme pracovat v tomto odstavci, budeme uvažovat nad polem reálných čísel.

Vektorový prostor X se nazývá *normovaný*, je-li na něm definována *norma*, což jest zobrazení $\|\cdot\|: X \rightarrow \mathbb{R}$ splňující následující tři podmínky:

1. Pro každé $x \in X$ je $\|x\| \neq 0$ jestliže $x \neq 0$.
2. Pro každé $x \in X$ a $t \in \mathbb{R}$ je $\|tx\| = |t| \cdot \|x\|$.
3. Pro každé $x, y \in X$ platí $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Z druhé podmínky pro $t = -1$ a $t = 0$ nám plyne $\|-x\| = \|x\|$ a $\|0\| = 0$.

Nejpřirozenějším příkladem normy je absolutní hodnota na \mathbb{R} . Dalším důležitým příkladem, se kterým se čtenář určitě setkal je $\|(x_1, x_2)\| = \sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2}$ definovaná na \mathbb{R}^2 .

Definici a základní vlastnosti normovaného prostoru známe z algebry. V tomto odstavci si všimneme, jak lze pomocí normy na vektorovém prostoru definovat topologii.

Nechť $x \in X, r \in \mathbb{R}, r > 0$. Položme

$$B_r^{\|\cdot\|}(x) = \{y \in X \mid \|y - x\| < r\}, \quad (1.1.1)$$

$$\bar{B}_r^{\|\cdot\|}(x) = \{y \in X \mid \|y - x\| \leq r\}, \quad (1.1.2)$$

Množina $B_r^{\|\cdot\|}(x)$ (respektive $\bar{B}_r^{\|\cdot\|}(x)$) se nazývá *otevřená* (respektive *uzavřená*) *koule* (vzhledem k normě $\|\cdot\|$) se středem x a poloměrem r . V případě, že nedojde k nedorozumění, budeme používat jednodušších symbolů $B_r(x)$ a $\bar{B}_r(x)$.

To, že jsme si dovolili užít v názvu těchto objektů topologických pojmů (otevřená a uzavřená), je zde opodstatněné, neboť definici otevřené respektive uzavřené množiny splňovat budou, až nadefinujeme příslušnou topologii. Můžete si to ověřit.

Z definice koulí vidíme, že $B_r(x) \subset \bar{B}_r(x)$ a pro $r < s$ je $B_r(x) \subset B_s(x)$ i $\bar{B}_r(x) \subset \bar{B}_s(x)$.

Množina $A \subset X$ se nazývá *ohraničená*, je-li množina $\|A\|$ (obraz množiny A při zobrazení $\|\cdot\|$) ohraničená. Ekvivalentně: množina A je ohraničená, existuje-li otevřená koule $B_r(0)$ taková, že $A \subset B_r(0)$.

Pomocí otevřených koulí nyní můžeme definovat na X topologii τ generovanou normou následovně: množina $G \subset X$ je *otevřená* (tedy prvkem topologie), jestliže pro každý bod $x \in G$ existuje $B_r(x)$ taková, že $B_r(x) \subset G$.

Stejného výsledku dosáhneme, pokud v definici místo otevřené koule použijeme uzavřenou.

Lemma 1.1. *Takto definovaný systém je skutečně topologie na X .*

D ů k a z. Ověříme, že systém τ splňuje axiomy topologie. Uvažujme systém $(G_\alpha)_{\alpha \in A}$ prvků τ , dokážeme, že $\bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$ je rovněž prvek τ . Pokud $x \in \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$ potom existuje $\alpha_0 \in A$ takové, že $x \in G_{\alpha_0}$. Z definice topologie existuje $B_r(x)$ s $B_r(x) \subset G_{\alpha_0}$. Proto $B_r(x) \subset \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$.

Nechť $G_1, G_2 \in \tau$, ověřme, že $G_1 \cap G_2 \in \tau$. Zvolme $x \in G_1 \cap G_2$. Jelikož je x prvkem G_1 existuje $B_{r_1}(x) \subset G_1$, analogicky existuje $B_{r_2}(x) \subset G_2$. Potom pro $r = \min\{r_1, r_2\}$ máme $B_r(x) \subset G_1 \cap G_2$. Tedy $G_1 \cap G_2 \in \tau$.

Prostor X i prázdná množina jsou prvky τ . \square

Systém všech otevřených koulí normovaného prostoru X tvoří bázi topologie na X .

Otevřené koule jsou otevřené množiny a uzavřené koule jsou uzavřené množiny v topologii generované normou.

Každá otevřená i uzavřená koule je souvislá množina.

Každý normovaný prostor je Hausdorffův topologický prostor.

Podívejme se nyní na spojitost zobrazení mezi normovanými prostory. Uvažujme X a Y dva normované prostory s topologiemi generovanými normami. Jak víme ze základů topologie zobrazení $f: X \rightarrow Y$ je *spojité* pokud vzorem otevřené množiny v X je otevřená množina v Y . Zde máme topologii na X i na Y definovanou pomocí normy, proto lze spojitost definovat vycházejíc z normy

Věta 1.2 (ε - δ kritérium spojitosti). *Nechť X a Y jsou normované prostory s normami $\|\cdot\|_X$ a $\|\cdot\|_Y$, dále $A \subset X$. Zobrazení $f: A \rightarrow Y$ je spojitě, právě když pro každé $x_0 \in A$ a pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $x \in A$, $\|x - x_0\|_X < \delta$ platí $\|f(x) - f(x_0)\|_Y < \varepsilon$ (alternativně zapsáno: $f(A \cap B_\delta^{\|\cdot\|_X}(x_0)) \subset B_\varepsilon^{\|\cdot\|_Y}(f(x_0))$).*

Norma je spojitě zobrazení. Skutečně, například spojitost v nule: Vzor intervalu $(-\varepsilon, \varepsilon)$ při zobrazení $\|\cdot\|$ je přece $B_\varepsilon^{\|\cdot\|}(0)$. Proto $\|B_\varepsilon^{\|\cdot\|}(0)\| \subset (-\varepsilon, \varepsilon)$.

Nechť $x \in X$ je libovolný vektor, definujeme $f_x: \mathbb{R} \rightarrow X$ předpisem $f_x(t) = tx$. Toto zobrazení je lineární a spojitě.

Uvažme nyní dvě normy ($\|\cdot\|$ a $|\cdot|$) na vektorovém prostoru X a zkoumejme, za jakých okolností bude topologie indukovaná normou $\|\cdot\|$ silnější, než topologie indukovaná normou $|\cdot|$. V následující větě tyto topologie označujeme symboly $\tau_{\|\cdot\|}$ a $\tau_{|\cdot|}$.

Věta 1.3. *Nechť $\|\cdot\|$ a $|\cdot|$ jsou dvě normy na vektorovém prostoru X . Následující čtyři výroky jsou ekvivalentní:*

1. $\tau_{\|\cdot\|}$ je silnější než $\tau_{|\cdot|}$.
2. Existuje číslo $m > 0$ takové, že $B_m^{\|\cdot\|}(0) \subset B_1^{|\cdot|}(0)$.
3. Existuje číslo $m > 0$ takové, že $\bar{B}_m^{\|\cdot\|}(0) \subset \bar{B}_1^{|\cdot|}(0)$.
4. Existuje číslo $M > 0$ takové, že $|\cdot| \leq M \cdot \|\cdot\|$.

D ů k a z. Předpokládejme, že platí tvrzení 1, že každá otevřená množina v topologii $\tau_{|\cdot|}$ je otevřená i v topologii $\tau_{\|\cdot\|}$. Pak množina $B_1^{|\cdot|}(0)$ je otevřená v topologii $\tau_{\|\cdot\|}$, což znamená že existuje otevřená koule $B_m^{\|\cdot\|}(0)$ tak, že $B_m^{\|\cdot\|}(0) \subset B_1^{|\cdot|}(0)$. To je tvrzení 2.

Postupujeme sporem, předpokládejme, že platí tvrzení 2. a neplatí tvrzení 3. Nejprve existuje $m > 0$ takové, že pro každé $\|x\| < m$ platí $|x| < 1$ a jelikož neplatí tvrzení 3. existuje $x \in X$, $\|x\| = m$ a $|x| > 1$. Pak pro vektor

$$\bar{x} = \frac{|x| + 1}{2|x|}x$$

platí jednak

$$\|\bar{x}\| = \left| \frac{|x| + 1}{2|x|} \right| \|x\| = \frac{|x| + 1}{2|x|} m = \left(\frac{|x|}{2|x|} + \frac{1}{2|x|} \right) m < m$$

a jednak

$$|\bar{x}| = \left| \frac{|x| + 1}{2|x|} \right| |x| = \frac{||x| + 1|}{2|x|} |x| = \frac{||x| + 1|}{2} > 1,$$

což je spor. Platí tedy tvrzení 3.

Nyní předpokládejme platnost výroku 3. a položíme $M = 1/m$. Kdyby existoval vektor $x \in X$ takový, že $|x| > M\|x\|$, pak by pro vektor

$$x_0 = \frac{m}{\|x\|} x$$

platilo $\|x_0\| = m$, neboli $x_0 \in \bar{B}_m^{\|\cdot\|}(0)$, a

$$|x_0| = \frac{m|x|}{\|x\|} > mM = 1,$$

neboli $x_0 \notin \bar{B}_1^{|\cdot|}$. To je spor, který dokazuje výrok 4.

Konečně, předpokládejme platnost tvrzení 4. Nechť U je množina otevřená v $\tau_{|\cdot|}$, $x \in U$ bod. Nechť $\varepsilon > 0$ je takové číslo, že $B_\varepsilon^{|\cdot|} \subset U$. Pak $B_{\varepsilon/M}^{\|\cdot\|}(x) \subset B_\varepsilon^{\|\cdot\|}(x) \subset U$, což dokazuje, že množina U je otevřená v topologii $\tau_{\|\cdot\|}$.

Tím je důkaz hotov. \square

Dvě normy na vektorovém prostoru se nazývají *ekvivalentní*, mají-li shodné indukované topologie. Z předchozí věty nyní snadno plyne

Věta 1.4. Normy $\|\cdot\|$ a $|\cdot|$ na vektorovém prostoru X jsou ekvivalentní, právě když existují čísla $m, M > 0$ taková, že

$$m \cdot \|\cdot\| \leq |\cdot| \leq M \cdot \|\cdot\|.$$

Důsledek 1.5. Jsou-li normy $\|\cdot\|$ a $|\cdot|$ na vektorovém prostoru X ekvivalentní, pak každá množina, ohraničená vzhledem k jedné z nich, je ohraničená i vzhledem k druhé.

Platí i opačné tvrzení. Zformulujte je a dokažte!

Nechť X, Y jsou normované prostory $A \subset X$, $f: A \rightarrow Y$ zobrazení bod $a \in X$ hromadný bod množiny A (ne nutně prvek A). Prvek $L \in Y$ nazveme *limitou f pro x jdoucí k a* , pokud pro každou kouli $B_\varepsilon(L)$ existuje koule $B_\delta(a)$ taková, že $f(A \cap B_\delta(a) \setminus \{a\}) \subset B_\varepsilon(L)$. Zapisujeme

$$L = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

Snadno lze ukázat následující tvrzení

Věta 1.6 (ε - δ kritérium limity v normovaných prostorech). Nechť X, Y jsou normované prostory $L \in Y$ je limitou $f: A \rightarrow Y$ v a pokud pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pokud $x \in A$, $x \neq a$, $\|x - a\|_X < \delta$, potom $\|f(x) - L\|_Y < \varepsilon$.

Všimněme si, že limitou funkce je prvek Y . Proto pokud hovoříme o limitech v \mathbb{R}^m už neuvažujeme nevlastní limity na rozdíl od \mathbb{R} , kde jsem uvažovali dva nevlastní body. Již v \mathbb{R}^2 bychom museli zavést jeden nevlastní bod „okolo“ celého \mathbb{R}^2 nebo různá nekonečna v závislosti na směru.

Podobnosti v definici limity a spojitosti lze jen těžko přehlédnout. Jde skutečně o těsně související pojmy.

Věta 1.7 (o souvislosti spojitosti a limity). Nechť X, Y jsou normované prostory $A \subset X$, $f: A \rightarrow Y$ zobrazení a bod $a \in X$ hromadný bod množiny A . Bod $L \in Y$ je limitou f pro x jdoucí k a právě když zobrazení $\bar{f}: A \cup \{a\} \rightarrow Y$ definovaná

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{jestliže } x \in A; \\ L & \text{jestliže } x = a, \end{cases}$$

je v a spojitě.

D ů k a z. Plyne z definic obou pojmů. \square

Vypočítejte limitu funkce $f: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2}.$$

Na definičním oboru funkce si funkční předpis můžeme upravit. Pro limitu tedy máme

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x^2 - y^2)(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x^2 - y^2 = 0.$$

1.2. \mathbb{R}^n jako normovaný prostor. Uvažme zobrazení $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_\infty: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \|x\|_1 &= |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n| \\ \|x\|_2 &= \sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2 + \dots + (x_n)^2} \\ \|x\|_\infty &= \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\} \end{aligned} \quad (1.2.1)$$

Lemma 1.8. Každé ze zobrazení (1.2.1) je norma na \mathbb{R}^n .

D ů k a z. Přenecháváme čtenáři. \square

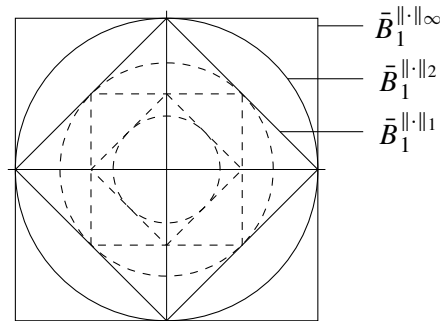
Snadno lze zjistit, že pro normu $\|\cdot\|_\infty$ platí

$$B_r^{\|\cdot\|_\infty}(x) = (x_1 - r, x_1 + r) \times (x_2 - r, x_2 + r) \times \dots \times (x_n - r, x_n + r). \quad (1.2.2)$$

$$\bar{B}_r^{\|\cdot\|_\infty}(x) = [x_1 - r, x_1 + r] \times [x_2 - r, x_2 + r] \times \dots \times [x_n - r, x_n + r]. \quad (1.2.3)$$

Otevřené koule v této normě jsou tedy krychle. Jak vypadají koule v nadefinovaných normách lze vidět na obrázku.

Pro $n = 1$ všechny tři uvedené normy splývají, otevřené (respektive uzavřené) koule jsou otevřené (respektive uzavřené) intervaly a indukují přirozenou topologii na \mathbb{R} .



Lemma 1.9. Pro zobrazení $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_\infty$ platí

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_1 &\geq \|\cdot\|_2 \geq \|\cdot\|_\infty, \\ \|\cdot\|_1 &\leq \sqrt{n} \|\cdot\|_2, \\ \|\cdot\|_2 &\leq n \|\cdot\|_\infty, \end{aligned}$$

D ů k a z. Přenecháváme čtenáři. \square

Z předchozího lemmatu a Věty 1.4 nyní plyne

Věta 1.10. Normy $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_\infty$ jsou ekvivalentní.

Topologie na \mathbb{R}^n , indukovaná normami $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_\infty$, se nazývá přirozená (eukleidovská) topologie \mathbb{R}^n .

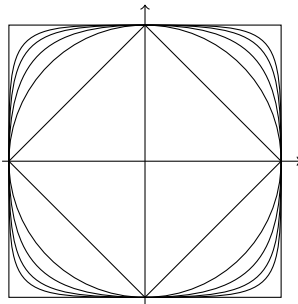
Uvedené definice můžeme ještě dále zobecnit, když pro libovolné $p \geq 1$ položíme

$$\|x\|_p := \sqrt[p]{|x_1|^p + |x_2|^p + \dots + |x_n|^p}$$

Takto definované zobrazení $\|\cdot\|_p$ je norma; trojúhelníková nerovnost vyplývá z Minkowského nerovnosti

$$\sqrt[p]{|x_1 + y_1|^p + \dots + |x_n + y_n|^p} \leq \sqrt[p]{|x_1|^p + \dots + |x_n|^p} + \sqrt[p]{|y_1|^p + \dots + |y_n|^p},$$

kteřá platí pro každé $p \geq 1$.



Koule $B_1^{||·||_p}(0)$, $p = 1, 2, 3, 4, 5, \infty$

Všechny normy $||·||_p$ indukují tutěž topologii (jsou ekvivalentní); tato skutečnost snadno vyplývá Věty 1.4, Lemmatu 1.9 a Jensenovy nerovnosti

$$\sqrt[p]{|x_1|^p + \dots + |x_n|^p} \leq \sqrt[q]{|x_1|^q + \dots + |x_n|^q},$$

kteřá platí pro každé $p, q, 0 < p \leq q$.

Poznamenejme ještě, že označení $||·||_\infty$ pro třetí normu z 1.2.1 je přirozené, jelikož platí

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \sqrt[p]{|x_1|^p + \dots + |x_n|^p} = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\} = ||x||_\infty.$$

1.3. \mathbb{R}^n jako součin topologických prostorů. Uvažme na množině \mathbb{R} přirozenou topologii (jako obvykle) a na množině $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$ topologii součinu topologických prostorů. Víme, že bázi této topologie je systém všech otevřených kvádrů v \mathbb{R}^n , tj. množin

$$I_1 \times I_2 \times \dots \times I_n$$

kde I_1, I_2, \dots, I_n jsou otevřené intervaly.

Věta 1.11. Topologie součinu na \mathbb{R}^n je shodná s přirozenou topologií.

D ů k a z. Podle (1.2.2) existuje báze přirozené topologie na \mathbb{R}^n , jejíž každý prvek je otevřený kvádr tedy generátor součinnové topologie. Tím je ukázáno, že přirozená topologie je silnější než součinnová.

Naopak, jestliže x je prvkem nějaké množiny U otevřené v součinnové topologii, existuje otevřený kvádr I , pro který platí

$$x \in I = (x_1 - r_1, x_1 + r_1) \times (x_2 - r_2, x_2 + r_2) \times \dots \times (x_n - r_n, x_n + r_n) \subset U.$$

Položíme $r = \min\{r_1, r_2, \dots, r_n\}$. Potom platí

$$x \in B_r^{||·||_\infty}(x) \subset (x_1 - r, x_1 + r) \times (x_2 - r, x_2 + r) \times \dots \times (x_n - r, x_n + r) \subset I \subset U.$$

Našli jsme tedy kouli (zvolili jsme si výhodně normu $||·||_\infty$ — však jsou všechny ekvivalentní) tedy otevřenou množinu v přirozené topologii, kteřá je podmnožinou U . To dokazuje, že každý otevřený kvádr je otevřená množina v přirozené topologii. Součinnová topologie je silnější než přirozená. \square

Uvažujme funkci $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ k této funkci definujeme m funkcí $f_1, f_2, \dots, f_m: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f_i = \text{pr}_i \circ f$ a nazveme je složkami funkce f .

Máme-li funkci $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y, \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y\right)$ (otočení o $\pi/4$ proti směru hodinových ručiček), pak jeho složky jsou samozřejmě $f_1(x, y) = \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y$ a $f_2(x, y) = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y$. A často pak využíváme zápisu $f = (f_1, f_2)$.

Následující věta nám usnadňuje ověřování spojitosti funkcí.

Věta 1.12. Funkce $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ je spojitá právě, když je spojitá každá z jejich složek.

Věta 1.13. Necht' $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $a \in \mathbb{R}^n$ hromadný bod A a $L = (l_1, l_2, \dots, l_m) \in \mathbb{R}^m$. Potom $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L = (L_1, L_2, \dots, L_m)$, právě když $\lim_{x \rightarrow a} f_i(x) = L_i$ pro každé $i = 1, 2, \dots, m$.

Následující věta dává do souvislosti limitu zobrazení mezi kartézskými součiny \mathbb{R} a jednorozměrnou limitou.

Věta 1.14. *Nechť $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $a \in \mathbb{R}^n$ hromadný bod A , existuje limita $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \in \mathbb{R}^m$. Dále $g: \rightarrow A$ je spojitě v 0 a $g(0) = a$. Potom existuje limita $\lim_{t \rightarrow 0} f \circ g(t) = L$. D ů k a z. Plyne věty o limitě složené funkce [4, věta 4.28, str. 47]. \square*

Důsledek 1.15. *Nechť $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ hromadný bod A , existuje limita $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \in \mathbb{R}^m$. Potom pro každé $i = 1, 2, \dots, n$ existuje limita f zúženého na podmnožinu $A_i = \{x \mid x_1 = a_1, \dots, x_{i-1} = a_{i-1}, x_{i+1} = a_{i+1}, \dots, a_n\}$ a platí $\lim_{t \rightarrow a_i} f|_{A_i}(t) = L$.*

Ačkoliv předchozí věta mluví o existenci, my ji budeme využívat pro důkaz neexistence limity, jak ukazuje následující příklad.

Zjistěte zda existuje limita

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{x + y} \quad (1.3.1)$$

Na podmnožinách $A_1 = \{(x, y) \mid y = 0\}$ (t.j. osa x)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{x + y} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 0}{x + 0} = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0;$$

i $A_2 = \{(x, y) \mid x = 0\}$ (t.j. osa y)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{x + y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0 + y^2}{0 + y} = \lim_{y \rightarrow 0} y = 0;$$

limity existují a rovnají se. Pokud ve větě 1.14 za funkci g pro libovolné $k \in \mathbb{R}$ vezmeme $g(t) = (t, kt)$ limita opět vyjde 0 (ověřte). Stejně tak dopadne i $g(t) = (t, kt^2)$, tedy substituce $y = kt^2$. To ovšem neznamená, že limita v (1.3.1) existuje a rovná se 0.

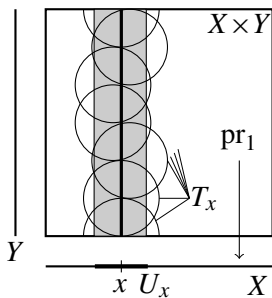
Ovšem pokud položíme $g(t) = (t, -t - t^2)$, což by šlo zjednodušeně označit jako substituce $y = -x - x^2$, dostáváme

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{x + y} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + (-x - x^2)^2}{x + -x - x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x^2 + 2x^3 + x^4}{-x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} -2 - 2x - x^2 = -2.$$

Limita (1.3.1) tedy neexistuje.

1.4. Kompaktní množiny v \mathbb{R}^n . Z odstavce (1.1) víme, že \mathbb{R} je Hausdorffův topologický prostor a že otevřené koule jsou souvislé množiny. Podívejme se nyní podrobně, jak vypadají kompaktní množiny v \mathbb{R}^n . Nejprve uvedeme pomocné topologické tvrzení.

Věta 1.16. *Budte X a Y topologické prostory. Pak topologický prostor $X \times Y$ je kompaktní, právě když je kompaktní každý z prostorů X a Y .*



D ů k a z. Předpokládejme, že prostory X a Y jsou kompaktní a zvolme otevřené pokrytí S prostoru $X \times Y$. Pro každé $x \in X$ označme S_x systém těch množin $W \in S$, pro které $x \in \text{pr}_1(W)$ (pr_1 je projekce $\text{pr}_1: X \times Y \rightarrow X$). S_x je otevřené pokrytí množiny $\{x\} \times Y$, která je určité kompaktní (proč?), má tedy konečné podpokrytí $T_x \subset S_x$ (Y je kompaktní). Označme nyní U_x průnik množin $\text{pr}_1(W)$, kde $W \in T_x$. U_x je otevřená podmnožina X (jde o průnik konečně mnoha otevřených množin pr_1 je otevřené zobrazení). Systém $(U_x)_{x \in X}$ je otevřené pokrytí množiny X , má tedy konečné podpokrytí. Označme A konečnou množinu prvků $x \in X$ takovou, že systém $(U_x)_{x \in A}$ je otevřené pokrytí množiny X .

Konečně, položme $T = \bigcup_{x \in A} T_x$. Necháme nyní na čtenáři, aby ukázal, že $T \subset S$ a že T je konečné otevřené pokrytí množiny $X \times Y$.

Nyní dokážeme opačnou implikaci. Předpokládejme, že $X \times Y$ je kompaktní a ukážeme, že potom je X kompaktní. Nechť $(U_i)_{i \in I}$ je otevřené pokrytí X , nalezneme jeho konečné podpokrytí. Pro každé $i \in I$ položme $O_i = \text{pr}_1^{-1}(U_i)$, pak $(O_i)_{i \in I}$ je otevřeným pokrytím $X \times Y$. Jelikož je $X \times Y$ je kompaktní existuje jeho konečné podpokrytí $(O_i)_{i \in K}$. Potom je ale $(U_i)_{i \in K}$ konečným podpokrytím $(U_i)_{i \in I}$. Kompaktnost Y se ukáže obdobně. \square

Důsledek 1.17. *Nechť $A, B \subset X$ jsou kompaktní množiny, potom je $A \times B$ kompaktní podmnožina v $X \times X$.*

Důsledek 1.18. *Nechť $I_1, I_2, \dots, I_n \subset \mathbb{R}$ jsou kompaktní intervaly. Pak uzavřený kvádr $I_1 \times I_2 \times \dots \times I_n \subset \mathbb{R}^n$ je kompaktní množina.*

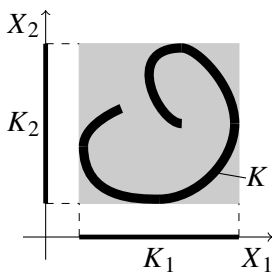
D ů k a z. Indukcí pomocí předchozího důsledku. \square

Důsledek 1.19. *Nechť $\bar{B}(x)$ je uzavřená koule vzhledem k libovolné z norem $\|\cdot\|_p$, $1 \leq p \leq \infty$. Pak $\bar{B}(x)$ je kompaktní množina.*

D ů k a z. Plyne z toho, že každá uzavřená koule v \mathbb{R}^n je podmnožinou nějakého kvádrů a z toho, že uzavřená podmnožina kompaktní množiny je kompaktní. \square

Tvrzení ve větě 1.16 lze samozřejmě indukcí rozšířit na součin konečného počtu topologických prostorů. Ovšem platí, že součin libovolného (i nekonečného) systému kompaktních prostoru je kompaktní — Tichonovova věta.

Věta 1.20. *Množina $K \subset \mathbb{R}^n$ je kompaktní, právě když je uzavřená a ohraničená.*



D ů k a z. Důkaz provedeme pro $n = 2$. Předpokládejme, že $K \subset \mathbb{R}^2$ je kompaktní. Jelikož je \mathbb{R}^2 Hausdorffův, tak je K uzavřená (podle [4, věta 3.2, str. 38]). Zbývá ohraničenost. Položme $K_1 = \text{pr}_1(K)$ a $K_2 = \text{pr}_2(K)$, kde pr_1, pr_2 jsou, jak již čtenář vytušil, první a druhá projekce. Tyto projekce jsou spojité a K_1, K_2 kompaktní v \mathbb{R} (podle [4, věta 3.6, str. 39]) a tedy ohraničené. Existuje tedy uzavřený ohraničený interval $I_r = [-r, r]$ takový, že $K_1, K_2 \subset I_r$. Potom ovšem $B_r^{\|\cdot\|_\infty}(0) = I_r \times I_r \supset K$.

Nyní opačná implikace, nechť $K \subset \mathbb{R}^2$ je uzavřená a ohraničená. Tedy $K \subset \bar{B}_r^{\|\cdot\|_\infty}(0)$, jelikož $\bar{B}_r^{\|\cdot\|_\infty}(0) = [-r, r] \times [-r, r]$, což je kompaktní množina podle důsledku 1.18, potom je K uzavřenou podmnožinou kompaktní množiny a tedy je sama kompaktní. \square

1.5. Spojitost základních zobrazení. Nechť $s, p: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ jsou zobrazení definovaná předpisem

$$\begin{aligned} s(x_1, x_2) &= x_1 + x_2 \\ p(x_1, x_2) &= x_1 x_2 \end{aligned}$$

Ukážeme, že tato zobrazení jsou spojitá.

Nechť $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, $s = s(x_0, y_0) = x_0 + y_0$, zvolme libovolné $\varepsilon > 0$. Pokud libovolné $(x', y') \in B_\varepsilon^{\|\cdot\|_1}(x_0, y_0)$, pak platí

$$|x' - x_0| + |y' - y_0| < \varepsilon$$

Máme

$$|s(x', y') - s(x_0, y_0)| = |x' + y' - x_0 - y_0| \leq |x' - x_0| + |y' - y_0| < \varepsilon.$$

což znamená, že pro každé $(x', y') \in B_\varepsilon^{\|\cdot\|_1}(x_0, y_0)$ platí $s(x', y') \in (s(x_0, y_0) - \varepsilon, s(x_0, y_0) + \varepsilon)$ nebo-li $s(B_\varepsilon^{\|\cdot\|_1}(x_0, y_0)) \subset (s(x_0, y_0) - \varepsilon, s(x_0, y_0) + \varepsilon)$ a dokazuje spojitost zobrazení s v bodě (x_0, y_0) .

Nyní dokážeme spojitost zobrazení p . Nechť $(t, x) \in \mathbb{R}^2$, $y = p(t, x) = tx$, zvolme $\varepsilon > 0$. Položme $M = \|(t, x)\|_1$ a $\delta = \min\{1, \varepsilon/2(M+1)\}$. Pro libovolné $(t', x') \in B_\delta^{\|\cdot\|_1}(t, x)$ máme $|t'| < M+1$, $|x' - x| < \delta$, $|t' - t| < \delta$, $|x| \leq M < M+1$ a

$$\begin{aligned} |p(t', x') - tx| &= |t'x' - tx| = |t'(x' - x) + (t' - t)x| \\ &\leq |t'| \cdot |x' - x| + |t' - t| |x| < (M+1)\delta + \delta(M+1) \\ &\leq (M+1) \frac{\varepsilon}{2(M+1)} + \frac{1}{2(M+1)}(M+1) = \varepsilon. \end{aligned}$$

To dokazuje spojitost zobrazení p v bodě (t, x) .

Ze spojitosti zobrazení s a p a z věty o spojitosti kompozice spojitých zobrazení plynou známá tvrzení o spojitosti součtu a součinu dvou spojitých funkcí.

Zobrazení s je samozřejmě lineární. Dokažte, že každé lineární zobrazení $l: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ je spojitě.

1.6. Konečněrozměrné normované prostory. V odstavci 1.2 jsme zavedli různé normy na prostoru \mathbb{R}^n a o některých z nich jsme ukázali, že jsou ekvivalentní. Nyní ukážeme, že se jedná o speciální případ obecnějšího tvrzení.

Věta 1.21. *Libovolné dvě normy na konečněrozměrném vektorovém prostoru jsou ekvivalentní.* Důk a z. Stačí dokázat, že libovolné dvě normy na \mathbb{R}^n jsou ekvivalentní (proč?). Nechť tedy $\|\cdot\|$ je norma na \mathbb{R}^n . Dokážeme, že je ekvivalentní normě $\|\cdot\|_1$.

Označme (e_1, \dots, e_n) kanonickou bázi v \mathbb{R}^n a položme $M = \max\{\|e_1\|, \|e_2\|, \dots, \|e_n\|\}$. Pro libovolný prvek $x \in \mathbb{R}^n$ platí

$$\begin{aligned} \|x\| &= \|x^1 e_1 + x^2 e_2 + \dots + x^n e_n\| \leq |x^1| \cdot \|e_1\| + |x^2| \cdot \|e_2\| + \dots + |x^n| \cdot \|e_n\| \\ &\leq |x^1| \cdot M + |x^2| \cdot M + \dots + |x^n| \cdot M = M \|x\|_1. \end{aligned}$$

Tím je dokázáno, že norma $\|\cdot\|$ je slabší než norma $\|\cdot\|_1$ (Věta 1.3).

Dokažme nyní naopak, že norma $\|\cdot\|$ je silnější než norma $\|\cdot\|_1$. Označme

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_1 = 1\}$$

(jednotková sféra vzhledem k normě $\|\cdot\|_1$ se středem v nule). Množina S je vzhledem k normě $\|\cdot\|_1$ ohraničená. V topologii normy $\|\cdot\|_1$ je také uzavřená (jako vzor uzavřené množiny $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ při spojitém zobrazení normou). Je tedy v této topologii kompaktní (Věta 1.20), což znamená, že je kompaktní i ve slabší topologii normy $\|\cdot\|$ (proč?). Dále: funkce $\|\cdot\|: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je vzhledem k normě $\|\cdot\|$ spojitá, nabývá tedy na množině S minimum m . Je jistě $m > 0$ a $\bar{B}_m(0)^{\|\cdot\|} \subset \bar{B}_1^{\|\cdot\|_1}(0)$. Podle Věty 1.3 je tedy norma $\|\cdot\|$ silnější než norma $\|\cdot\|_1$.

Tím je věta dokázána. \square

1.7. Prostory lineárních zobrazení. V tomto odstavci zavedeme normovanou strukturu na prostoru lineárních zobrazení dvou vektorových prostorů.

Mějme dva konečněrozměrné normované prostory X, Y . Označme $L(X; Y)$ vektorový prostor lineárních zobrazení z X do Y .

Tento vektorový prostor je, jak víme, konečněrozměrný. Jeho dimenze je rovna součinu dimenzí prostorů X a Y .

Pro každé $l \in L(X; Y)$ položme

$$\|l\| = \max_{x \in \bar{B}_1(0)} \|l(x)\| \tag{1.7.1}$$

(množina $\bar{B}_1(0)$ je kompaktní, zobrazení l a $\|\cdot\|$ jsou spojitá; kompozice těchto zobrazení na této množině tedy má maximum).

Předpisem (1.7.1) je definováno zobrazení $\|\cdot\|: L(X; Y) \rightarrow \mathbb{R}$.

Lemma 1.22. Zobrazení $\|\cdot\|: L(X; Y) \rightarrow \mathbb{R}$ je norma.

D ů k a z. Musíme ověřit podmínky z definice normy.

1. Nechť $l \neq 0$. Pak existuje vektor $x \in X$, pro nějž je $l(x) \neq 0$. Platí $\|x\| \neq 0$ a pro vektor $x_0 = x/\|x\|$ platí $x_0 \in \bar{B}_1(0)$ a $\|l(x_0)\| > 0$. Tedy $\|l\| > 0$.
2. Mějme $l \in L(X; Y)$ a $c \in \mathbb{R}$. Platí

$$\|c \cdot l\| = \max_{x \in \bar{B}_1(0)} \|c \cdot l(x)\| = \max_{x \in \bar{B}_1(0)} |c| \cdot \|l(x)\| = |c| \cdot \max_{x \in \bar{B}_1(0)} \|l(x)\| = |c| \cdot \|l\|.$$

3. Pro $l_1, l_2 \in L(X; Y)$ dostáváme

$$\begin{aligned} \|l_1 + l_2\| &= \max_{x \in \bar{B}_1(0)} \|(l_1 + l_2)(x)\| = \max_{x \in \bar{B}_1(0)} \|l_1(x) + l_2(x)\| \\ &\leq \max_{x \in \bar{B}_1(0)} (\|l_1(x)\| + \|l_2(x)\|) = \max_{x \in \bar{B}_1(0)} \|l_1(x)\| + \max_{x \in \bar{B}_1(0)} \|l_2(x)\| = \|l_1\| + \|l_2\|. \end{aligned}$$

□

Věta 1.23. Pro libovolný vektor $x \in X$ a lineární zobrazení $l \in L(X; Y)$ platí

$$\|l(x)\| \leq \|l\| \cdot \|x\|.$$

D ů k a z. Pro vektor $x_0 = x/\|x\|$ platí $x_0 \in \bar{B}_1(0)$, což podle (1.7.1) znamená, že $\|l(x_0)\| \leq \|l\|$. Nyní dostáváme

$$\|l(x)\| = \|x\| \cdot \|l(x_0)\| \leq \|x\| \cdot \|l\|. \quad \square$$

V případě $X = \mathbb{R}^n$ a $Y = \mathbb{R}^m$ můžeme místo prvků prostoru $L(X; Y)$ uvažovat matice typu $m \times n$. Přesněji řečeno, zobrazení z $L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ do $M_{m,n}$ (to je prostor matic o m řádcích a n sloupcích s reálnými prvky), které lineárnímu zobrazení l přiřadí jeho matici vzhledem ke kanonickým bazím, je izomorfismus vektorových prostorů.

Na prostoru $L(X; Y)$ můžeme tedy kromě normy (1.7.1) uvažovat i libovolnou jinou normu, kterou umíme zavést na prostoru $M_{m,n}$. Tyto normy budou podle Věty 1.21 ekvivalentní. Jelikož prostor $M_{m,n}$ je izomorfní s prostorem \mathbb{R}^{mn} (matice typu $m \times n$ jsou mn -tice čísel), můžeme použít například libovolnou normu zavedenou v odstavci 1.2. Tedy, pro matici $A = (a_{ij}^i)$ můžeme položit

$$\begin{aligned} \|A\|_1 &= \sum_{i,j} |a_{ij}^i|, \\ \|A\|_2 &= \sum_{i,j} \sqrt{(a_{ij}^i)^2}, \\ \|A\|_\infty &= \sum_{i,j} \max_{i,j} |a_{ij}^i|. \end{aligned}$$

Věta 1.24. Nechť $|\cdot|$ je libovolná norma na prostoru $L(X; Y)$. Pak existuje číslo M takové, že pro každé $l \in L(X; Y)$ a $x \in X$ platí

$$\|l(x)\| \leq M|l| \cdot \|x\|.$$

D ů k a z. Plyne z vět 1.3, 1.21, a 1.23. □

DOPLŇKY

Prostor l_2
 Ohraničený lineární operátor
 Spojitost lineárního operátoru

2. Derivace prvního řádu

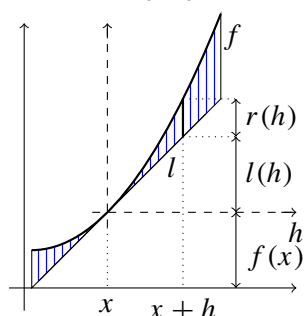
V této základní kapitole pojednáváme o diferencovatelnosti zobrazení $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ (podmnožina U je vždy otevřená). Zavádíme několik základních pojmů derivace: Fréchetovu, Gâteauxovu, derivace podle vektoru a parciální derivace. Ukazujeme souvislost těchto pojmů s pojmem derivace z prvního ročníku. Ukazujeme pravidla pro derivování základních zobrazení. Vysvětluje, že pouze Fréchetova derivace splňuje základní větu o derivaci složeného zobrazení: derivace kompozice dvou zobrazení je rovna kompozici jejich derivací. Slabší derivace podle vektoru a zejména parciální derivace se zase poměrně snadno počítají. Ukazujeme, že v případě spojitě diferencovatelných zobrazení lze výhody všech pojmů derivace spojit: spojitou diferencovatelnost zobrazení na otevřené množině lze snadno odhalit pomocí parciálních derivací a přitom se jedná o pojem se stejně hezkými (či dokonce, jak zjistíme později, hezčími) vlastnostmi, jaké má Fréchetova derivace.

Většina výsledků této kapitoly je nezávislá na volbě normy na prostorech \mathbb{R}^n a \mathbb{R}^m . Na řídké výjimky vždy upozorňujeme.

2.1. Fréchetova derivace. Než přistoupíme k definici toho pojmu, podívejme se derivaci funkce na \mathbb{R} : Definovali jsme derivaci funkce $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ v bodě x jako následující limitu

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}. \quad (2.1.1)$$

Geometrický význam derivace (viz obrázek) je pak směrnice tečny ke grafu funkce f v bodě $(x, f(x))$. V čárkovaných souřadnicích tečna hraje roli lineárního zobrazení $l(h) = f'(x) \cdot h$. Pokud si toto uvědomíme, definici derivace pak lze formulovat takto: Mějme $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a $x \in \mathbb{R}$, potom $f'(x)$ je derivací, pokud

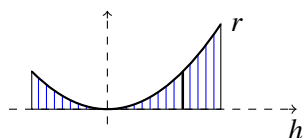


kde $l(h) = f'(x) \cdot h$, jde k nule rychleji než lineární zobrazení, tedy splňuje

$$r(h) = f(x+h) - f(x) - l(h), \quad (2.1.2)$$

kde $l(h) = f'(x) \cdot h$, jde k nule rychleji než lineární zobrazení, tedy splňuje

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{h} = 0. \quad (2.1.3)$$



Jinak řečeno, v daném bodě „zkoušíme“ různé hodnoty $f'(x)$ (tedy různá zobrazení l), ke každé podle vzorce (2.1.2) určíme zbytkovou funkci r a pokud ta splňuje (2.1.3), našli jsme derivaci.

Podobného postupu použijeme pro definici diferencovatelnosti pro funkce $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Zobrazení $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ je *diferencovatelné* v bodě $x \in U$, existuje-li lineární zobrazení $l: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ takové, že

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(x+h) - f(x) - l(h)\|}{\|h\|} = 0. \quad (2.1.4)$$

V podmínce (2.1.4) vystupují dvě normy, které jsou označeny stejným symbolem: jedna na \mathbb{R}^n a druhá na \mathbb{R}^m .

Věta 2.1. Lineární zobrazení l , splňující (2.1.4), existuje nejvýše jedno.

D ů k a z. Připusťme, že jsou taková zobrazení dvě, l a \bar{l} , a že existuje vektor $h \in \mathbb{R}^n$ takový, že $l(h) \neq \bar{l}(h)$. Jelikož má lineární zobrazení v nule hodnotu nula musí $h \neq 0$. Dále

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x+th) - f(x) - l(th)}{\|th\|} = 0, \quad (l \text{ splňuje (2.1.4)})$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x+th) - f(x) - \bar{l}(th)}{\|th\|} = 0. \quad (\bar{l} \text{ splňuje (2.1.4)})$$

Máme

$$\begin{aligned} 0 \neq \frac{l(h) - \bar{l}(h)}{\|h\|} &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{l(th) - \bar{l}(th)}{\|th\|} = \quad (\text{limita z konstantního výrazu}) \\ &= - \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x+th) - f(x) - l(th)}{\|th\|} + \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x+th) - f(x) - \bar{l}(th)}{\|th\|} = 0. \end{aligned}$$

Tento spor dokazuje větu. \square

Lineární zobrazení l z předchozí definice se označuje $df(x)$ a nazývá (Fréchetovou) derivací zobrazení f v bodě x .

Příklad. Uvažujme funkci $f(x, y) = x^2 + y^2$ a lineární zobrazení $l: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $l(h, k) = 2h + 2k$. Ověřme, že l je diferenciálem f v bodě $x = (1, 1)$.

$$\begin{aligned} r(h, k) &= f(x+h, y+k) - f(x, y) - l(h, k) = (1+h)^2 + (1+k)^2 - 1^2 - 1^2 - 2h - 2k = \\ &= h^2 + k^2. \end{aligned}$$

Ověříme (2.1.4). Máme

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{|r(h, k)|}{\|(h, k)\|} = \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{h^2 + k^2}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \sqrt{h^2 + k^2} = 0.$$

Následující tvrzení uvádějí základní vlastnosti Fréchetovy derivace.

Věta 2.2 (o diferenciálu). Zobrazení $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ je diferencovatelné v bodě x , právě když existuje lineární zobrazení $l: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, okolí $V \subset \mathbb{R}^n$ bodu $0 \in \mathbb{R}^n$ a zobrazení $\varepsilon: V \rightarrow \mathbb{R}^m$ tak, že

$$\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0 \quad (2.1.5)$$

a pro každé $h \in V$

$$f(x+h) - f(x) = l(h) + \varepsilon(h)\|h\|. \quad (2.1.6)$$

Platí $l(h) = df(x)(h)$.

D ů k a z. Podmínka (2.1.6) společně s (2.1.5) je ekvivalentní podmínce

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x) - l(h)}{\|h\|} = 0.$$

což dokazuje tvrzení. \square

Věta 2.3. Zobrazení $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, diferencovatelné v bodě x , je v tomto bodě spojitě.

D ů k a z. Z (2.1.6) plyne $\lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) - f(x) = 0$. \square

Porovnání s případem \mathbb{R} do \mathbb{R} — pozn. konečnost derivace !!!!!

Nyní dokážeme základní větu o derivaci složeného zobrazení. Nejprve pomocné lemma:

Lemma 2.4. *Nechť zobrazení $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ je diferencovatelné v bodě $x \in U$. Pak zobrazení*

$$h \mapsto \frac{f(x+h) - f(x)}{\|h\|}$$

je na nějakém okolí bodu $0 \in \mathbb{R}^n$ ohraničené.

D ů k a z. Podle věty 2.2 je

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{\|h\|} = df(x) \left(\frac{h}{\|h\|} \right) + \varepsilon(h).$$

Norma prvního sčítance na pravé straně je ohraničena číslem $\|df(x)\|$, druhý má v bodě $0 \in \mathbb{R}^n$ podle zmíněné věty limitu rovnu 0 je tedy na nějakém okolí tohoto bodu rovněž ohraničený. \square

Věta 2.5 (o derivaci složeného zobrazení). *Nechť zobrazení $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ je diferencovatelné v bodě $x \in U$, zobrazení $g: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$ je diferencovatelné v bodě $y = f(x)$. Pak zobrazení $g \circ f$ je diferencovatelné v bodě x a platí*

$$d(g \circ f)(x) = dg(y) \circ df(x). \quad (2.1.7)$$

D ů k a z. Označme $l_f = df$, $l_g = dg$. Pro $h \in \mathbb{R}^n$ označme

$$k = f(x+h) - f(x) = f(x+h) - y.$$

V následujícím (krom jiného) přičteme a odečteme výraz $l_g(f(x+h) - f(x))$, dvakrát použijeme předchozí rovnici, použijeme větu 1.23 a 2.2, máme

$$\begin{aligned} & \frac{\|g(f(x+h)) - g(f(x)) - l_g(l_f(h))\|}{\|h\|} \leq \\ & \leq \frac{\|g(f(x+h)) - g(f(x)) - l_g(f(x+h) - f(x))\|}{\|h\|} + \frac{\|l_g(f(x+h) - f(x)) - l_g(l_f(h))\|}{\|h\|} \leq \\ & \leq \frac{\|g(y+k) - g(y) - l_g(k)\|}{\|h\|} + \|l_g\| \frac{\|f(x+h) - f(x) - l_f(h)\|}{\|h\|} = \\ & = \frac{\|k\| \cdot \|\varepsilon(k)\|}{\|h\|} + \|l_g\| \frac{\|f(x+h) - f(x) - l_f(h)\|}{\|h\|}, \end{aligned}$$

kde $\lim_{u \rightarrow 0} \varepsilon(u) = 0$. Z věty 2.3 plyne, že při $h \rightarrow 0$ je $\lim_{h \rightarrow 0} k = 0$. Navíc, podle lemmatu 2.4 je výraz $\|k\|/\|h\|$ na nějakém okolí nuly ohraničený. Proto je limita výrazu na pravé straně rovna nule a věta dokázána. \square

Věta 2.6. *Každé konstantní zobrazení $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ je diferencovatelné v každém bodě $x \in \mathbb{R}^n$. Platí $df(x) = 0$.*

D ů k a z.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x) - 0}{\|h\|} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{\|h\|} = 0. \quad \square$$

Věta 2.7. *Každé lineární zobrazení $l: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ je diferencovatelné v každém bodě $x \in \mathbb{R}^n$. Platí $df(x) = l$.*

D ů k a z.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{l(x+h) - l(x) - l(h)}{\|h\|} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{l(x) + l(h) - l(x) - l(h)}{\|h\|} = 0. \quad \square$$

Věta 2.8. Zobrazení $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ je diferencovatelné v bodě $x \in U$, právě když jsou v tomto bodě diferencovatelné jeho složky f_1, f_2, \dots, f_m . Pro každé $h \in \mathbb{R}^n$ platí

$$df(x)(h) = (df_1(x)(h), df_2(x)(h), \dots, df_m(x)(h)). \quad (2.1.8)$$

D ů k a z. Zřejmý. \square

Vztah (2.1.8) se dá napsat takto:

$$df(x) = (df_1(x), df_2(x), \dots, df_m(x)).$$

Věta 2.9. Zobrazení $s: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $s(x, y) = x + y$, a $p: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $p(x, y) = xy$, jsou diferencovatelná v každém bodě $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Platí

$$ds(x, y)(h, k) = h + k, \quad dp(x, y)(h, k) = yh + xk.$$

D ů k a z. Zobrazení s je lineární, proto podle věty 2.7 je $ds(x, y) = s$ tedy $ds(x, y)(h, k) = s(h, k) = h + k$.

Pro zobrazení p máme

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{|p(x+h, y+k) - p(x, y) - yh - xk|}{\|(h, k)\|_\infty} = \frac{|(x+h)(y+k) - xy - yh - xk|}{\|(h, k)\|_\infty} = \\ &= \frac{|hk|}{\max\{|h|, |k|\}} \leq \frac{|h| \max\{|h|, |k|\}}{\max\{|h|, |k|\}} = |h|. \end{aligned}$$

Takže

$$\lim_{(h,k) \rightarrow 0} \frac{|p(x+h, y+k) - p(x, y) - yh - xk|}{\|(h, k)\|_\infty} = 0$$

a tvrzení je dokázáno. \square

Věta 2.10. Jsou-li $f, g: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ zobrazení diferencovatelná v bodě $x \in U$, pak pro libovolná čísla $a, b \in \mathbb{R}$ je zobrazení $af + bg$ diferencovatelné v bodě x a platí

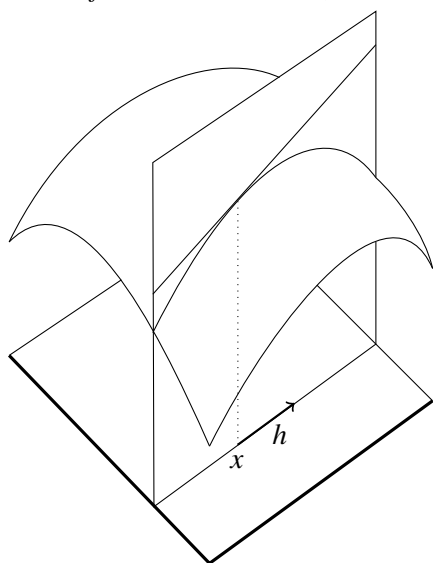
$$d(af + bg)(x) = a df(x) + b dg(x).$$

D ů k a z. Označme $l: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ lineární zobrazení, přiřazující každému vektoru $(h, k) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ vektor $ah + bk$ a nechť (f, g) je zobrazení $x \mapsto (f(x), g(x))$. Potom $af + bg = l \circ (f, g)$. Nyní máme

$$\begin{aligned} d(af + bg)(x) &= d(l \circ (f, g))(x) = && \text{(definice } l) \\ &= dl(f(x), g(x)) \circ d(f, g)(x) = && \text{(věta 2.5)} \\ &= l \circ (df, dg)(x) = && \text{(věta 2.7 a 2.8)} \\ &= a df(x) + b dg(x). \quad \square && \text{(opět definice } l) \end{aligned}$$

2.2. Derivace podle vektoru, Gâteauxova derivace.

Nechť $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $x \in U$ a $h \in \mathbb{R}^n$. Derivací zobrazení f podle vektoru h v bodě x rozumíme limitu



$$\frac{\partial f}{\partial h}(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + th) - f(x)}{t}. \tag{2.2.1}$$

Nechť $g_{x,h}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ je zobrazení, definované předpisem

$$g_{x,h}(t) = x + th. \tag{2.2.2}$$

Přímo z uvedené definice plyne následující jednoduché tvrzení.

Lemma 2.11. Zobrazení $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ má v bodě $x \in U$ derivaci podle vektoru $h \in \mathbb{R}^n$, právě když je zobrazení $f \circ g_{x,h}$ diferencovatelné v nule a platí

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial h}(x) &= d(f \circ g_{x,h})(0)(1) = \\ &= ((f_1 \circ g_{x,h})'(0), \dots, (f_m \circ g_{x,h})'(0)). \end{aligned} \tag{2.2.3}$$

D ů k a z. Předpokládejme, že zobrazení $f \circ g_{x,h}$ je diferencovatelné v nule. Pak podle věty 2.2 je ve vztahu

$$(f \circ g_{x,h})(t) - (f \circ g_{x,h})(0) = d(f \circ g_{x,h})(0)(t) + t\varepsilon(t)$$

$\lim_{t \rightarrow 0} \varepsilon(t) = 0$. Vzhledem k tomu, že $(f \circ g_{x,h})(t) = f(x + th)$, dostáváme současně existenci uvažované derivace podle vektoru i první rovnost v (2.2.3). Druhá rovnost plyne z věty 2.8.

Obrácená implikace plyne ihned z !!!!!!! . □

Derivaci zobrazení f v bodě x podle vektoru h budeme označovat následujícími způsoby

$$\frac{\partial f}{\partial h}(x), \quad d_h f(x).$$

Derivace zobrazení f v bodě x podle vektoru h je tedy derivací zobrazení $f \circ g_{x,h}$ v nule. To, společně s větou 2.8, umožňuje počítat derivace podle vektorů velice snadno.

Příklad. Mějme $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 + y^2$, spočítejme derivaci v bodě $(1, 1)$ podle vektoru $h = (1, 2)$. Podle předchozí věty spočítáme $f \circ g_{x,h}$. Předně $g_{(1,1),(1,2)}: t \mapsto (1 + 1t, 1 + 2t)$, tedy

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial(1, 2)}(1, 1) &= (f(1 + t, 1 + 2t))'_{t=0} = ((1 + t)^2 + (1 + 2t)^2)'_{t=0} = \\ &= (2(1 + t) + 4(1 + 2t))_{t=0} = 6. \end{aligned}$$

Je-li zobrazení $h \mapsto d_h f(x)$, které vektoru h přiřazuje derivaci ve směru h , lineární, nazýváme je Gâteauxovou derivací zobrazení f v bodě x a značíme $d_G f(x)$. Je tedy $d_G f(x) \in L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$.

Lemma 2.12. Je-li zobrazení $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ diferencovatelné v bodě $x \in U$, má v tomto bodě i Gâteauxovu derivaci a platí

$$d_G f(x) = df(x).$$

D ů k a z. Uvažujme zobrazení $g_{x,h}$ z (2.2.2). Toto zobrazení je diferencovatelné a platí $dg_{x,h}(0)(t) = th$. Podle věty 2.5 máme

$$d(f \circ g_{x,h})(0)(1) = (df(x) \circ dg_{x,h}(0))(1) = df(x)(h).$$

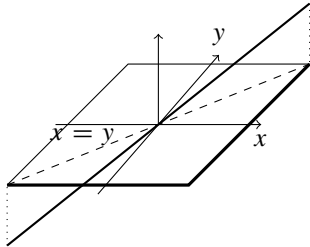
Tvrzení tedy plyne z lemmatu 2.11. \square

V následujících příkladech vidíme, že Gâteauxova derivace i derivace ve směru vektoru mohou existovat i funkcí, u kterých je diferencovatelnost vyloučena.

Příklad.

Uvažme funkci $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, definovanou předpisem

$$f(x, y) = \begin{cases} x & \text{když } x = y, \\ 0 & \text{jindy.} \end{cases}$$

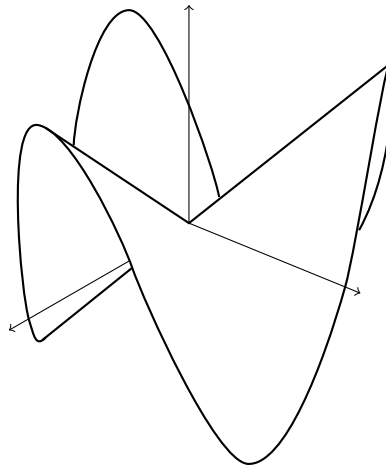


Vidíme, že derivace této funkce v nule podle libovolného vektoru $(h, k) \in \mathbb{R}^2$ existuje. Platí $\frac{\partial f}{\partial(h, k)}(0, 0) = 0$ pro $h \neq k$ a $\frac{\partial f}{\partial(h, k)}(0, 0) = (h, k)$ pro $h = k$, toto zobrazení ovšem není lineární (například derivace podle vektorů $(1, 0)$ a $(0, 1)$ je rovna nule, ale derivace podle jejich součtu, vektoru $(1, 1)$ je nenulová). Tedy $d_G f(0, 0)$ neexistuje.

Přesvědčte se, že podobnou vlastnost má funkce

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 - 3xy^2}{x^2 + y^2}, & \text{když } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{když } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

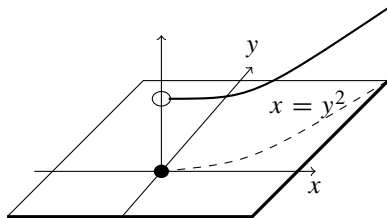
Tato funkce je dokonce spojitá. Graf této funkce vidíme na následujícím obrázku:



Příklad

Uvažujme nyní funkci $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, definovanou předpisem

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{když } x > 0, y = x^2, \\ 0 & \text{jindy.} \end{cases}$$



Snadno zjistíme, že tato funkce má v nule Gâteauxovu derivaci, ačkoli tam není spojitá. Vidíme tedy, že pro Gâteauxovu derivaci neplatí věta 2.3.

Pomocí posledně uvedené funkce lze snadno dokázat, že pro Gâteauxovu derivaci neplatí ani věta 2.5. Stačí definovat funkci $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ předpisem

$$g(t) = (t, t^2)$$

a uvažovat kompozici $f \circ g$.

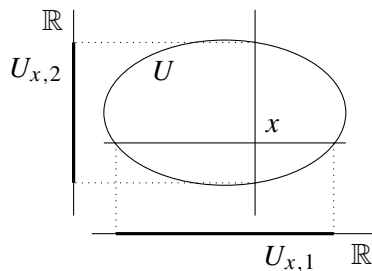
2.3. Parciální derivace. Nechť $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $x \in X$. Označme e_1, e_2, \dots, e_n kanonickou bázi vektorového prostoru \mathbb{R}^n (tedy $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, \dots , $e_n = (0, \dots, 0, 1)$). Derivace zobrazení f v bodě x podle e_i se nazývá *parciální derivací zobrazení f podle i -té proměnné v bodě x* . Klademe

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) &= \frac{\partial f}{\partial e_1}(x), \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) &= \frac{\partial f}{\partial e_2}(x), \\ &\vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) &= \frac{\partial f}{\partial e_n}(x), \end{aligned}$$

Takto se tradičně označují parciální derivace, z důvodu potřeby kompaktnějšího zápisu nebo v případech, kdy nejsou pojmenovány proměnné, označujeme parciální derivace také

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x), \quad \partial_{x_i} f(x), \quad \partial_i f(x).$$

Pro uvedené zobrazení f , bod $x \in U$ a číslo $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ označme $U_{x,i}$ množinu všech $t \in \mathbb{R}$ takových, že



$$(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_n) \in U$$

a $f_{x,i}$ zobrazení z $U_{x,i} \rightarrow \mathbb{R}^m$, definované předpisem

$$f_{x,i}(t) = f(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_n).$$

Toto zobrazení se nazývá *i -té parciální zobrazení zobrazení f v bodě x* .

Věta 2.13. Zobrazení $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ má v bodě $x \in U$ parciální derivaci podle i -té proměnné, právě když je v bodě x_i diferencovatelné parciální zobrazení $f_{x,i}$. Pro každé $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ platí

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x) = (f_{x,i})'_j(x_i).$$

D ů k a z. Necháváme na čtenáři. \square

Věta 2.13 ukazuje způsob, kterým se ve skutečnosti parciální derivace počítají.

Pro zobrazení $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, které má v bodě $x \in U$ parciální derivace podle všech proměnných, klademe

$$f'(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}.$$

Tato matice se jmenuje *matice parciálních derivací zobrazení f v bodě x* . V literatuře se čtenář může také setkat s označením *Jakobiho matice*

Předpokládejme, že zobrazení $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ má v bodě $x \in U$ Gâteauxovu derivaci. Pak pro libovolný vektor $h \in \mathbb{R}^n$, $h = h^1 e_1 + h^2 e_2 + \dots + h^n e_n$ platí

$$\begin{aligned} d_G f(x)(h) &= d_G f(x)(h^1 e_1 + h^2 e_2 + \dots + h^n e_n) = \\ &= h^1 d_G f(x)(e_1) + h^2 d_G f(x)(e_2) + \dots + h^n d_G f(x)(e_n) = \\ &= h^1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) + h^2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) = \\ &= f'(x) \cdot h. \end{aligned}$$

Zde jsme využili faktu, že z definice je $d_G f(x)$ je lineární, dále že Gâteauxova derivace přiřazuje derivaci ve směru vektoru, což je v případě vektorů e_i parciální derivace.

To dokazuje následující větu

Věta 2.14. Pro zobrazení $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, které má Gâteauxovu derivaci v bodě $x \in U$, je matice $f'(x)$ maticí lineárního zobrazení $d_G f(x)$ v kanonické bázi.

Pokud je zobrazení f diferencovatelné (Fréchet), pak podle lemmatu 2.12 a předchozí věty dostaneme, že i matice $df(x)$ je $f'(x)$.

Příklad. Mějme zobrazení $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (x^2 + y^2, xy)$. Diferenciál df v bodě (x, y) bude mít (v kanonických bázích) matici

$$f'(x, y) = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ y & x \end{pmatrix},$$

v bodě $(1, 2)$ tedy bude

$$f'(1, 2) = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

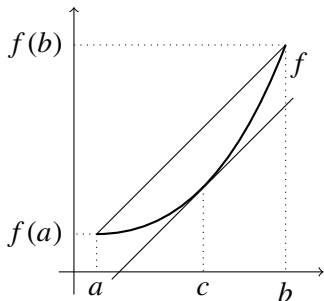
Z uvedeného a z věty 2.5 rovněž okamžitě vyplývá následující věta:

Věta 2.15. Nechť zobrazení $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ je diferencovatelné v bodě $x \in U$, zobrazení $g: V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ je diferencovatelné v bodě $y = f(x)$. Pak

$$(g \circ f)'(x) = g'(y) \cdot f'(x).$$

2.4. Věty o střední hodnotě.

Lagrangeova věta o střední hodnotě (nebo o přírůstku funkce) patří k základním nástrojům matematické analýzy. Zopakujme si ji. Nechť $f: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá a má derivaci v každém bodě (a, b) potom existuje bod $c \in (a, b)$ takový, že



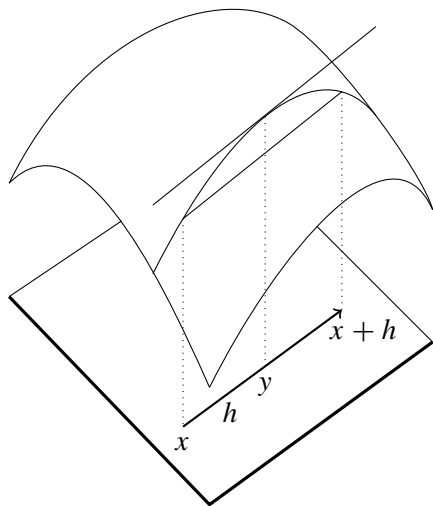
$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Tedy v intervalu (a, b) existuje bod v němž má f derivaci rovnu směrnici sečny body $(a, f(a))$ a $(b, f(b))$. To lze využít například k odhadu hodnoty $f(b)$, neboť $f(b) = f(a) + f'(c)(b - a)$. Známe-li odhad derivace f na (a, b) , dostaneme odhad $f(b)$.

Nyní k situaci zobrazení mezi kartézskými součinými \mathbb{R} . Pro prvky $x, h \in \mathbb{R}^n$ klademe

$$[x, x + h] = g_{x,h}([0, 1])$$

(viz (2.2.2)). Je tedy $[x, x + h]$ množina všech bodů $x + th$, kde $t \in [0, 1]$, čili úsečka, spojující body x a $x + h$. Nyní můžeme přikročit k větě o střední hodnotě.



Věta 2.16 (o střední hodnotě pro funkce). *Nechť množina $U \subset \mathbb{R}^n$ obsahuje úsečku $[x, x + h]$ a funkce $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ má v každém bodě této úsečky derivaci podle vektoru h . Pak existuje bod $y \in [x, x + h]$ takový, že*

$$\frac{\partial f}{\partial h}(y) = f(x + h) - f(x).$$

D ů k a z. Nechť $t_0 \in [0, 1]$. Máme

$$\begin{aligned} f \circ g_{x,h}(t) &= f(x + t_0h + (t - t_0)h) \\ &= f \circ g_{x+t_0h,h}(t - t_0). \end{aligned} \quad (2.4.1)$$

Jelikož funkce $f \circ g_{x+t_0h,h}$ na pravé straně je diferencovatelná v bodě t_0 (to plyne z předpokladu, že funkce f má derivaci podle vektoru h v bodě $x + t_0h$), má zobrazení $f \circ g_{x,h}$ derivaci v bodě t_0 a tedy (vzhledem k libovolnosti bodu t_0) v každém bodě intervalu $[0, 1]$.

Podle Lagrangeovy věty tedy existuje bod $t_0 \in (0, 1)$ takový, že

$$f \circ g_{x,h}(1) - f \circ g_{x,h}(0) = (f \circ g_{x,h})'(t_0) \cdot (1 - 0).$$

Levá strana této rovnice je ovšem rovna $f(x + h) - f(x)$ (jak plyne z (2.2.2)), kdežto pravá $\frac{\partial f}{\partial h}(x + t_0h)$ (jak je vidět po zderivování (2.4.1) v t_0 a pochopení (2.4.1)). Můžeme tedy položit $y = x + t_0h$. \square

Důsledek 2.17. *Nechť množina $U \subset \mathbb{R}^n$ obsahuje úsečku $[x, x + h]$ a funkce $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ má Gâteauxovu derivaci v každém bodě této úsečky. Pak existuje prvek $y \in [x, x + h]$ takový, že*

$$f(x + h) - f(x) = d_G f(y)(h).$$

D ů k a z. Plyne z předchozí věty a definice Gâteauxovy derivace. \square

Věta 2.18 (o střední hodnotě pro zobrazení). *Nechť množina $U \subset \mathbb{R}^n$ obsahuje úsečku $[x, x + h]$ a zobrazení $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ má v každém bodě této úsečky derivaci podle vektoru h . Pak platí*

$$\|f(x + h) - f(x)\| \leq \sup_{y \in [x, x+h]} \left\| \frac{\partial f}{\partial h}(y) \right\|.$$

D ů k a z. Podobně jako v důkazu věty 2.16 uvažujeme zobrazení $f \circ g_{x,h}$. Toto zobrazení je diferencovatelné v každém bodě intervalu $[0, 1]$. Nechť $l: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ je lineární zobrazení takové, že $\|l\| = 1$ a $l(f(x + h) - f(x)) = \|f(x + h) - f(x)\|$ (takové zobrazení vždy existuje podle Hahn-Banachovy věty z funkcionální analýzy, není ovšem těžké dokázat ji pro jednoduchý případ $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$). Zobrazení $l \circ f \circ g_{x,h}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je diferencovatelné na celém intervalu $[0, 1]$ a můžeme na ně použít Lagrangeovu větu o střední hodnotě z prvního ročníku. Dostáváme

$$l \circ f \circ g_{x,h}(1) - l \circ f \circ g_{x,h}(0) = (l \circ f \circ g_{x,h})'(t_0),$$

pro nějaké $t_0 \in (0, 1)$. Pro levou stranu ovšem platí

$$l \circ f \circ g_{x,h}(1) - l \circ f \circ g_{x,h}(0) = l(f(x + h) - f(x)) = \|f(x + h) - f(x)\|$$

a pro pravou

$$\begin{aligned}
 (l \circ f \circ g_{x,h})'(t_0) &= (l \circ f \circ g_{x+ht_0,h})'(0) \leq \\
 &\leq |d(l \circ f \circ g_{x+ht_0,h})(0)(1)| \leq \\
 &\leq \|l\| \cdot \|d(f \circ g_{x+ht_0,h})(0)(1)\| = \\
 &= \|d_h f(x + ht_0)\| \leq \\
 &\leq \sup_{y \in [x, x+h]} \|d_h f(y)\|.
 \end{aligned}$$

□

Důsledek 2.19. *Nechť množina $U \subset \mathbb{R}^n$ obsahuje úsečku $[x, x + h]$ a zobrazení $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ má v každém bodě této úsečky Gâteauxovu derivaci. Potom*

$$\|f(x + h) - f(x)\| \leq \sup_{y \in [x, x+h]} \|d_G f(y)\| \cdot \|h\|.$$

D ů k a z. Plyne z věty 2.18, definice Gâteauxovy derivace a věty 1.23. □

Komentář!!!!!!

Příklad Uvažujme zobrazení $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ definované předpisem

$$f(t) = (\cos t, \sin t)$$

a položíme $x = 0, h = 2\pi$. Platí $f(x + h) - f(x) = (0, 0)$. Přitom ale neexistuje bod $y \in [0, 2\pi]$, ve kterém by bylo $\frac{\partial f}{\partial h}(y) = (0, 0)$.

2.5. Spojitá diferencovatelnost. Předpokládejme, že zobrazení $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ má Gâteauxovu derivaci v každém bodě nějakého okolí $V \subset U$. Dostáváme zobrazení $d_G: V \rightarrow L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$, přiřazující každému bodu z V Gâteauxovu derivaci zobrazení f v tomto bodě (tedy $d_G f(x)$).

Zvolme nyní bod $x \in U$. Řekneme, že zobrazení f je v bodě x *spojitě diferencovatelné*, je-li zobrazení $d_G f$ definováno na nějakém jeho okolí a je-li v tomto bodě spojitě.

Víme, že prostor $L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ je izomorfní s vektorovým prostorem matic typu $n \times m$. Podle věty 1.21 o spojitosti zobrazení $d_G f$ nerozhoduje, jakou normu na prostoru $L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ zvolíme. Můžeme tedy usoudit, že zobrazení $d_G f$ je spojitě, právě když je spojitě zobrazení f' . O spojitosti tohoto zobrazení se přitom rozhoduje poměrně snadno.

Věta 2.20. *Zobrazení spojitě diferencovatelné v bodě x je v tomto bodě diferencovatelné.*

Věta vypadá na první pohled podezřele triviální, uvědomme si, že v definici spojitě diferencovatelnosti požadujeme existenci Gâteauxovy derivace a její spojitou závislost. Ve tvrzení věty jde ovšem o Fréchetovu derivaci.

D ů k a z. Nechť $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ je zobrazení, spojitě diferencovatelné v bodě $x \in U$. Zobrazení d_G je tedy definováno v každém bodě nějakého okolí V bodu x . Označme $d_G f(y) = l_y$ pro $y \in V$. Platí

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|l_{x+h} - l_x\| = 0.$$

Aplikujeme-li důsledek 2.19 věty o střední hodnotě pro zobrazení na zobrazení $f - l_x$, dostaneme

$$\|f(x + h) - f(x) - l_x(h)\| \leq \sup_{y \in [x, x+h]} \|l_y - l_x\| \cdot \|h\|.$$

Máme tedy

$$\frac{\|f(x+h) - f(x) - l_x(h)\|}{\|h\|} \leq \sup_{y \in [x, x+h]} \|l_y - l_x\|$$

příčemž limita pravé strany pro $h \rightarrow 0$ je rovna nule. \square

Věta 2.21. *Nechť zobrazení $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ a $g: V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ jsou spojitě diferencovatelná v každém bodě svých definičních oborů. Pak zobrazení $g \circ f$ je spojitě diferencovatelné v každém bodě množiny U .*

D ů k a z. Necháme čtenáři. \square

Lemma 2.22. *Předpokládejme, že zobrazení $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ má derivace podle vektorů h, k , v každém bodě množiny U a zobrazení $d_h f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ je spojitě v bodě $x \in U$. Pak pro každé $a, b \in \mathbb{R}$ existuje derivace $d_{ah+bk} f(x)$ a platí*

$$d_{ah+bk} f(x) = a d_h f(x) + b d_k f(x).$$

D ů k a z. Chceme dokázat, že

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + tah + tbk) - f(x)}{t} = a d_h f(x) + b d_k f(x) = d_{ah}(x) + d_{bk}(x).$$

Na pravé straně dostáváme

$$d_{ah}(x) + d_{bk}(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + tah) - f(x)}{t} + \frac{f(x + tbk) - f(x)}{t}.$$

Na levé straně

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + tah + tbk) - f(x)}{t} &= \quad \quad \quad (\text{trik}) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + tah + tbk) - f(x + tbk) + f(x + tbk) - f(x)}{t}. \end{aligned}$$

Stačí dokázat, že

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + tah + tbk) - f(x + tbk)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + tah) - f(x)}{t}$$

Označme

$$g(x) = \frac{f(x + tbk) - f(x)}{t}.$$

Ukážeme, že

$$g(x + tah) - g(x) = \frac{f(x + tah + tbk) - f(x + tah)}{t} - \frac{f(x + tbk) - f(x)}{t}.$$

jde k nule pro $t \rightarrow 0$. Podle věty 2.18 platí

$$\|g(x + tah) - g(x)\| \leq \sup_{y \in [x, x+tah]} \|d_{tah} g(y)\|. \quad (2.5.1)$$

Ale

$$d_{tah} g(y) = a(d_h f(y + tbk) - d_h f(y)),$$

což podle předpokladu o spojitosti zobrazení $d_h f$ znamená, že limita levé strany (2.5.1) pro $t \rightarrow 0$ je rovna nule. Tím je lemma dokázáno. \square

Věta 2.23. *Nechť pro zobrazení $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ existují všechny funkce $\partial_{x_j} f_i: U \rightarrow \mathbb{R}$, kde $i \in \{1, \dots, m\}$, $j \in \{1, \dots, n\}$, a jsou na množině U spojité. Pak zobrazení f je spojitě diferencovatelné v každém bodě množiny U .*

D ů k a z. Podle předchozího lemmatu má zobrazení f Gâteauxovu derivaci v každém bodě množiny U (proč?). Tvrzení tedy plyne z předpokladu o spojitosti parciálních derivací. \square

Důsledek: Spojité parc. derivace \Rightarrow diferencovatelnost a matice parciálních derivací.

DOPLŇKY

Definice Fréchetovy derivace je nezávislá na volbě norem.

Gradient

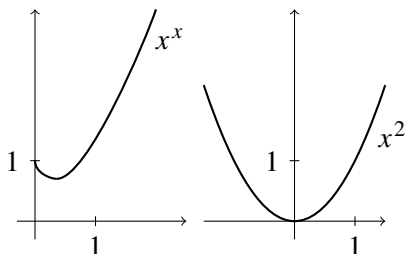
3. Inverzní a implicitní zobrazení

V této kapitole uvádíme dvě důležité věty, které nacházejí aplikace v mnoha oblastech matematiky: Větu o inverzním a větu o implicitním zobrazení.

3.1. Inverzní zobrazení. V tomto odstavci formulujeme větu o inverzním zobrazení na prostoru \mathbb{R}^n .

Nejprve se však vraťme k situaci funkce na \mathbb{R} . Pokud spojitá funkce $f: U \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je monotonní na intervalu I pak zúžení $f: I \rightarrow f(I)$ je homeomorfismus, tedy existuje inverze f^{-1} .

Příklad. Funkce $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^x$ je rostoucí na každém $[a, b] \subset [1, \infty)$ a má zde inverzi, ačkoli analytické řešení rovnice $y = x^x$ neznáme.



Situace se komplikuje v případě, že f není monotonní na celém definičním oboru, pak by přirozeným postupem bylo nalézt intervaly monotonnosti a na nich by pak existovaly inverze.

Příklad. Uvažujme $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, na intervalech $(-\infty, 0]$ a $[0, \infty)$ je f monotonní a existují na nich její inverze konkrétně \sqrt{x} a $-\sqrt{x}$. Na druhou stranu neexistuje okolí bodu 0 na kterém by x^2 měla inverzi.

Zamysleme se ještě nad situací v předchozím příkladě, existence intervalu monotonnosti plyne z faktu, že se na něm znaménko derivace nemění. Pokud je funkce spojitě diferencovatelná, pak pouhý fakt, že je tato derivace nenulová, zaručuje existenci intervalu o stejném znaménku derivace a tedy monotonnost.

To nás přivádí k tvrzení o inverzním zobrazení pro funkce z \mathbb{R} do \mathbb{R} , které je jen jednoduchým důsledkem tvrzení z prvního ročníku.

Věta 3.1. *Nechť $f: U \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitě diferencovatelná v x_0 a $f'(x_0) \neq 0$, potom existuje okolí I bodu x_0 , okolí J bodu $y_0 = f(x_0)$ a funkce $f^{-1}: J \rightarrow I$, která je inverzí ke zúžení f na I a platí*

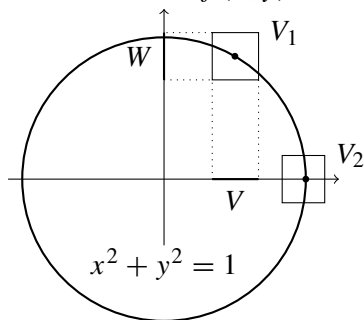
$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

V odstavci 3.3 dokážeme obecnější tvrzení pro zobrazení mezi prostory \mathbb{R}^n .

3.2. Věta o implicitní funkci. Uvažujme rovnici ve tvaru $f(x, y) = 0$, kde f je daná funkce $f: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. často nás zajímá, pro která (x, y) je rovnice splněna. Označme M množinu takových řešení, tedy $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = 0\}$.

Nyní si položíme otázku, zda lze množinu M popsat pomocí rovnice $y = g(x)$, pro nějakou funkci $g: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Příklad. Pokud $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$, pak množinou M je kružnice se středem v počátku a poloměrem 1. Tuto množinu nelze popsat jednou rovnicí ve tvaru $y = g(x)$ (lze snadno vidět, že pokud je $x = 0$, musela by g mít dvě hodnoty ± 1).



Obdobně lze snadno najít příklad rovnice $f(x, y) = 0$ s prázdnou množinou řešení, či případ kdy M bude mít neprázdný vnitřek. To nás přivádí na problém, kdy lze popsat množinu M alespoň lokálně.

Takže zda kolem každého bodu množiny M existuje jeho okolí V , jehož průnik s množinou $V \cap M$ je popsateľný jako $y = g(x)$, tedy zda $V \cap M$ je grafem funkce g .

V případech na obrázku vidíme, že V_1 je okolí, které po průniku s M je grafem nějaké funkce g (bude se zřejmě jednat o zúžení funkce $\sqrt{1-x^2}$ na nějaký interval). Na druhou stranu i kdybychom okolí V_2 kolem $(1, 0)$ zmenšovali nebude $V_2 \cap M$ grafem žádné funkce (ta by musela mít nalevo od 1 dvě hodnoty zatímco napravo žádnou).

Funkce g v předchozích odstavcích se nazývá *implicitně definovaná funkcí* f .

Odpověď kdy existuje implicitně definovaná funkce na okolí bodu množiny M dává následující věta.

Věta 3.2 (věta o implicitní funkci $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$). *Nechť $f: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá, spojitě diferencovatelná v (x_0, y_0) . Uvažujme množinu $M = \{(x, y) \in U \mid f(x, y) = 0\}$. Jestliže $\partial_y f(x_0, y_0) \neq 0$, potom existují okolí V bodu x_0 , W bodu y_0 a zobrazení $g: V \rightarrow W$ tak, že $M \cap (V \times W)$ je rovno grafu zobrazení g .*

Navíc zobrazení g je v x_0 diferencovatelné a platí

$$g'(x_0) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)}. \quad (3.2.1)$$

Na konci této kapitoly dokážeme obecnější tvrzení.

Příklad. Uvažujme opět množinu M danou body, pro které je funkce $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ rovna 0. Ukážeme, že existuje okolí bodu $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$, na kterém rovnice $f(x, y) = 0$ implicitně definuje y jako funkci x a určíme derivaci jejího vyjádření. (Víme, že toto vyjádření je $y = \sqrt{1-x^2}$ a derivace je -1 , ale použijeme právě uvedené věty o implicitní funkci.)

Derivace $\partial_y f(x, y) = 2y$, to je různé od nuly v bodě $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$, proto můžeme použít větu 3.2. Dostáváme, že existuje okolí bodu $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ na němž lze y vyjádřit jako funkci x , jestliže si tuto funkci označíme g je derivace $g'(\sqrt{2}/2)$ rovna

$$g'(\sqrt{2}/2) = -\frac{\partial_x f(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)}{\partial_y f(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)} = \frac{2x}{2y} \Big|_{(x,y)=(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)} = -1.$$

Druhá derivace g !!!!

Pokud víme, že existuje implicitně definovaná funkce g , jako tomu je v předchozím příkladě, na jistém okolí x_0 platí rovnice

$$f(x, g(x)) = 0.$$

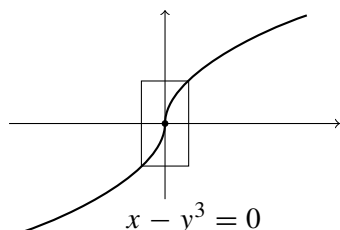
Derivací této konstantní funkce (jde o složenou funkci, vnitřní funkce je $x \mapsto (x, g(x))$), dostáváme

$$0 = (f(x, g(x)))' = \frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x)) \cdot 1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x)) \cdot g'(x).$$

Odtud lze mimochodem obdržet vzorec (3.2.1). My však může zderivovat funkci podruhé a získáme vzorec pro $g''(x)$.

$$0 = (f(x, g(x)))'' =!!!!$$

Věta 3.2 v žádném případě neříká, že v bodech, kde je $\partial_y f(x, y)$ rovno nule, vyjádření y jako funkce x neexistuje. V předchozím příkladě tomu tak sice bylo, ovšem obecně tomu tak být nemusí. Může existovat rovnice $f(x, y) = 0$ na okolí bodu s $\partial_y f(0, 0) = 0$ na kterém lze vyjádřit y jako funkci x . Viz obrázek.



Z rovnice

$$x - y^3 = 0$$

lze vyjádřit y , vždyť

$$y = \sqrt[3]{x}.$$

Ačkoliv bylo $\partial_y f(0, 0) = 3y^2|_{y=0} = 0$.

Věta 3.3 (věta o implicitní funkci $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$). *Nechť $f: U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá, spojitě diferencovatelná v (x_0, y_0, z_0) . Uvažujme množinu $M = \{(x, y, z) \in U \mid f(x, y, z) = 0\}$. Jestliže $\partial_z f(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, potom existují okolí V bodu (x_0, y_0) , W bodu z_0 a zobrazení $g: V \rightarrow W$ tak, že $M \cap (V \times W)$ je rovno grafu zobrazení g . Navíc zobrazení g je v (x_0, y_0) diferencovatelné a platí*

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)}{\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)}, \tag{3.2.2}$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)}{\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)}. \tag{3.2.3}$$

Příklad!!!!

DOPLŇKY

3.3. Obecná věta o inverzním zobrazení.

Věta 3.4 (o inverzním zobrazení). *Nechť $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ je spojitě zobrazení, spojitě diferencovatelné v bodě $x_0 \in U$. Jestliže lineární zobrazení $df(x_0)$ je izomorfismus, pak existuje okolí V bodu x_0 tak, že množina $W = f(V)$ je okolí bodu $y_0 = f(x_0)$ a zúžení $f: V \rightarrow W$ je homeomorfismus. Inverzní zobrazení $f^{-1}: W \rightarrow V$ je diferencovatelné v bodě y_0 . Platí*

$$df^{-1}(y_0) = (df(x_0))^{-1}. \tag{3.3.1}$$

Lemma 3.5. *Nechť $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ je spojitě zobrazení, spojitě diferencovatelné v bodě $x_0 \in U$ a takové, že $df(x_0) = \text{id}_{\mathbb{R}^n}$. Pak existuje okolí V bodu x_0 tak, že množina $W = f(V)$ je okolí bodu $y_0 = f(x_0)$ a zúžení $f: V \rightarrow W$ je homeomorfismus.*

Důkaz. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že zobrazení f má Gâteauxovu derivaci v každém bodě množiny U . Položme $g = f - \text{id}_{\mathbb{R}^n}$ (čili $g(x) = f(x) - x$ pro každé $x \in U$). Máme

$$dg(x_0) = df(x_0) - d\text{id}_{\mathbb{R}^n}(x_0) = 0$$

(viz věty 2.10 a 2.7). Máme tedy

$$\|dg(x_0)\| = 0$$

Podle předpokladu je zobrazení f spojitě diferencovatelné v bodě x_0 . Zobrazení g je tedy rovněž spojitě diferencovatelné v bodě x_0 , což znamená, že zobrazení $d_G g: U \rightarrow L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ je spojitě v bodě x_0 . Existuje tedy uzavřená koule B se středem v bodě x_0 taková, že pro všechny její prvky x platí

$$\|d_G g(x)\| \leq \frac{1}{2}, \quad \det f'(x) \neq 0. \quad (3.3.2)$$

Zvolme nyní dva libovolné body $x_1, x_2 \in B$. Podle důsledku 2.19 věty o střední hodnotě 2.18 je

$$\|g(x_2) - g(x_1)\| \leq \sup_{y \in [x_1, x_2]} \|d_G g(y)\| \cdot \|x_2 - x_1\|$$

což společně s (3.3.2) dává

$$\|g(x_2) - g(x_1)\| \leq \frac{1}{2} \|x_2 - x_1\|$$

Máme tedy

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|x_2 - x_1\| &\geq \|g(x_2) - g(x_1)\| = \|f(x_2) - x_2 - f(x_1) + x_1\| = \\ &= \|(x_1 - x_2) - (f(x_2) - f(x_1))\| \geq \|x_2 - x_1\| - \|(f(x_2) - f(x_1))\|, \end{aligned}$$

neboli

$$2\|f(x_2) - f(x_1)\| \geq \|x_2 - x_1\|, \quad (3.3.3)$$

což dokazuje, že zobrazení f je na množině B injektivní.

Uvažme nyní množinu $f(\text{fr } B)$. Tato množina je kompaktní (množina $\text{fr } B$ je kompaktní a zobrazení f spojitě) a neobsahuje bod y_0 (zobrazení f je na kouli B prosté a $x_0 \notin \text{fr } B$). Existuje tedy číslo $d > 0$ takové, že pro každý prvek $y \in f(\text{fr } B)$ platí

$$\|y - y_0\| \geq d. \quad (3.3.4)$$

Položme

$$W = B_{d/2}(y_0) \quad (3.3.5)$$

a dokažme, že $W \subset f(\text{int } B)$.

Nechť $y_1 \in W$ je libovolný bod. Definujme funkci $h: B \rightarrow \mathbb{R}$ předpisem

$$h(x) = \|f(x) - y_1\|^2 = \sum_{i=1}^n (f^i(x) - (y_1)_i)^2$$

Tato funkce je spojitá a v každém bodě uvnitř množiny B má Gâteauxovu derivaci. Ze spojitosti této funkce a z kompaktnosti množiny B plyne, že existuje bod x_1 , ve kterém funkce h má minimum. Bod x_1 leží určitě uvnitř množiny B : kdyby totiž ležel na její hranici, bylo by $\|f(x_1 - y_1)\| \geq d$ (to plyne z (3.3.4)) a $\|f(x_0) - y_1\| < d/2$ (viz (3.3.5)), což by znamenalo, že $h(x_0) < h(x_1)$ a v x_1 funkce h nemá minimum. A jelikož $x_1 \in \text{int } B$ a funkce h má v x_1 minimum, musí v tomto bodě mít všechny parciální derivace nulové:¹⁾ $\partial_i h(x_1) = 0$ pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$. Jelikož

$$\partial_j h(x_1) = \sum_{i=1}^n 2(f^i(x_1) - (y_1)_i) \partial_j f^i(x_1) = 0$$

a $\det f'(x_1) \neq 0$ (3.3.2), dostáváme, že $f(x_1) = y_1$.

Položme $V = f^{-1}(W) \cap \text{int } B$. Právě jsme ukázali, že zúžení $f: V \rightarrow W$ je bijekce. Zbývá tedy dokázat, že zobrazení $f^{-1}: W \rightarrow V$ je spojitý. To ovšem snadno plyne ze vztahu

$$\|f^{-1}(y_2) - f^{-1}(y_1)\| \leq 2\|y_2 - y_1\|,$$

který pro libovolné y_1, y_2 plyne z (3.3.3).

Tím je lemma dokázáno. \square

Lemma 3.6. *Nechť $f: V \rightarrow W$ je bijekce mezi otevřenými množinami v \mathbb{R}^n , diferencovatelná v bodě $x_0 \in V$ a taková, že $df(x_0) = \text{id}_{\mathbb{R}^n}$. Dále předpokládejme, že zobrazení f^{-1} je spojitý v bodě $y_0 = f(x_0)$. Pak zobrazení f^{-1} je diferencovatelné v bodě y_0 a platí*

$$df^{-1}(y_0) = \text{id}_{\mathbb{R}^n}.$$

D ů k a z. Pro libovolný bod $y \in W$, $y = f(x)$, máme

$$\begin{aligned} \|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0) - \text{id}_{\mathbb{R}^n}(y - y_0)\| &= \|x - x_0 - f(x) + f(x_0)\| = \\ &= \|f(x) - f(x_0) - \text{id}_{\mathbb{R}^n}(x - x_0)\| = \|x - x_0\| \cdot \varepsilon(x - x_0), \end{aligned}$$

kde $\lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x - x_0) = 0$ (viz větu 2.2 (o diferenciálu)). Dále,

$$\begin{aligned} \|x - x_0\| \cdot \varepsilon(x - x_0) &= \|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)\| \cdot \varepsilon(f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)) = \\ &= \|y - y_0\| \cdot \frac{\|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)\|}{\|y - y_0\|} \cdot \varepsilon(f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)). \end{aligned}$$

Jelikož $\lim_{y \rightarrow y_0} \varepsilon(f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)) = 0$ (zobrazení f^{-1} je spojitý v y_0), stačí ukázat, že výraz $\|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)\|/\|y - y_0\|$ je na nějakém okolí bodu y_0 ohraničený. Tvrzení pak bude vyplývat z věty 2.2 (o diferenciálu).

Nechť V_0 je okolí bodu x_0 takové, že pro každé $x \in V_0$ platí

$$\frac{\|f(x) - f(x_0) - x + x_0\|}{\|x - x_0\|} < \frac{1}{2} \quad (\text{diferencovatelnost } f \text{ s } df(x_0) = \text{id})$$

Pak

$$\frac{1}{2} > \frac{\|f(x) - f(x_0) - x + x_0\|}{\|x - x_0\|} \geq \frac{\|x - x_0\|}{\|x - x_0\|} - \frac{\|f(x) - f(x_0)\|}{\|x - x_0\|} = 1 - \frac{\|f(x) - f(x_0)\|}{\|x - x_0\|}$$

neboli

¹⁾Toto tvrzení je vcelku zřejmé; dokážeme je však až v kapitole 5

$$\frac{\|f(x) - f(x_0)\|}{\|x - x_0\|} > \frac{1}{2}.$$

Označme W_0 okolí bodu y_0 , pro jehož všechny prvky y platí $f^{-1}(y) \in V_0$. Pro libovolný prvek $y \in W$ a $x = f^{-1}(y)$ pak máme

$$\frac{\|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)\|}{\|y - y_0\|} = \frac{\|x - x_0\|}{\|f(x) - f(x_0)\|} < 2.$$

Tím je lemma dokázáno. \square

Nyní dokážeme dvě lemmata podobná lemmatům 3.5 a 3.6, avšak s oslabeným předpokladem o derivaci zobrazení f .

Lemma 3.7. *Nechť $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ je spojitě zobrazení, spojitě diferencovatelné v bodě $x_0 \in U$. Jestliže lineární zobrazení $df(x_0)$ je izomorfismus, pak existuje okolí V bodu x_0 tak, že množina $W = f(V)$ je okolím bodu $y_0 = f(x_0)$ a zúžení $f: V \rightarrow W$ je homeomorfismus.*

D ů k a z. Označme $l = df(x_0)$, $y_0 = f(x_0)$ a položme $\bar{f} = l^{-1} \circ f$. Máme

$$d\bar{f}(x_0) = d(l^{-1} \circ f)(x_0) = dl^{-1}(y_0) \circ df(x_0) = l^{-1} \circ l = \text{id}_{\mathbb{R}^n}.$$

Na zobrazení \bar{f} tedy lze aplikovat lemma 3.5. Platí $f^{-1} = l \circ \bar{f}$. \square

Lemma 3.8. *Nechť $f: V \rightarrow W$ je bijekce mezi otevřenými množinami v \mathbb{R}^n , diferencovatelná v bodě $x_0 \in V$ a taková, že $df(x_0)$ je izomorfismus. Dále předpokládejme, že zobrazení f^{-1} je spojitě v bodě $y_0 = f(x_0)$. Pak zobrazení f^{-1} je diferencovatelné v bodě y_0 a platí*

$$df^{-1}(y_0) = (df(x_0))^{-1}.$$

D ů k a z. Stejně jako v důkazu předchozího lemmatu označme $l = df(x_0)$ a položme $\bar{f} = l^{-1} \circ f$. Máme $d\bar{f}(x_0)$ a podle lemmatu 3.7 $d\bar{f}^{-1}(y_0) = \text{id}_{\mathbb{R}^n}$. Nyní $f^{-1} = \bar{f}^{-1} \circ l^{-1}$ a

$$df^{-1}(y_0) = d(\bar{f}^{-1} \circ l^{-1})(y_0) = d\bar{f}^{-1}(x_0) \circ dl^{-1}(y_0) = \text{id}_{\mathbb{R}^n} \circ l^{-1} = l^{-1}.$$

Tím je lemma dokázáno. \square

D ů k a z. (věty 3.4) Plyne z předchozích lemmat. \square

Tvrzení o derivaci inverzního zobrazení (vztah (3.3.1)) lze také dokázat přímo, pomocí věty 2.5 o derivaci složeného zobrazení. Platí totiž

$$\text{id}_{\mathbb{R}^n} = d \text{id}_{\mathbb{R}^n}(x_0) = d(f^{-1} \circ f)(x_0) = df^{-1}(y_0) \circ df(x_0).$$

Odtud už vztah (3.3.1) plyne.

Za poznámku jistě také stojí, že dimenze definičního oboru a oboru hodnot zobrazení f ve větě 3.4 musí být stejné; jinak by totiž nemohl platit vztah (3.3.1) (to víme z lineární algebry). Tento závěr lze dalekosáhle zobecnit: snadno lze například ukázat, že žádná spojitě diferencovatelná funkce $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ není bijekce (pokud je $\partial_1 f(x, y) \neq 0$ pro každé (x, y) z nějaké otevřené množiny V , pak stačí uvážit zobrazení $g(x, y) = (f(x, y), y)$).

Předpokládáme-li ve větě o inverzním zobrazení navíc, že zobrazení f je na množině U diferencovatelné, lze okolí V a W nalézt tak, aby inverzní zobrazení f^{-1} bylo diferencovatelné na okolí W a spojitě diferencovatelné v bodě y_0 . Pokuste se to dokázat.

3.4. Obecná věta o implicitním zobrazení. Mějme zobrazení $f: U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, diferencovatelné v bodě $(x_0, y_0) \in U$ a označme $l_1: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ a $l_2: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ lineární zobrazení, definovaná předpisy

$$\begin{aligned} l_1(h_1) &= df(x_0, y_0)(h_1, 0), \\ l_2(h_2) &= df(x_0, y_0)(0, h_2). \end{aligned} \quad (3.4.1)$$

Evidentně platí

$$df(x_0, y_0) = l_1 + l_2.$$

Zobrazením l_1 a l_2 se někdy říká *parciální derivace zobrazení f v bodě (x_0, y_0)* (zobecněného typu). Přestože my jsme si tento termín vyhradili pro jiný objekt, vidíme, že s ním velmi úzce souvisí.

Věta 3.9 (o implicitním zobrazení). *Nechť $f: U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ je spojitě zobrazení, spojitě diferencovatelné v bodě $(x_0, y_0) \in U$ takovém, že $f(x_0, y_0) = 0$. Uvažme lineární zobrazení l_1 a l_2 z (3.4.1) a množinu $M = \{(x, y) \in U \mid f(x, y) = 0\}$. Jestliže zobrazení l_2 je izomorfismus, pak existují okolí V_1 bodu x_0 , okolí V_2 bodu y_0 a zobrazení $g: V_1 \rightarrow V_2$ tak, že množina $M \cap (V_1 \times V_2)$ je rovna grafu zobrazení g .*

Zobrazení g je v bodě x_0 diferencovatelné a platí

$$dg(x_0) = -l_2^{-1} \circ l_1. \quad (3.4.2)$$

Důkaz. Uvažme zobrazení $F: U \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, $F(x, y) = (x, f(x, y))$. Toto zobrazení je spojitě na U a spojitě diferencovatelné v bodě (x_0, y_0) . Pro lineární zobrazení $dF(x_0, y_0)$ a libovolný vektor (h_1, h_2) platí

$$dF(x_0, y_0)(h_1, h_2) = (h_1, df(x_0, y_0)(h_1, h_2)) = (h_1, l_1(h_1) + l_2(h_2)),$$

Toto zobrazení je tedy izomorfismus: inverzní zobrazení je totiž dáno předpisem

$$(dF(x_0, y_0))^{-1}(u_1, u_2) = (u_1, l_2^{-1}(u_2 - l_1(u_1))) \quad (3.4.3)$$

Podle věty 3.4 tedy existují okolí V bodu (x_0, y_0) , okolí W bodu $(x_0, 0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ a inverzní zobrazení $F^{-1}: W \rightarrow V$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že množina V je rovna součinu dvou otevřených množin: $V = V_1 \times V_2$.

Nyní pro $x \in V_1$ položíme

$$g(x) = \text{pr}_2(F^{-1}(x, 0)). \quad (3.4.4)$$

Nyní dokážeme, že zobrazení g má požadované vlastnosti. Nechť $(x_0, y_0) \in M \cap (V_1 \times V_2)$. Máme $f(x, y) = 0$, neboli $F(x, y) = (x, 0)$, což znamená, že

$$g(x) = \text{pr}_2(F^{-1}(x, 0)) = \text{pr}_2(x, y) = y.$$

Naopak, pro libovolné $x \in V$ máme

$$(x, f(x, g(x))) = F(x, g(x)) = F(x, \text{pr}_2(x, 0)).$$

Přitom $\text{pr}_1(F^{-1}(x, 0)) = x$, což znamená

$$(x, f(x, g(x))) = F(F^{-1}(x, 0)) = (x, 0)$$

a celkově

$$f(x, g(x)) = 0.$$

Zbývá tedy dokázat vztah (3.4.2). Podle (3.4.3) a (3.4.4) máme

$$dg(x_0)(u_1) = \text{pr}_2(dF^{-1}(x_0, 0)(u_1, 0)) = \text{pr}_2(u_1, -l_2^{-1} \circ l_1(u_1)) = -l_2^{-1} \circ l_1(u_1).$$

Tím je celé tvrzení dokázáno. \square

O zobrazení g z předchozí věty se někdy říká, že je *implicitně definováno* zobrazením f .

Podobně jako u věty o inverzním zobrazení, vztah (3.4.2) můžeme dokázat přímo, pomocí vztahu (3.4.1): Víme, že pro každé $x \in V_1$ platí

$$f(x, g(x)) = 0$$

Derivací této rovnice v bodě x_0 dostaneme

$$0 = df(x_0, y_0) \circ d(\text{id}(x), g(x))|_{x_0} = l_1 + l_2 \circ dg(x_0) = 0$$

což je ekvivalentní s (3.4.2). Tento způsob odvozování derivace implicitního zobrazení se často používá při praktických výpočtech.

Větu o implicitním zobrazení jsme vlastně dokázali jako poměrně jednoduchý důsledek věty o inverzním zobrazení. Kdybychom ji dokázali bez použití této věty, mohli bychom pak naopak větu o inverzním zobrazení dokázat pomocí věty o implicitním zobrazení, a to pomocí vztahu

$$f(f^{-1}(x)) - x = 0.$$

Můžete se o to pokusit.

4. Derivace vyšších řádů

4.1. Bilineární a kvadratická zobrazení. Připomeňme si, že zobrazení $l: X_1 \times X_2 \rightarrow Y$, kde X_1, X_2 a Y jsou vektorové prostory, se nazývá bilineární, jsou-li pro každé $x_1 \in X_1, x_2 \in X_2$ zobrazení

$$\begin{aligned} X_1 &\rightarrow Y, x \mapsto l(x, x_2), \\ X_2 &\rightarrow Y, x \mapsto l(x_2, x), \end{aligned}$$

lineární. Vektorový prostor všech bilineárních zobrazení $l: X_1 \times X_2 \rightarrow Y$ označujeme symbolem $L(X_1 \times X_2; Y)$.

Libovolnému lineárnímu zobrazení $l \in L(X_1; L(X_2; Y))$ lze předpisem

$$\bar{l}(x_1, x_2) = l(x_1)(x_2)$$

přiřadit bilineární zobrazení $\bar{l} \in L(X_1 \times X_2; Y)$. Přiřazení $l \rightarrow \bar{l}$ je evidentně bijektivní.

Dokažte to.

Přesvědčte se o tom, že zobrazení \bar{l} je skutečně bilineární!

Příklad Pro libovolné číslo x_1 definujme lineární zobrazení $l(x_1)$ předpisem

$$l(x_1)(x) = 2x_1x.$$

Zobrazení l je zjevně lineární. Příslušné zobrazení $\bar{l}: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je dáno předpisem

$$\bar{l}(x_1, x_2) = 2x_1x_2. \tag{4.1.1}$$

Bilineární zobrazení $l \in L(X \times X; Y)$ se nazývá *symetrické*, jestliže pro libovolné dva vektory $x_1, x_2 \in X$ platí

$$l(x_1, x_2) = l(x_2, x_1).$$

Bilineární zobrazení l z (4.1.1) je symetrické.

Každé bilineární zobrazení z $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ do \mathbb{R} je symetrické (lze dokázat pomocí vyjádření vektorů z \mathbb{R} v bázi).

Symetrická a *antisymetrická* část bilineárního zobrazení $l \in L(X \times X; Y)$ jsou bilineární zobrazení $\text{sym } l$ a $\text{alt } l$, definovaná předpisy

$$\begin{aligned} \text{sym } l(x_1, x_2) &= \frac{1}{2}(l(x_1, x_2) + l(x_2, x_1)), \\ \text{alt } l(x_1, x_2) &= \frac{1}{2}(l(x_1, x_2) - l(x_2, x_1)). \end{aligned} \tag{4.1.2}$$

Pro každé bilineární zobrazení l platí

$$\text{sym } l + \text{alt } l = l.$$

Zobrazení l je symetrické, právě když $\text{sym } l = l$, což je ekvivalentní podmínce $\text{alt } l = 0$.

Zobrazení $l: X \rightarrow Y$ se nazývá *kvadratické*, existuje-li bilineární zobrazení $p: X \times X \rightarrow Y$ takové, že pro každé $x \in X$ platí

$$l(x) = p(x, x). \quad (4.1.3)$$

Vektorový prostor všech kvadratických zobrazení $l: X \rightarrow Y$ označujeme $L_2(X; Y)$.

Zobrazení p , která splňují vztah (4.1.3) je více; pokud platí $\text{sym } p_1 = \text{sym } p_2$, pak samozřejmě pro každé x $p_1(x, x) = p_2(x, x)$. Důležité je, že platí také opačné tvrzení:

Lemma 4.1. *Jestliže pro bilineární zobrazení $p_1, p_2: X \times X \rightarrow Y$ a každé $x \in X$ platí $p_1(x, x) = p_2(x, x)$, pak $\text{sym } p_1 = \text{sym } p_2$.*

Důkaz. Pro libovolné $x_1, x_2 \in X$ máme

$$\begin{aligned} \text{sym } p_1(x_1, x_2) &= \frac{1}{2}(p_1(x_1, x_2) + p_1(x_2, x_1)) = \\ &= \frac{1}{2}(p_1(x_1, x_2) + p_1(x_1, x_1) + p_1(x_2, x_1) + p_1(x_2, x_2) - p_1(x_1, x_1) - p_1(x_2, x_2)) = \\ &= \frac{1}{2}(p_1(x_1 + x_2, x_1 + x_2) - p_1(x_1, x_1) - p_1(x_2, x_2)) = \\ &= \frac{1}{2}(p_2(x_1 + x_2, x_1 + x_2) - p_1(x_1, x_1) - p_1(x_2, x_2)) = \\ &= \text{sym } p_2(x_1, x_2). \quad \square \end{aligned}$$

Z uvedeného vyplývá

Věta 4.2. *K libovolnému kvadratickému zobrazení $l \in L_2(X; Y)$ existuje právě jedno symetrické bilineární zobrazení $p \in X \times X \rightarrow Y$, splňující (4.1.3).*

Zobrazení l a p z uvedené věty se nazývají *asociovaná*.

Symetrické bilineární zobrazení, asociované s daným kvadratickým zobrazením l lze vypočítat podle vztahu

$$p(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(l(x_1 + x_2) - l(x_1)l(x_2)).$$

Na prostoru $L(X; L(X; Y))$ je dána norma pomocí předpisu (1.7.1). Pro zobrazení p a l z (4.1.3) můžeme položit

$$\|l\| = \|p\|.$$

Dostaneme tak normu na vektorovém prostoru $L_2(X; Y)$.

Uvedená definice patří k oněm poněkud abstraktním a napoprvé těžko pochopitelným. Pro začátek jistě postačí, když si z ní odneseme poznatek, že jsme na prostoru $L_2(X; Y)$ definovali normu. Beztak jsou podle věty 1.21 všechny ekvivalentní a my se budeme zajímat pouze o topologii touto normou indukovanou. To také znamená, že jsme normu na $L_2(X; Y)$ mohli definovat jinak—indukovaná topologie vyjde stejně.

4.2. Derivace a diferenciál druhého řádu. Než přistoupíme k definici derivace druhého řádu, uvědomme si, že v definici Fréchetovy derivace v kapitole 2 jsme ze všech vlastností prostoru \mathbb{R}^n (a \mathbb{R}^m) využili pouze jeho strukturu normovaného prostoru. Téměř celý odstavec 2.1 tedy zůstane v platnosti, pokud v něm všude místo o \mathbb{R}^n a \mathbb{R}^m budeme hovořit o libovolných normovaných prostorech. Výjimku tvoří jen věta 2.8, která pojednává o složkách zobrazení.

Mějme zobrazení $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, diferencovatelné v každém bodě nějakého okolí V bodu $x \in U$. Zobrazení df je tedy definováno v každém bodě množiny V a jeho oborem hodnot je normovaný prostor $L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$. Fréchetova derivace $d(df)(x)$ tohoto zobrazení v bodě x (pokud existuje) je tedy lineární zobrazení z \mathbb{R}^n do prostoru $L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$. Příslušné bilineární zobrazení z $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ do \mathbb{R}^m označujeme symbolem $d^2f(x)$ a nazýváme *druhou (Fréchetovou) derivací zobrazení f v bodě x* .

Zobrazení, které má v bodě x druhou derivaci, se nazývá *dvakrát diferencovatelné v bodě x* .

Pro derivace podle vektoru a parciální derivace zavádíme tato označení:

$$d_h(d_k f)(x) = d_{h,k} f(x), \quad \partial_i(\partial_j f)(x) = \partial_{i,j} f(x).$$

Lemma 4.3. *Nechť zobrazení $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ má v bodě $x \in U$ druhou derivaci. Pak pro libovolný vektor $h \in \mathbb{R}^n$ je derivace zobrazení $d_h f$ v bodě x rovna lineárnímu zobrazení $\bar{h} \mapsto d^2 f(x)(\bar{h}, h)$.*

D ů k a z. Uvažme zobrazení $ev_h: L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m) \rightarrow \mathbb{R}^m$, $ev_h(l) = l(h)$. Platí

$$d_h f(x) = df(x)(h) = ev_h(df(x)),$$

neboli

$$d_h f = ev \circ df.$$

Zobrazení ev je lineární, je tedy diferencovatelné v libovolném bodě $l \in L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ a platí $d ev_h(l) = ev_h$. Zobrazení $d_h f$ je tedy (jako kompozice diferencovatelných zobrazení) diferencovatelné v bodě x . Dostáváme

$$\begin{aligned} d(d_h f(x)(\bar{h})) &= d(ev_h \circ df)(x)(\bar{h}) = \\ &= (ev_h \circ d(df)(x))(\bar{h}) = \quad \quad \quad (d ev_h = ev_h \text{ a derivace kompozice}) \\ &= ev_h(d(df)(x)(\bar{h})) = (d(df)(x)(\bar{h}))(h) = \\ &= d^2 f(x)(\bar{h}, h) \end{aligned}$$

□

Podívejme se podrobněji na zobrazení ev , použité v minulém důkazu. Tak například pro $n = 2$ a $m = 1$ je každé lineární zobrazení $l \in L(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$ dáno maticí typu 1×2 (l_1, l_2) tak, že pro každé $h \in \mathbb{R}^2$ platí

$$l(h) = l_1(h_1) + l_2(h_2).$$

Pokud tedy například $h = (2, 3)$, pak zobrazení ev_h je určeno předpisem

$$ev_h(l) = 2l_1 + 3l_2.$$

Nyní tedy snad již není divu, že se jedná o lineární (a tedy spojitě a diferencovatelné) zobrazení.

Jiný důkaz lemmatu 4.3 pomocí definice derivace lze provést takto:

$$\begin{aligned} \lim_{\bar{h} \rightarrow 0} \frac{d_h f(x + \bar{h}) - d_h f(x) - d^2 f(x)(\bar{h}, h)}{\|\bar{h}\|} &= \lim_{\bar{h} \rightarrow 0} \frac{df(x + \bar{h})(h) - d_h f(x)(h) - d(df)(x)(\bar{h})(h)}{\|\bar{h}\|} = \\ &= \lim_{\bar{h} \rightarrow 0} \frac{(df(x + \bar{h}) - d_h f(x) - d(df)(x)(\bar{h}))(h)}{\|\bar{h}\|} = \\ &= \lim_{\bar{h} \rightarrow 0} \frac{ev_h(df(x + \bar{h}) - d_h f(x) - d(df)(x)(\bar{h}))}{\|\bar{h}\|} = \\ &= ev \left(\lim_{\bar{h} \rightarrow 0} \frac{df(x + \bar{h}) - d_h f(x) - d(df)(x)(\bar{h})}{\|\bar{h}\|} \right) = ev_h(0) = 0. \end{aligned}$$

Lemma 4.4. *Nechť zobrazení $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ má v bodě $x \in U$ druhou derivaci. Pak pro libovolné dva vektory $h, k \in \mathbb{R}^n$ platí*

$$d_{h,k} f(x) = d^2 f(x)(k, h). \tag{4.2.1}$$

D ů k a z. Plyne přímo z lemmatu 4.3 □

Věnujme se nyní chvíli pojmu spojitě diferencovatelnosti druhého řádu. Budeme postupovat podobně, jako v kapitole 2. Uvažme zobrazení $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ a předpokládejme, že v okolí V bodu $x \in U$ existují derivace df a $d_G(df)$. Druhá ze zmíněných derivací je zobrazením z V do prostoru $L(\mathbb{R}^n; L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m))$, na kterém je podle (1.7.1) definovaná norma. Můžeme tedy uvažovat spojitost zobrazení $d_G f$ v bodě x : Je-li zobrazení $d_G(df)$ v bodě x spojitě, pak se o zobrazení f říká, že je v bodě x *dvakrát spojitě diferencovatelné*. O spojitě diferencovatelnosti druhého řádu platí následující věty, které jsou (včetně důkazů!) velmi podobné větám 2.20 a 2.23.

Věta 4.5. Zobrazení dvakrát spojitě diferencovatelné v bodě x je v tomto bodě dvakrát diferencovatelné.

Věta 4.6. Necht' pro zobrazení $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ existují všechny funkce $\partial_j f_i: U \rightarrow \mathbb{R}$ a $\partial_{j,k} f_i: U \rightarrow \mathbb{R}$, kde $i \in \{1, \dots, m\}$, $j, k \in \{1, \dots, n\}$, a jsou na množině U spojitě. Pak zobrazení f je dvakrát spojitě diferencovatelné v každém bodě množiny U .

Jestliže zobrazení je dvakrát spojitě diferencovatelné v každém bodě množiny U , říkáme také, že je třídy C^2 .

Posledním úkolem tohoto odstavce je ukázat Schwartzovu větu o symetrii druhé derivace. Důkaz této věty je v obecném případě poměrně složitý, vybereme si proto pouze speciální (ale základní a nejobvyklejší) případ pro dvakrát spojitě diferencovatelná zobrazení.

Lemma 4.7. Mějme zobrazení $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ a vektory h, k takové, že zobrazení $d_{h,k} f$ je definováno na množině U a spojitě v bodě $x \in U$. Pak platí

$$d_{h,k} f(x) = \frac{f(x + sh + sk) - f(x + sh) - f(x + sk) + f(x)}{s^2}.$$

Důkaz. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $n = 1$ a pro pevné $s \in \mathbb{R}$ definujme zobrazení g předpisem

$$g(x) = f(x + sk) - f(x).$$

Podle věty o střední hodnotě pro funkce nyní platí

$$\begin{aligned} f(x + sh + sk) - f(x + sh) - f(x + sk) + f(x) &= g(x + sh) - g(x) = \\ &= d_{sh} g(y) = d_{sh} f(y + sk) - d_{sh} f(y) = d_{sk} d_{sh} f(z) = s^2 d_{h,k} f(z), \end{aligned}$$

kde bod y leží na úsečce $[x, x + sh]$ a bod z na úsečce $[y, y + sk]$. Určitě tedy

$$\|y - x\| \leq \|sh + sk\| = |s| \|h + k\|,$$

což znamená, že $\lim_{s \rightarrow 0} z = x$ a $\lim_{s \rightarrow 0} d_{h,k} f(z) = d_{h,k} f(x)$.¹⁾ Tím je lemma dokázáno. \square

Věta 4.8 (Schwartzova o symetrii druhé derivace). Necht' zobrazení $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ je dvakrát spojitě diferencovatelné v bodě $x \in U$. Pak bilineární zobrazení $d^2 f(x)$ je symetrické.

Důkaz. Důkaz speciálního případu. Je-li zobrazení f v bodě x dvakrát spojitě diferencovatelné, pak můžeme použít předchozí lemma, z něhož plyne

$$d_{h,k} f(x) = d_{k,h} f(x).$$

Tvrzení tedy plyne z (4.2.1). \square

4.3. Multilineární a homogenní zobrazení. Pojmy bilineární a kvadratické zobrazení v tomto odstavci zobecníme pro případ vyššího než druhého řádu. Zobrazení $l: X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n \rightarrow Y$, kde X_1, X_2, \dots, X_n, Y jsou vektorové prostory nazýváme *multilineární zobrazení*, je-li zobrazení

$$X_i \rightarrow Y, x \mapsto l(x_1, \dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

lineární pro každou volbu $x_1 \in X_1, \dots, x_{i-1} \in X_{i-1}, x_{i+1} \in X_{i+1}, \dots, x_n \in X_n$.

K libovolnému lineárnímu zobrazení $l \in L(X_1; L(X_2; \dots; L(X_n; Y) \dots))$ předpisem

$$\bar{l}(x_1, \dots, x_n) = l(x_1)(x_2) \dots (x_n)$$

¹⁾V těchto limitách jsme poněkud nepřesní; necháme na čtenáři, aby si v nich udělal jasno sám (je třeba místo z psát jinou funkci proměnné s).

kanonicky přiřadit multilineární zobrazení $\bar{l} \in L(X_1 \times \dots \times X_n; Y)$.

Stejně jako v případě bilineárního zobrazení definujeme *symetrickou* a *antisymetrickou část* multilineárního zobrazení

$$\begin{aligned} \text{sym } l(x_1, \dots, x_n) &= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma} l(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}), \\ \text{alt } l(x_1, \dots, x_n) &= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma} \text{sgn } \sigma \cdot l(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}), \end{aligned} \tag{4.3.1}$$

kde σ probíhá permutace množiny $\{1, \dots, n\}$ a $\text{sgn } \sigma$ je znaménko permutace. Zobrazení je *symetrické*.

Příklady. 1) Skalární součin $g: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ je symetrické multilineární zobrazením. Neboť, jak víme z algebry, $g(ax, y) = ag(x, y)$, $g(x + y, z) = g(x, z) + g(y, z)$ a $g(x, y) = g(y, x)$. $\text{alt } g(x, y) = \frac{1}{2}(g(x, y) - g(y, x)) = \frac{1}{2}(g(x, y) - g(x, y)) = 0$.

2) Vektorový součin na \mathbb{R}^3 ,

$$(u, v) \rightarrow u \times v$$

je antisymetrické multilineární zobrazení $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$.

3) Determinant n -tice vektorů z \mathbb{R}^n

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto \det(x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} x_{1,1} & \dots & x_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n,1} & \dots & x_{n,n} \end{vmatrix}$$

je antisymetrické multilineární zobrazení $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Zobrazení $l: X \rightarrow Y$ se nazývá *homogenní řádu n* jestliže existuje multilineární zobrazení $p: X^n \rightarrow Y$ takové, že pro každé $x \in X$ platí

$$l(x) = p(x, \dots, x). \tag{4.3.2}$$

Stejně jako v případě kvadratického zobrazení, ke každému homogennímu zobrazení l existuje jediné symetrické multilineární zobrazení p splňující (4.3.2). Tato zobrazení opět nazýváme *asociovaná*. Vektorový prostor homogenních zobrazení řádu n označíme $L_n(X; Y)$ a definujeme normu na jeho prvcích pomocí normy s ním asociovaným zobrazením, tedy

$$\|l\| = \|p\|.$$

4.4. Derivace vyššího řádu.

Uvažujme $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, pro $p \in \mathbb{N}$ definujeme *p -tou Fréchetovu derivaci v bodě $x \in U$* obdobně jako jsme definovali druhou derivaci, tedy jako $d(d^{p-1}f)(x)$ pokud existuje. Jedná se o zobrazení $L(\mathbb{R}^n; L(\mathbb{R}^n; \dots; L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m) \dots))$, což ovšem ztotožňujeme s $L(\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$. O takovém zobrazení říkáme, že je *p -krát diferencovatelné v bodě x* .

Podobně zavádíme derivace podle vektorů (parciální derivace) vyššího řádu, jako derivace podle vektorů (parciální derivace) o řád nižší. Tedy pro funkci f , bod $x \in U$ a k -tici vektorů $h_1, \dots, h_{k-1}, h_k \in \mathbb{R}^n$ máme

$$d_{h_1, \dots, h_{k-1}, h_k} f(x) = d_{h_k}(d_{h_1, \dots, h_{k-1}} f)(x), \quad \frac{\partial f}{\partial h_1, \dots, h_{k-1}, h_k}(x) = \frac{\partial}{\partial h_k} \left(\frac{\partial f}{\partial h_1, \dots, h_{k-1}} \right)(x),$$

a parciální derivaci pro k -tici indexů $i_1, \dots, i_{k-1}, i_k \in \{1, \dots, n\}$

$$\partial_{i_1, \dots, i_{k-1}, i_k} f(x) = \partial_{i_k} (\partial_{i_1, \dots, i_{k-1}} f)(x), \quad \frac{\partial f}{\partial x_{i_1, \dots, x_{i_{k-1}}, x_{i_k}}}(x) = \frac{\partial}{\partial x_{i_k}} \left(\frac{\partial f}{\partial x_{i_1, \dots, x_{i_{k-1}}}} \right) (x).$$

Vraťme se nyní k první derivaci funkce (pro jednoduchost $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$) má-li f derivaci v x pak má, jako lineární zobrazení matici v kanonických souřadnicích složenou z parciálních derivací. Tedy

$$df(x)(h) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right) \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)h_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)h_n. \quad (4.4.1)$$

Pokud si uvědomíme, že $h_i = \text{pr}_i(h)$ (pr_i je i -tá kartézská projekce), lze (4.4.1) přepsat:

$$df(x)(h) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \text{pr}_1(h) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \text{pr}_n(h). \quad (4.4.2)$$

Tradičně ovšem pr_1 značíme dx , případně dx_1 , podobně s pr_2 je označováno dy či dx_2 , tedy pro lineární operátory máme

$$df(x) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)dx_n. \quad (4.4.3)$$

Nyní pokud uvažujeme druhou derivaci, pak druhá derivace jako bilineární zobrazení lze popsat pomocí druhých parciálních derivací následovně:

$$d^2 f(x)(h, k) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) h_i k_j$$

To lze maticově popsat zápisem

$$d^2 f(x)(h, k) = (h_1, \dots, h_n) \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}.$$

Toto lze zobecnit pro derivaci p -tého řádu.

Věta 4.9 (o reprezentaci). *Nechť $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je p -krát diferencovatelná v bodě $x \in U$. Potom pro každé $h^1, \dots, h^p \in \mathbb{R}^n$ platí*

$$d^p f(x)(h^1, \dots, h^p) = \sum_{i_1=1}^n \dots \sum_{i_p=1}^n \frac{\partial^p f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_p}}(x) h_{i_1}^1 \dots h_{i_p}^p,$$

zde $h^k = (h_1^k, \dots, h_n^k)$.

Věta 4.10 (symetrie parciálních derivací). *Nechť zobrazení $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ je p -krát spojitě diferencovatelné v bodě $x \in U$. Pak multilineární zobrazení $d^p f(x)$ je symetrické.*

Důsledek 4.11. *Nechť zobrazení $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ je p -krát spojitě diferencovatelné v bodě $x \in U$ a $h_1, \dots, h_k \in \mathbb{R}^n$. Pak pro libovolnou permutaci σ množiny $\{1, \dots, k\}$ platí*

$$d_{h_1, \dots, h_k} f(x) = d_{h_{\sigma(1)}, \dots, h_{\sigma(k)}} f(x),$$

speciálně

$$\frac{\partial f}{\partial x_{i_1}, \dots, x_{i_k}}(x) = \frac{\partial f}{\partial x_{i_{\sigma(1)}, \dots, x_{i_{\sigma(k)}}}(x)$$

D ů k a z. Plyne z definice derivace podle vektoru (parciální) vyššího řádu a faktu, že každou permutaci lze realizovat jako výměnu dvou sousedních indexů. Tento částečný výsledek byl dokázáno ve větě 4.8. \square

4.5. Diferenciál a Taylorův polynom. Necht zobrazení $f: \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ má v bodě $x \in U$ derivaci řádu k , definujeme *diferenciál k -tého řádu funkce f v bodě a* a označíme jej $\mathbf{d}^k f(a)$ jako homogenní zobrazení z $L_p(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ asociované s $d^k f(x)$. Tedy pro každé $h \in \mathbb{R}^n$ platí

$$\mathbf{d}^p f(x)(h) = d^p f(x)(h, \dots, h). \quad (4.5.1)$$

Lemma 4.12. *Necht $l \in L_r(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$. Pak*

- a) *pro libovolné $p < r$ platí $\mathbf{d}^p l(0) = 0$,*
- b) *$\mathbf{d}^r l(0) = r! \cdot l$,*
- c) *pro libovolné $p > r$, $x \in \mathbb{R}^n$ platí $\mathbf{d}^p l(x) = 0$.*

Lemma 4.13. *Necht pro zobrazení $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ a bod $x \in U$ platí*

$$\begin{aligned} df(x) &= 0 \\ d^2 f(x) &= 0 \\ &\vdots \\ d^k f(x) &= 0. \end{aligned}$$

Pak

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(x+h) - f(x)\|}{\|h\|^k} = 0.$$

D ů k a z. Pro $k = 1$ tvrzení plyne přímo z definice derivace. Předpokládejme nyní platnost tvrzení pro $k = r - 1$ a položme $g = df$. Máme $g(x) = 0$ a

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|g(x+h) - g(x)\|}{\|h\|^{r-1}} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\|g(x+h)\|}{\|h\|^{r-1}} = 0,$$

což znamená, že k libovolnému $\varepsilon > 0$ existuje otevřená koule $B \subset \mathbb{R}^n$ se středem v nule taková, že pro každé $h \in B$ platí

$$\|g(x+h)\| = \|g(x+h) - g(x)\| < \varepsilon \|h\|^{r-1}.$$

Pro libovolný vektor $h \in B$ nyní podle důsledku 2.19 věty o střední hodnotě platí

$$\|f(x+h) - f(x)\| \leq \sup_{y \in [x, x+h]} \|df(y)\| \cdot \|h\| = \sup_{y \in [x, x+h]} \|g(y)\| \cdot \|h\| < \varepsilon \|h\|^{r-1} \|h\| = \varepsilon \|h\|^r.$$

Tím je tvrzení dokázáno i pro $k = r$. \square

Věta 4.14 (o diferenciálu vyššího řádu). *Nechť zobrazení $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ má derivaci řádu k v bodě $x \in U$. Pak*

$$f(x+h) - f(x) = \mathbf{d}f(x)(h) + \frac{1}{2!}\mathbf{d}^2f(x)(h) + \cdots + \frac{1}{k!}\mathbf{d}^k f(x)(h) + \varepsilon(h)\|h\|^k,$$

kde

$$\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0. \quad (4.5.2)$$

D ů k a z. Položme

$$g(h) = f(x+h) - f(x) - \mathbf{d}f(x)(h) - \frac{1}{2!}\mathbf{d}^2f(x)(h) - \cdots - \frac{1}{k!}\mathbf{d}^k f(x)(h).$$

Podle lemmatu 4.12 máme pro $r \in \{1, \dots, k\}$ $\mathbf{d}^r g(0) = 0$ a podle lemmatu 4.13 pro

$$\varepsilon(h) = \frac{g(h)}{\|h\|^k}$$

platí (4.5.2). \square

Věta 4.15 (Taylova pro funkce více proměnných). *Nechť zobrazení $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ spojitě diferencovatelné řádu $k+1$ na U a úsečka $[x, x+h]$ leží v U . Potom existuje bod $\xi \in [x, x+h]$ takový, že*

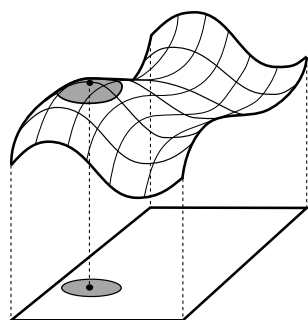
$$f(x+h) = f(x) + \mathbf{d}f(x)(h) + \frac{1}{2!}\mathbf{d}^2f(x)(h) + \cdots + \frac{1}{k!}\mathbf{d}^k f(x)(h) + \frac{1}{(k+1)!}\mathbf{d}^{k+1}f(\xi)(h) \quad (4.5.3)$$

D ů k a z. Položme $g(h) = f(x) + \mathbf{d}f(x)(h) + \frac{1}{2!}\mathbf{d}^2f(x)(h) + \cdots + \frac{1}{k!}\mathbf{d}^k f(x)(h) + \frac{1}{(k+1)!}$. \square

5. Extrémy funkcí více proměnných

5.1. Extremální úlohy bez vazby. V této sekci se budeme věnovat problému. . .

Nechť $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je funkce, řekneme, že funkce f nabývá v bodě $x \in U$ *lokálního minima* jestliže existuje okolí V bodu x takové, že pro každé $y \in V$, $y \neq x$ platí



Lokální maximum.

$$f(x) \leq f(y). \quad (5.1.1)$$

Pokud lze ve výrazu (5.1.1) nahradit nerovnost \leq ostrou nerovností $<$, říkáme, že f nabývá v x *ostrého lokálního minima*. Zcela obdobně definujeme také pojmy *lokální maximum funkce* a *ostré lokální maximum funkce*. *Lokální extrém* je potom souhrnný název pro lokální minimum a maximum.

Následující věta uvádí nutnou (nikoliv však postačující) podmínku lokálního extrému pro funkce, jistého stupně diferencovatelnosti.

Věta 5.1 (zobecněná Fermatova). *Nechť funkce $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ má v bodě $x \in U$ lokální minimum. Pokud pro nějaké $h \in \mathbb{R}^n$ existuje $d_h f(x)$ pak $d_h f(x) = 0$.*

D ů k a z. Uvažujme funkci $g_{x,h}$ z definice derivace podle vektoru (viz (2.2.2)). Ukážeme, že $(f \circ g_{x,h})'(0) = 0$, to spolu s větou 2.11 dává tvrzení věty. Je jasné, že $f \circ g_{x,h}$ má v $0 \in \mathbb{R}$ lokální minimum. Podle nutné podmínky existence extrému z prvního ročníku máme $(f \circ g_{x,h})'(0) = 0$. \square

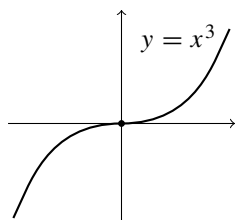
Důsledek 5.2. *Nechť funkce $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ má v bodě $x \in U$ lokální minimum.*

1. *Pokud $d_G f(x)$ existuje, je $d_G f(x) = 0$.*
2. *Pokud existují parciální derivace f v bodě x , potom*

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) = 0, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) = 0.$$

Samozřejmě, pokud existuje $df(x)$ v bodě lokálního extrému, je nulová.

Obdobně tvrzení lze dokázat také pro lokální maximum.



Věta 5.1 nedává postačující podmínku existence lokálního extrému. To ukazuje následující příklad.

Příklad. Funkce $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ má derivaci v bodě nula rovnu nule. Ovšem neexistuje okolí bodu nula takové, aby hodnota v nule byla menší než hodnoty funkce z toho okolí.

Věta 5.1 dává jen nutnou podmínku pro lokální extrém, to znamená, že pokud hledáme lokální extrémy, stačí se omezit na body, ve kterých je nutná podmínka splněna. Takové body nazýváme *stacionární body*.

Nechť l je kvadratické zobrazení, řekneme, že l je: *pozitivně definitní* jestliže pro libovolný $h \in \mathbb{R}^n$, $h \neq 0$ je $l(h) > 0$;

negativně definitní jestliže pro libovolný $h \in \mathbb{R}^n$, $h \neq 0$ je $l(h) < 0$;
indefinitní jestliže existují $h, k \in \mathbb{R}^n$ takové, že $l(h) > 0$ a $l(k) < 0$.

Pokud nahradíme ostrou nerovnost v definici pozitivní definitnosti neostrou, dostaneme *pozitivně semidefinitní*, obdobně *negativně semidefinitní*.

Lemma 5.3. *Pokud je kvadratické zobrazení $l: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ pozitivně definitní, potom existuje $K > 0$ takové, že pro každé $h \in \mathbb{R}^n$ je $l(h) \geq K \|h\|^2$.*

D ů k a z. Označme $S = \{h \in \mathbb{R}^n \mid \|h\| = 1\}$ jednotkovou sféru v \mathbb{R}^n . Množina S je kompaktní (evidentně je ohraničená a je uzavřená, jelikož je vzorem množiny $\{0\}$ při spojitým zobrazení $\|\cdot\|$). l tedy na S nabývá svého minima, označme jej K . Určitě $K \neq 0$, protože l je pozitivně definitní. Nyní pokud je $h \neq 0$, máme

$$l(h) = l\left(\|h\| \frac{h}{\|h\|}\right) = \|h\|^2 l\left(\frac{h}{\|h\|}\right) \geq K \|h\|^2.$$

Pro $h = 0$ je nerovnice $l(h) \geq K \|h\|^2$ splněna taktéž. \square

Následující věta dává postačující podmínku existence lokálního extrému.

Věta 5.4. *Nechť $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitě diferencovatelná na okolí bodu $x \in U$, který je stacionárním bodem f .*

1. *Je-li $\mathbf{d}^2 f(x)$ pozitivně definitní, pak má f v bodě lokální minimum.*
2. *Je-li $\mathbf{d}^2 f(x)$ negativně definitní, pak má f v bodě lokální maximum.*
3. *Je-li $\mathbf{d}^2 f(x)$ indefinitní, pak f v bodě x nemá lokální extrém.*

D ů k a z. 1. Jelikož je x stacionárním bodem, pak podle věty 4.14 o diferenciálu vyššího řádu pro $k = 2$, máme

$$f(x+h) - f(x) = \frac{1}{2} \mathbf{d}^2 f(x)(h) + \varepsilon(h) \|h\|^2,$$

kde $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$. Podle lemmatu 5.3 existuje $K > 0$ takové, že $\mathbf{d}^2 f(x)(h) \geq K \|h\|^2$. Tedy

$$f(x+h) - f(x) \geq \frac{1}{2} K \|h\|^2 + \varepsilon(h) \|h\|^2 = \left(\frac{1}{2} K + \varepsilon(h)\right) \|h\|^2$$

Limita závorky pro $h \rightarrow 0$ je rovna $\frac{1}{2} K$, proto existuje koule $B_0(r)$, že pro všechna $h \in B_0(r)$ je $\frac{1}{2} K + \varepsilon(h) > 0$. Pro taková $h \neq 0$ je

$$f(x+h) - f(x) \geq \frac{1}{2} K \|h\|^2 > 0.$$

Hledaným okolím, na němž je $f(x)$ nejmenší hodnotou, je tedy $B_x(r)$.

2. Převeďte se na předchozí případ uvažováním zobrazení $-f$.

3. Existují $h, k \in \mathbb{R}^n$ takové, že $\mathbf{d} f(x)(h) > 0$ a $\mathbf{d} f(x)(k) < 0$. Pro $t \neq 0$ máme

$$f(x+th) - f(x) = \frac{1}{2} \mathbf{d}^2 f(x)(th) + \varepsilon(th) \|th\|^2 = t^2 \left(\frac{1}{2} \mathbf{d}^2 f(x)(h) + \varepsilon(t) \|h\|^2\right).$$

Jelikož $\lim_{t \rightarrow 0} \varepsilon(t) \|h\|^2 = 0$, pro dostatečně malá t je $\frac{1}{2} \mathbf{d}^2 f(x)(h) + \varepsilon(t) \|h\|^2 > 0$. Proto libovolně blízko x existuje bod $x+th$ takový, že $f(x+th) - f(x) > 0$.

Na druhou stranu pokud v předchozí úvaze místo h použijeme k , dostáváme, že existují libovolně malá t , pro které $\frac{1}{2} \mathbf{d}^2 f(x)(k) + \varepsilon(t) \|k\|^2 < 0$ a následně $t^2 \left(\frac{1}{2} \mathbf{d}^2 f(x)(k) + \varepsilon(t) \|k\|^2\right) < 0$. Odtud $f(x+tk) - f(x) < 0$. \square

Zopakujme z algebry známé *Sylvestrovo pravidlo* pro kvadratickou formy l : *Nechť p je symetrická bilineární forma asociovaná s l a A je matice p v libovolné bázi. Uvažujme $\det A_1, \det A_2, \dots, \det A_n$ její hlavní minory.*

1. Pokud $\det A_1 > 0, \det A_2 > 0, \dots, \det A_n > 0$, potom je l pozitivně definitní.
2. Pokud $\det A_1 < 0, \det A_2 > 0, \det A_3 < 0, \det A_4 > 0 \dots$, potom je l negativně definitní.

Příklad. Nalezněte lokální extrémy funkce $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = x^3 - 3xy + 3y^2.$$

Nejprve nalezneme stacionární body f , tím že parciální derivace f položíme rovny nule:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 - 3y = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -3x + 6y = 0.$$

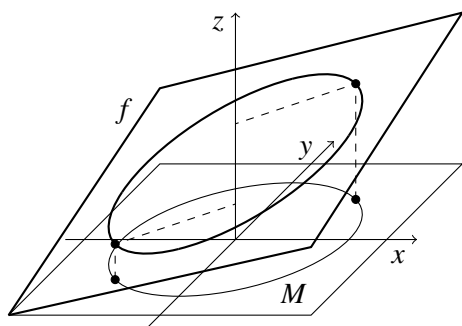
Stacionárními body — tedy body podezřelými z lokálního extrému jsou $(0, 0)$ a $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$. Abychom zjistili je-li extrém v některém z nich vyřešíme definitnost $\mathbf{d}^2 f(x, y)$ v těchto bodech. Matice příslušného kvadratického zobrazení se skládá z druhých parciálních derivací.

$$f''(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, y) & \frac{\partial^2}{\partial xy} f(x, y) \\ \frac{\partial^2}{\partial xy} f(x, y) & \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$$

Pro $(x, y) = (0, 0)$ jsou jeho hlavní minory: $\det A_1 = 0, \det A_2 = \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = -9$. Nyní, pro $(x, y) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ jsou jeho hlavní minory: $\det A_1 = 3, \det A_2 = 9$.

To znamená, že v bodě $(0, 0)$ nemá f lokální extrém ale v bodě $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ má lokální minimum.

Čtenáři jistě neuniklo, že věta 5.4 nic neříká v případě, že je $\mathbf{d}^2 f(x)$ semidefinitní. Tak tomu bylo již v případě funkce na \mathbb{R} a k vyšetření extrému, kdy $f'(x) = 0, f''(x) = 0$, bylo nutné použít jiného postupu.



5.2. Vázané extrémy. Nechť $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, a $M \subset U$, řekneme, že f nabývá lokálního extrému v $x \in M$ na M jestliže x je extrémem (stejněho druhu) funkce $f|_M$.

Ačkoliv funkce $f(x, y) = x + y + 1$ lokální extrém nemá pokud ji vyšetřujeme na množině M dané rovnicí $x^2 + y^2 - 1 = 0$ extrém nabývat musí (jako spojitá funkce na kompaktní množině).

Jedním ze způsobů, jak zjednodušit problém hledání extrému na množině, je parametrizací množiny M . Tím se může snížit i počet neznámých v rovnicích, které je třeba potom vyřešit.

Věta 5.5 (o parametrizaci M). Nechť $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je funkce a $M \subset U$ množina. Pokud pro nějaký bod $x \in M$ existuje homeomorfismus $\varphi: W \subset \mathbb{R}^r \rightarrow V \subset M$ takový že V je otevřená množina¹⁾ v M , $x \in V$ a $f \circ \varphi$ má lokální minimum v $t = \varphi^{-1}(x)$, potom f má v x lokální minimum na množině M .

D ů k a z. Tvrzení je zřejmé. \square

Obdobně lze tvrzení formulovat pro lokální maximum

Příklad. Najdeme lokální minimum funkce $f(x, y) = x + y + 1$ na množině M dané rovnicí $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$. Použijeme větu 5.5. Položme $\varphi(t) = (\cos t, \sin t)$ to jistě není injektivní, ale až budeme znát bod podezřelý z minima, můžeme φ definovat jen na otevřeném intervalu kolem tohoto bodu na němž u prostá bude.

Hledáme lokální minimum složení $(f \circ \varphi)(t) = \cos t + \sin t + 1$. Proto jej zderivujeme a položíme rovno nule:

¹⁾otevřená množina v M je zde myšleno jako otevřená množina v indukované topologii na M , tedy $V = M \cap O$ pro nějakou otevřenou množinu $O \subset \mathbb{R}^n$.

$$(f \circ \varphi)'(t) = -\sin t + \cos t = 0$$

Rovnice je splněna, je-li $t = \pi/4$ nebo $t = 5\pi/4$ ostatní řešení rovnice se po aplikaci φ nezobrazují již na nic nového. Body podezřelé z extrému jsou tedy $t = \pi/4, 5\pi/4$ potažmo $\varphi(\pi/4) = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ a $\varphi(-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$. Druhou derivací (čeho?) zjistíme, že bod $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ je bodem lokálního maxima f na M a $(-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$ bodem lokálního minima.

Další metodou hledání lokálního extrému na množině jsou tzv. Lagrangeovy multiplikátory. Ta zahrnuje funkci, která popisuje množinu, do nové funkce a hledáme její extrémy. Tímto postupem se převádí problém hledání extrémů na množině na problém hledání lokálního extrému bez podmínek.

Množina $M \subset \mathbb{R}^n$ je zadána pomocí funkce $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ následovně

$$M = \{x \in U \mid g(x) = 0\}. \quad (5.2.1)$$

Jelikož má g oborem hodnot \mathbb{R}^k je M zadána k rovnicemi

$$M = \{x \in U \mid g^1(x) = 0, \dots, g^k(x) = 0\}. \quad (5.2.2)$$

Rovnicím v (5.2.2) se někdy říká *vazbové podmínky*.

Pro $\lambda \in \mathbb{R}^k$ položíme

$$L_\lambda(x) = f(x) + \lambda_1 g^1(x) + \dots + \lambda_k g^k(x). \quad (5.2.3)$$

Funkci L_λ říkáme *Lagrangeova funkce*.

Věta 5.6 (o Lagrangeových multiplifikátorech, postačující podmínka). *Nechť $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $M \subset U$ definovaná (5.2.1), uvažujme Lagrangeovu funkci definovanou (5.2.3).*

Jestliže pro nějaké $\lambda \in \mathbb{R}^k$ má Lagrangeova funkce L_λ lokální minimum v bodě $x \in M$, potom má f v x lokální minimum na množině M .

Důkaz. Nechť x je lokálním minimem L_λ . Evidentně je x také lokálním minimem L_λ na množině M . Jelikož $L_\lambda|_M = f|_M + \sum_{i=1}^k \lambda_i \cdot g^i|_M$ a $g|_M = 0$, musí být x lokálním minimem $f|_M$. \square

Větu lze samozřejmě zformulovat i pro případ lokálního maxima.

Poznamenejme pro zajímavost, že na funkci f nejsou ve větě 5.6 kladeny žádné předpoklady.

Následující věta nám usnadní hledání lokálních extrémů. Je opět zformulována pro lokální minimum, ale platí samozřejmě i pro lokální maximum.

Věta 5.7 (o Lagrangeových multiplifikátorech, nutná podmínka). *Nechť $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $M \subset U$ je definovaná (5.2.1), $x \in M$, f a g jsou spojitě diferencovatelné v x a $dg(x)$ je surjektivní. Jestliže x je lokálním minimem f na množině M potom existuje $\lambda \in \mathbb{R}^k$ takové, že funkce L_λ definovaná (5.2.3) má v x stacionární bod, tedy $dL_\lambda(x) = 0$.*

Podmínka $dg(x)$ je surjektivní v předchozí větě znamená, že matice parciálních derivací

$$g'(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g^1}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial g^1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g^k}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial g^k}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

má maximální hodnot.

Kombinace vět 5.6 a 5.7 dává silný nástroj. Nejprve nalezneme stacionární body funkcí L_λ , pro všechny volby λ . Věta 5.7 nám zaručuje, že lokální extrémy jsou tímto pokryty. Vyšetříme tyto stacionární body Lagrangeovy funkce a věta 5.6 nám zaručuje, že lokální extrémy, které jsme našli, jsou lokálními extrémy f na množině M .

Podrobný postup při hledání lokálních extrémů pomocí Lagrangeových multiplikátorů bez velkých skoků v postupu ilustruje následující příklad.

Příklad. Vraťme se k příkladu funkce f s vazbovou podmínkou g , kde

$$f(x, y) = x + y + 1, \quad g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0.$$

Nejprve ověříme podmínku surjektivitativy derivace g . Máme

$$\partial_x g(x, y) = 2x, \quad \text{a} \quad \partial_y g(x, y) = 2y.$$

Tedy $dg(x, y)$ má matici

$$g'(x, y) = (2x, 2y).$$

Ta má nulovou hodnotu jen v počátku, ten ovšem bodem množiny M není. Proto všechny body M by mohly být bodem x z věty 5.7. Spojitá diferencovatelnost f i g je ve všech bodech M zřejmá. Lagrangeova funkce pro $\lambda \in \mathbb{R}$ má tvar

$$L_\lambda(x, y) = x + y + 1 + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$

Pokud je nějaké (x, y) stacionárním bodem některé L_λ (tedy pro nějaké λ) splňuje

$$\begin{aligned} \partial_x L_\lambda &= 1 + 2\lambda x = 0 \\ \partial_y L_\lambda &= 1 + 2\lambda y = 0 \end{aligned}$$

Tuto soustavu dvou rovnic o třech neznámých doplňuje podmínka, že $(x, y) \in M$ tedy $g(x, y) = 0$, konkrétně

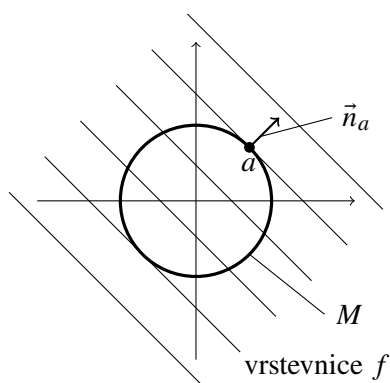
$$x^2 + y^2 - 1 = 0.$$

Vyřešením této soustavy dostáváme jednak $x = \sqrt{2}/2$, $y = \sqrt{2}/2$, $\lambda = -\sqrt{2}/2$ a jednak $x = -\sqrt{2}/2$, $y = -\sqrt{2}/2$, $\lambda = \sqrt{2}/2$. Nyní ověříme, že zda je $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ lokálním extrémem $L_{-\sqrt{2}/2}$ a zda je $(-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$ lokálním extrémem $L_{\sqrt{2}/2}$.

Kvadratická forma $dL_{-\sqrt{2}/2}(x, y)$ má matici

$$L''_\lambda(x, y) = \begin{pmatrix} 2\lambda & 0 \\ 0 & 2\lambda \end{pmatrix}, \quad L''_{-\sqrt{2}/2}(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2) = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}.$$

Ta je negativně definitní, to znamená, že $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ je lokální maximum $L_{-\sqrt{2}/2}$ a věta 5.7 říká, že $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ lokálním maximum f na M .



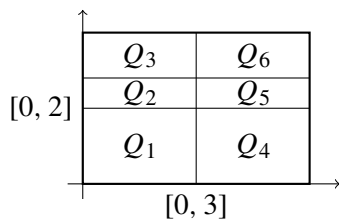
Princip metody Lagrangeových multiplikátorů spočívá v nalezení bodu a množiny M , ve kterém bude normálový vektor \vec{n}_a k množině M v bodě a kolmý na vrstevnici funkce f . Na obrázku je znázorněna situace tato situace z příkladu.

6. Riemannův integrál na \mathbb{R}^n

6.1. Integrál na obdélníku v \mathbb{R}^n . V prvním paragrafu této kapitoly zavedeme pojem integrálu funkce na obdélníku v \mathbb{R}^n . Postupujeme analogicky k případu Riemannova integrálu na \mathbb{R} .

Uspořádanou k -tici $P = (t_0, t_1, \dots, t_k)$, pro kterou je $a = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_k = b$, nazýváme *dělení intervalu* $[a, b]$. Nechť $Q = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$ je *obdélník* v \mathbb{R}^n . Pokud pro každé $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ je P_i dělením intervalu $[a_i, b_i]$, potom uspořádaná n -tice $P = (P_1, \dots, P_n)$ je dělením obdélníku Q . Množinu všech dělení obdélníku Q označujeme $\mathcal{P}(Q)$.

Rozklad obdélníku Q definovaný dělením P je konečná množina obdélníků $\text{Rect } P = \{Q_i\}$ takových, že jejich sjednocení je Q , průnik vnitřků libovolné různé dvojice je prázdný a $\text{pr}_j(Q_i) = [P_j, P_{j+1}]$

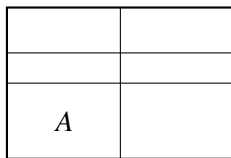


Dělení P obdélníku Q .

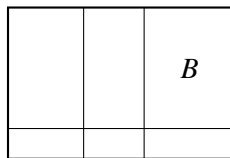
Příklad Mějme $Q = [0, 3] \times [0, 2]$. Uvažujeme dělení $P_1 = (0, \frac{3}{2}, 3)$ intervalu $[0, 3]$ a $P_2 = (0, 1, \frac{7}{5}, 2)$ intervalu $[0, 2]$. Dělení $P = (P_1, P_2) = ((0, \frac{3}{2}, 3), (0, 1, \frac{7}{5}, 2))$ je dělení obdélníku Q .

$$\{Q_i\} = \{[0, \frac{3}{2}] \times [0, 1], [0, \frac{3}{2}] \times [1, \frac{7}{5}], [0, \frac{3}{2}] \times [\frac{7}{5}, 2], [\frac{3}{2}, 2] \times [0, 1], [\frac{3}{2}, 2] \times [1, \frac{7}{5}], [\frac{3}{2}, 2] \times [\frac{7}{5}, 2]\}$$

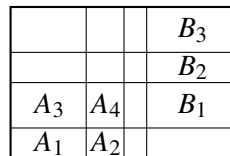
Dělení R obdélníku Q je *zjemněním dělení* P , pokud pro každé $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ je R_i zjemněním dělení P_i tedy pro každé $t_j = P_{i,j} = R_{i,l}$ pro nějaké l . Jinými slovy, R je zjemněním P v každé souřadnici. Dělení S obdélníku Q je *společným zjemněním dělení* P a Q , pokud S je zjemněním P i Q .



Dělení P obdélníku Q .



Dělení R

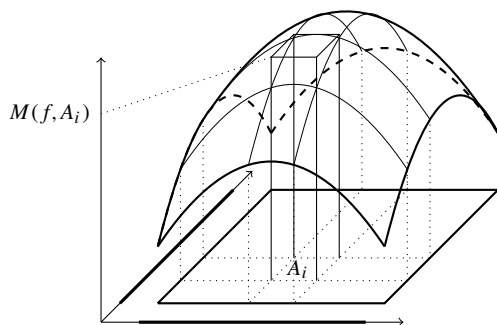


Společné zjemnění P a R .

Evidentně, ke každým dvěma děleními existuje jejich společné zjemnění.

Je-li A obdélník dělení P a S je jeho zjemnění, potom existují obdélníky A_1, \dots, A_l dělení S takové, že $A = A_1 \cup \dots \cup A_l$.

Nechť $f: Q \rightarrow \mathbb{R}$ je funkce na obdélníku Q . V celé této kapitole budeme předpokládat, že je f omezená. Pro takovou funkci v následujících odstavcích definujeme integrál. V případě Riemannova integrálu v prvním ročníku jsme definovali horní a dolní součty příslušné určitému dělení intervalu. Pomocí délky těchto intervalů dělení vynásobené supremem a infimem. Proto nyní potřebujeme definovat n -rozměrný objem. Nechť $A = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$ je obdélník, definujeme n -rozměrný objem obdélníku A (nebo pouze objem), jako vol $A = (b_1 - a_1) \cdot \dots \cdot (b_n - a_n)$.



Pro funkci f a dělení P obdélníku Q definujeme *horní součet*

$$S(f, P) = \sum_{A_i} \sup_{A_i} f(x) \cdot \text{vol } A_i = \sum_{A_i} M(f, A_i) \text{vol } A_i \quad (6.1.1)$$

a *dolní součet*

$$s(f, P) = \sum_{A_i} \inf_{A_i} f(x) \cdot \text{vol } A_i = \sum_{A_i} m(f, A_i) \text{vol } A_i. \quad (6.1.2)$$

Poznamenejme, že supremum a infimum v rovnicích (6.1.1),(6.1.2) vždy existuje, jelikož je f ohraničená, a součet je konečný, neboť Q je ohraničený.

Označme

$$H(f) = \{S(f, P) \mid P \in \mathcal{P}(Q)\}, \quad (\text{množina horních součtů})$$

$$D(f) = \{s(f, P) \mid P \in \mathcal{P}(Q)\}. \quad (\text{množina dolních součtů})$$

Následující dvě lemmata jsou analogickými tvrzeními k těm z prvního ročníku.

Lemma 6.1. *Nechť R je zjemněním dělení P na Q , potom*

$$\begin{aligned} S(f, P) &\geq S(f, R), \\ s(f, P) &\leq s(f, R). \end{aligned}$$

Důkaz. Ke každému obdélníku A_i dělení P existuje $l(i) \in \mathbb{N}$ a obdélníky $A_{i,1}, \dots, A_{i,l(i)}$ příslušné k dělení R takové, že $A_i = A_{i,1} \cup \dots \cup A_{i,l(i)}$ (viz poznámka za definicí zjemnění). Navíc máme $Q = \bigcup_{i=1}^{k(P)} \bigcup_{j=1}^{l(i)} A_{i,j}$.

$$M(f, A_i) \geq M(f, A_{i,j})$$

$$\begin{aligned} S(f, P) &= \sum_{i=1}^{k(P)} M(f, A_i) \text{vol } A_i \\ &= \sum_{i=1}^{k(P)} M(f, A_i) \text{vol}(A_{i,1} \cup \dots \cup A_{i,l(i)}) \\ &= \sum_{i=1}^{k(P)} M(f, A_i) \sum_{j=1}^{l(i)} \text{vol } A_{i,j} \\ &\geq \sum_{i=1}^{k(P)} \sum_{j=1}^{l(i)} M(f, A_{i,j}) \text{vol } A_{i,j} \\ &= \sum_{i=1}^{k(R)} M(f, A_i) \text{vol } A_i = S(f, R). \end{aligned}$$

Výsledek pro dolní součty plyne stejným způsobem za pomoci nerovnosti $m(f, A_i) \leq m(f, A_{i,j})$. \square

Lemma 6.2. *Nechť P a R jsou dvě dělení Q , potom*

$$s(f, P) \leq S(f, R).$$

D ů k a z. Nechť T je společné zjemnění P a R potom podle lemmatu 6.1 máme

$$s(f, P) \leq s(f, T) \leq S(f, T) \leq S(f, R).$$

□

Předchozí tvrzení nás opravňuje k následujícímu.

Důsledek 6.3. Pro každou omezenou funkci $f: Q \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je

$$D(f) \leq H(f).$$

Množiny $D(f)$ a $H(f)$ jsou evidentně neprázdné a podle předchozího důsledku je $D(f)$ shora ohraničená libovolným horním součtem; stejně tak je $H(f)$ zdola ohraničená. Proto můžeme definovat *dolní integrál f na Q* jako

$$\int_Q f = \sup D(f) \tag{6.1.3}$$

a *horní integrál f na Q* jako

$$\overline{\int}_Q f = \inf H(f). \tag{6.1.4}$$

Nyní pokud pro omezenou $f: Q \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je $\int_Q f = \overline{\int}_Q f$, pak tuto hodnotu označíme $\int_Q f$ a říkáme ji *integrál funkce f na obdélníku Q* . Funkci f pak nazveme *integrovatelnou na Q*

V případě konstantní funkce $f \equiv c$ jsou množiny $H(f)$ a $D(f)$ jednoprvkové obsahující číslo c vol Q , což je tím pádem její integrál. Přirozené, že? Ověřte!

Spojité funkce je také integrovatelná, jak uvidíme z pozdějšího tvrzení.

Věta 6.4. Nechť $f, g: Q \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ jsou omezené integrovatelné funkce na Q a $c \in \mathbb{R}$. Potom

1. $f + g$ je integrovatelná na Q a

$$\int_Q f + g = \int_Q f + \int_Q g.$$

2. cf je integrovatelná na Q a

$$\int_Q cf = c \int_Q f.$$

D ů k a z. !!!!

□

Věta 6.5. Nechť $A, B \subset \mathbb{R}^n$ jsou obdélníky s disjunktími vnitřky takové, že $A \cup B$ je obdélník. Dále $f: A \cup B \rightarrow \mathbb{R}$ je omezená integrovatelná funkce. Potom f je integrovatelná na A i B a

$$\int_{A \cup B} f = \int_A f + \int_B f. \tag{6.1.5}$$

D ů k a z. Z kritéria integrovatelnosti (věta 6.6) existuje dělení P obdélníku $A \cup B$ takové, že $S(f, P) - s(f, P) < \varepsilon$. Nechť R je zjemněním dělení P vzniklé přidáním bodů tak, aby

$R_i = (s_0, \dots, s_{k-1}, s_k = t_0, t_1, \dots, t_l)$. Potom S , kde $S_i = (s_0, \dots, s_{k-1}, s_k)$, a T , kde $T_i = (t_0, t_1, \dots, t_l)$, jsou děleními A a B . Platí

$$S(f, P) > S(f, R) = S(f, S) + S(f, T) \quad (R \text{ zjemnění } P, \text{ konstrukce } S \text{ a } T) \quad (6.1.6)$$

$$s(f, P) < s(f, R) = s(f, S) + s(f, T). \quad (R \text{ zjemnění } P, \text{ konstrukce } S \text{ a } T) \quad (6.1.7)$$

Což dává $S(f, S) - s(f, S) + S(f, T) - s(f, T) = S(f, R) - s(f, R) < \varepsilon$. Oba rozdíly jsou tedy menší než ε a věta 6.6 zaručuje integrovatelnost f na A a B . Rovnice (6.1.5) plyne z (6.1.6) a 6.1.7. \square

Věta 6.6 (kritérium integrovatelnosti). *Nechť $f: Q \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je omezená. Funkce f je integrovatelná, právě když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje dělení P obdélníku Q takové, že $S(f, P) - s(f, P) < \varepsilon$.*

Stejně jako v případě integrálu na \mathbb{R} lze vyvodit, že každá spojitá funkce na obdélníku je integrovatelná. Pokud má funkce konečně či spočetně mnoho bodů nespojitosti je rovněž integrovatelná. Nyní se zaměříme na zjištění „jak velká“ může být množina bodů nespojitosti, aby funkce byla integrovatelná.

Množina $A \subset \mathbb{R}^n$ má (Lebesguovu) *míru nula* jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje spočetný systém $(Q_i)_i$ obdélníků v \mathbb{R}^n takový, že $\bigcup_i Q_i \supset A$ a $\sum_i \text{vol } Q_i < \varepsilon$.

Konečná i spočetná množina má míru nula.

Úsečka v \mathbb{R}^2 má míru nula.

Obdélník v \mathbb{R}^n s neprázdným vnitřkem nemá míru nula. Hranice obdélníku má míru nula.

Příklad. Kantorova množina $C \subset \mathbb{R}$ má míru nula. Skutečně, Kantorovu množinu lze psát ve tvaru $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} Q_n$, kde Q_n je sjednocení 2^n intervalů délky 3^{-n} . Objem vol $Q_n = (2/3)^n$, pro vhodné n může tento výraz být menší než libovolné předem dané ε .

Pro ohraničenou funkci $f: Q \rightarrow \mathbb{R}$ a bod x jejího definičního bodu x definujeme *oscilaci funkce f v bodě x*

$$\Omega_f(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{x \in B_\varepsilon(x)} f(x) - \inf_{x \in B_\varepsilon(x)} f(x).$$

Pro $A \subset Q$ definujeme *oscilaci funkce f na množině A* jako

$$\Omega_f(A) = \sup_{x \in A} f(x) - \inf_{x \in A} f(x).$$

Je-li P dělení obdélníku Q , potom

$$S(f, P) - s(f, P) = \sum_{A \in \text{Rect } P} \Omega_f(A) \text{vol } A.$$

Lemma 6.7. *Funkce f je spojitá v bodě x , právě když je $\Omega_f(x) = 0$.*

D ů k a z.

\square

Příklady. Funkce $\sin x$ má v každém bodě x oscilaci $\Omega_{\sin}(x) = 0$, jako každá spojitá funkce. Oscilace na intervalu $[0, \pi]$ je $\Omega_{\sin}([0, \pi]) = 1$ a $\Omega_{\sin}([0, 2\pi]) = 2$.

Funkce sgn má v bodě 0 oscilaci $\Omega_{\text{sgn}}(0) = 2$. Na každém intervalu obsahujícím nulu, tedy například $[-1, 1]$ má $\Omega_{\text{sgn}}([-1, 1]) = 2$, na druhou stranu $\Omega_{\text{sgn}}([0, 1]) = 1$ a $\Omega_{\text{sgn}}([1, 2]) = 0$.

Lemma 6.8. *Nechť $f: Q \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je ohraničená. Potom pro každé $\varepsilon > 0$ je*

$$A_\varepsilon = \{x \in Q \mid \Omega_f(x) < \varepsilon\}$$

je otevřená množina.

Věta 6.9 (Lebesguova). *Nechť $f: Q \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je ohraničená funkce. Označme $N \subset Q$ množinu bodů nespojitosti f . Funkce f je integrovatelná na Q , právě když N má míru nula.*

D ů k a z.

□

6.2. Integrál na množině v \mathbb{R}^n . Nechť $f: Q \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je omezená a $A \subset Q$ definujeme *integrál funkce f na množině A* jako

$$\int_A f = \int \chi_A \cdot f. \tag{6.2.1}$$

Je jasné, že definice $\int_A f$ nezávisí na volbě Q , pokud je $A \subset Q$

Následující věta nám dává nástroj pro počítání integrálu na obdélníku převodem na jednorozměrné integrály.

Věta 6.10 (Fubiniho). *Nechť A je obdélník v \mathbb{R}^k , B je obdélník v \mathbb{R}^l a $f: A \times B \subset \mathbb{R}^{k+l} \rightarrow \mathbb{R}$ je omezená integrovatelná funkce. Předpokládejme, že pro každé t je $f|_{x=t}$ integrovatelná na B a pro každé $t \in A$ položme $u(t) = \int_B f|_{x=t}$. Potom u je integrovatelná na A a platí*

$$\int_{A \times B} f = \int_A u. \tag{6.2.2}$$

Rovnici (6.2.2) lze přepsat jako

$$\int_{A \times B} f = \int_A \left(\int_B f \right). \tag{6.2.3}$$

D ů k a z.

□

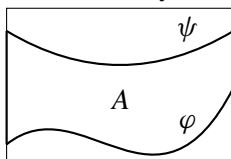
Označení. Pro integrál funkce f na obdélníku $Q = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$ budeme v souladu s klasikou používat taktéž označení

$$\int_Q f = \int_Q f(x) dx_1 dx_2 \dots dx_n = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \dots \int_{a_n}^{b_n} f(x) dx_1 dx_2 \dots dx_n.$$

Důsledek 6.11 (Fubiniho věta pro \mathbb{R}^2).

$$\int_{[a,b] \times [c,d]} f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx.$$

Důsledek věty 6.10 a definice integrálu na množině je následující tvrzení.



Množina $A \subset [a, b] \times [c, d]$ je ve tvaru

$$A = \{(x, y) \mid x \in [a, b], \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\},$$

kde φ, ψ jsou spojitě funkce na intervalu $[a, b]$, $c \leq \varphi \leq \psi \leq d$

Důsledek 6.12. *Nechť $A \subset [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$ je množina popsaná v předchozím odstavci, $f: Q \rightarrow \mathbb{R}$ omezená integrovatelná, potom*

$$\int_A f = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy \right) dx \quad (6.2.4)$$

Řekneme, že ohraničená množina $A \subset \mathbb{R}^n$ je *Jordanovsky měřitelná* jestliže konstantní funkce $f = 1$ je na A integrovatelná ($\int_A 1$ existuje). Neboli $\int_Q \chi_A$ existuje pro $A \subset Q$, Q obdélník.

Pro obdélníky = vol Q .

Množina má Lebesguovu míru nula, právě když je Jordanova míra této množiny nula.

Tyto poznámky nás opravňují Jordanovskou míru množiny A označit stejným symbolem jako objem v případě obdélníků, tedy vol A .

Lemma 6.13. *Ohraničená množina $A \subset \mathbb{R}^n$ je Jordanovsky měřitelná, právě když fr A má míru nula.*

D ů k a z. Plyne z faktu, že množina bodů nespojitosti χ_A je právě fr A a samozřejmě věty 6.9. \square

Lemma 6.14. *Jsou-li A, B Jordanovsky měřitelné množiny, potom jsou Jordanovsky měřitelné i množiny $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$.*

Věta 6.15. *Nechť $A, B \subset \mathbb{R}^n$ jsou ohraničené Jordanovsky měřitelné množiny a f je integrovatelná na A i B . Potom*

$$\int_{A \cup B} f = \int_A f + \int_B f - \int_{A \cap B} f.$$

D ů k a z. Nechť Q_A (respektive Q_B) je obdélník obsahující A (respektive B). Bez újmy na obecnosti, můžeme předpokládat, že $Q_A \cup Q_B$ je obdélník. Z definice integrálu na množině je $\int_A f = \int_{Q_A} f$ (stejně tak $\int_B f = \int_{Q_B} f$).

...
 \square

Lemma 6.16. *Nechť $A \subset \mathbb{R}^n$ je ohraničená Jordanovsky měřitelná množina, potom pro každé $\varepsilon > 0$ existují množiny $M_\varepsilon, N_\varepsilon$ takové, že:*

- 1) $M_\varepsilon, N_\varepsilon$ jsou sjednocením obdélníků;
- 2) $M_\varepsilon \subset A \subset N_\varepsilon$;
- 3) vol $N_\varepsilon - \text{vol } M_\varepsilon < \varepsilon$.

D ů k a z. jelikož je $A \subset Q$ Jordanovsky měřitelná, je χ_A integrovatelná na Q a tedy existuje dělení P obdélníku Q , že $M(\chi_A, P) - m(\chi_A, P) < \varepsilon$. Množina M_ε je pak sjednocení těch obdélníků z $\text{Rect } P$, které jsou podmnožinou A , a proto vol $M_\varepsilon = m(\chi_A, P)$. Obdobně N_ε je sjednocení těch obdélníků z $\text{Rect } P$, které mají neprázdný průnik s A , a tedy vol $N_\varepsilon = M(\chi_A, P)$. \square

Následující věta je hlavním výsledkem

Věta 6.17 (o substitutci). *Nechť G, H jsou otevřené množiny v \mathbb{R}^n , $g: G \rightarrow H$ bijektivní spojitě diferencovatelné zobrazení. Potom pro každou integrovatelnou funkci $f: H \rightarrow \mathbb{R}$ platí*

$$\int_{g(A)} f = \int_A f \circ g \cdot |\det g'|. \quad (6.2.5)$$

Příklad Vypočítejte integrál

$$\int_A x^2 + y^2 dx dy,$$

kde A je mezikružší se středem v $(0, 0)$, poloměry $R_1 = 1$ a $R_2 = 2$.

Použijeme větu o substituci, množina A je obrazem obdélníka $[1, 2] \times [0, 2\pi]$ při zobrazení $g(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$. Věta 6.17 je formulována pro otevřené množiny G, H ...

Rejstřík

- bod stacionární: 39
- derivace druhá Fréchetova: 32
 - Fréchetova p -tá: 35
 - Gâteauxova: 15
 - parciální: 17
 - — zobecněného typu: 29
 - podle vektoru: 15
- extrém lokální: 39
- Funkce definovaná implicitně: 24
 - integrovatelná: 47
- funkce Lagrangeova: 42
- integrál na množině: 49
- Integrál na obdélníku: 47
- Koule otevřená v normovaném prostoru: 1
 - uzavřená v normovaném prostoru: 1
- limita funkce: 3
- matice Jakobiho: 18
 - parciálních derivací: 18
- maximum lokální funkce: 39
 - — na množině: 41
- ostré lokální: 39
- minimum lokální funkce: 39
 - — na množině: 41
- ostré lokální: 39
- množina Jordanovsky měřitelná: 50
- míry nula: 48
- Množina ohraničená v normovaném prostoru: 1
- Norma: 1
- normy ekvivalentní: 3
- Obdélník v \mathbb{R}^n : 45
- Objem obdélníku n -rozměrný: 45
- oscilace funkce na množině: 48
 - — v bodě: 48
- Prostor normovaný: 1
- Složky funkce: 5
- Součet dolní: 46
 - horní: 46
- Topologie eukleidovská na \mathbb{R}^n : 4
 - generovaná normou: 1
 - přirozená na \mathbb{R}^n : 4
- součinná na \mathbb{R}^n : 5
- zjemnění dělení: 45
 - — společné: 45
- zobrazení asociované: 32, 35
 - definované implicitně: 30
 - diferencovatelné p -krát: 35
 - — dvakrát spojitě: 33
 - — spojitě: 20
 - dvakrát diferencovatelné: 32
 - Fréchet diferencovatelné: 11
 - homogenní řádu n : 35
 - kvadratické: 31
 - — indefinitní: 40
 - — negativně definitní: 40
 - — pozitivně definitní: 39
 - multilineární: 34
 - parciální: 17
 - spojitě v normovaných prostorech: 2
 - symetrické: 31
 - — multilineární: 35
 - třídy C^2 : 34

Literatura

- [1] V.I. Averbuch, *Matematická analýza 3-4*. Učební text Matematický ústav v Opavě, revize 2011.
- [2] V. Jarník, *Diferenciální počet I*. ČSAV, Praha, 1984.
- [3] V. Jarník, *Integrální počet I*. ČSAV, Praha, 1974.
- [4] M. Krupka, M. Málek, *Matematická analýza I,II*. Učební text Matematický ústav v Opavě, verze 2023.