Matematická analýza III, IV

Texty k přednáškám M. Málka

květen 2019

Obsah

Obsah **iii**

1 Přirozená topologie v $\mathbb{R}^n$ **1**
1.1 Normované prostory 1
1.2 $\mathbb{R}^n$ jako normovaný prostor. 3
1.3 $\mathbb{R}^n$ jako součin topologických prostorů 4
1.4 Kompaktní množiny v $\mathbb{R}^n$ 5
1.5 Spojitost základních zobrazení 6
1.6 Konečněrozměrné normované prostory 7
1.7 Prostory lineárních zobrazení 7

2 Derivace prvního řádu **9**
2.1 Fréchetova derivace 9
2.2 Derivace podle vektoru, Gâteauxova derivace 13
2.3 Parciální derivace 15
2.4 Věty o střední hodnotě 16
2.5 Spojitá diferencovatelnost 18

3 Inverzní a implicitní zobrazení **21**
3.1 Inverzní zobrazení 21
3.2 Věta o implicitní funkci 21
3.3 Obecná věta o inverzním zobrazení 23
3.4 Obecná věta o implicitním zobrazení 27

4 Derivace vyšších řádů **29**
4.1 Bilineární a kvadratická zobrazení 29
4.2 Derivace a diferenciál druhého řádu 30
4.3 Multilineární a homogenní zobrazení 32
4.4 Derivace vyššího řádu 33
4.5 Diferenciál a Taylorův polynom 35

5 Extrémy funkcí více proměnných **37**
5.1 Extremální úlohy bez vazby 37
5.2 Vázané extrémy 39

6 Riemannův integrál na $\mathbb{R}^n$ **43**
6.1 Integrál na obdélníku v $\mathbb{R}^n$ 43
6.2 Integrál na množině v $\mathbb{R}^n$ 47

7 Integrování diferenciálních forem **49**
7.1 Formy na $\mathbb{R}^n$ 49
7.2 Diferenciální formy 50
7.3 Integrál z diferenciální formy na krychli 52
7.4 Stokesova věta 53
7.5 Integrování diferenciálních forem 54

8 Obyčejné diferenciální rovnice **57**
8.1 Obecné 57
8.2 Řešení speciálních typů diferenciálních rovnic 59
8.3 Lineární direfenciální rovnice 60
8.4 Soustavy diferenciálních rovnic 60
8.5 Lineární diferenciální rovnice vyššího řádu 64

Rejstřík **66**

1. Přirozená topologie v $\mathbb{R}^n$

V první části tohoto textu zavádíme přirozenou topologii na množině $\mathbb{R}^n$, nejprve jako topologii normovaného prostoru, a pak jako topologii součinu topologických prostorů. Dvojí definice nám umožní v dalším výkladu a při řešení úloh zvolit přístup, vždy vhodný pro danou situaci. Tato oboustrannost se nám osvědčí již v této kapitole.

V celé kapitole (i v dalším textu) budeme uvažovat množinu $\mathbb{R}^n$ s přirozenou strukturou vektorového prostoru nad polem $\mathbb{R}$.

1.1. Normované prostory. Všechny vektorové prostory, s nimiž budeme pracovat v tomto odstavci, budeme uvažovat nad polem reálných čísel.

Vektorový prostor X se nazývá *normovaný*, je-li na něm definována *norma*, což jest zobrazení $\|\cdot\|: X \to \mathbb{R}$ splňující následující tři podmínky:

1. Pro každé $x \in X$ je $\|x\| \neq 0$ jestliže $x \neq 0$.
2. Pro každé $x \in X$ a $t \in \mathbb{R}$ je $\|tx\| = |t| \cdot \|x\|$.
3. Pro každé $x, y \in X$ platí $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Poznámky ($|-x|$, $|0|$,) !!!!

Příklady !!!!

Definici a základní vlastnosti normovaného prostoru známe z algebry. V tomto odstavci si všimneme, jak lze pomocí normy na vektorovém prostoru definovat topologii.

Nechť $x \in X$, $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$. Položme

$$B_r^{\|\cdot\|}(x) = \{y \in X \mid \|y - x\| < r\}, \tag{1.1.1}$$
$$\bar{B}_r^{\|\cdot\|}(x) = \{y \in X \mid \|y - x\| \leq r\}, \tag{1.1.2}$$

Množina $B_r^{\|\cdot\|}(x)$ (respektive $\bar{B}_r^{\|\cdot\|}(x)$) se nazývá *otevřená* (respektive *uzavřená*) *koule (vzhledem k normě* $\|\cdot\|$*) se středem* x *a poloměrem* r. V případě, že nedojde k nedorozumění, budeme používat jednodušších symbolů $B_r(x)$ a $\bar{B}_r(x)$.

Vlastnosti koulí !!!!

Množina $A \subset X$ se nazývá *ohraničená*, je-li množina $\|A\|$ (obraz množiny A při zobrazení $\|\cdot\|$) ohraničená. Ekvivalentně: množina A je ohraničená, existuje-li otevřená koule $B_r(0)$ taková, že $A \subset B_r(0)$.

Pomocí otevřených koulí nyní můžeme definovat na X *topologii* τ *generovaná normou* následovně: množina $G \subset X$ je *otevřená* (tedy prvkem topologie), jestliže pro každý bod $x \in G$ existuje $B_r(x)$ taková, že $B_r(x) \subset G$.

Stejného výsledku dosáhneme, pokud v definici místo otevřené koule použijeme uzavřenou.

Lemma 1.1. *Takto definovaný systém je skutečně topologie na* X.

D ů k a z. Ověříme, že systém τ splňuje axiomy topologie. Uvažujme systém $(G_\alpha)_{\alpha \in A}$ prvků τ, dokážeme, že $\bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$ je rovněž prvek τ. Pokud $x \in \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$ potom existuje $\alpha_0 \in A$ takové, že $x \in G_{\alpha_0}$. Z definice topologie existuje $B_r(x)$ s $B_r(x) \subset G_{\alpha_0}$. Proto $B_r(x) \subset \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$.

Nechť $G_1, G_2 \in \tau$, ověřme, že $G_1 \cap G_2 \in \tau$. Zvolme $x \in G_1 \cap G_2$. Jelikož je x prvkem G_1 existuje $B_{r_1}(x) \subset G_1$, analogicky existuje $B_{r_2}(x) \subset G_2$. Potom pro $r = \min\{r_1, r_2\}$ máme $B_r(x) \subset G_1 \cap G_2$. Tedy $G_1 \cap G_2 \in \tau$.

Prostor X i prázdná množina jsou prvky τ. $\square$

Systém všech otevřených koulí normovaného prostoru X tvoří bázi topologie na X.

Otevřené koule jsou otevřené množiny a uzavřené koule jsou uzavřené množiny v topologii generované normou.

Každá otevřená i uzavřená koule je souvislá množina.

Každý normovaný prostor je Hausdorffův topologický prostor.

Podívejme se nyní na spojitost zobrazení mezi normovanými prostory. Uvažujme X a Y dva normované prostory s topologiemi generovanými normami. Jak víme ze základů topologie zobrazení $f\colon X \to Y$ je *spojité* pokud vzorem otevřené množiny v X je otevřená množina v Y. Zde máme topologii na X i na Y definovanou pomocí normy, proto lze spojitost definovat vycházejíc z normy

Věta 1.2 (**ε-δ kritérium spojitosti).** *Nechť X a Y jsou normované prostory s normami $\|\cdot\|_X$ a $\|\cdot\|_Y$, dále $A \subset X$. Zobrazení $f\colon A \to Y$ je spojité, právě když pro každé $x_0 \in A$ a pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $x \in A$, $\|x - x_0\|_X < \delta$ platí $\|f(x) - f(x_0)\|_Y < \varepsilon$ (alternativně zapsáno: $f(A \cap B_\delta^{\|\cdot\|_X}(x_0)) \subset B_\varepsilon^{\|\cdot\|_Y}(f(x_0))$).*

Norma je spojité zobrazení. Skutečně, například spojitost v nule: Vzor intervalu $(-\varepsilon, \varepsilon)$ při zobrazení $\|\cdot\|$ je přece $B_\varepsilon^{\|\cdot\|}(0)$. Proto $\left\|B_\varepsilon^{\|\cdot\|}(0)\right\| \subset (-\varepsilon, \varepsilon)$.

Nechť $x \in X$ je libovolný vektor, definujeme $f_x\colon \mathbb{R} \to X$ předpisem $f_x(t) = tx$. Toto zobrazení je lineární a spojité.

Uvažme nyní dvě normy ($\|\cdot\|$ a $|\cdot|$) na vektorovém prostoru X a zkoumejme, za jakých okolností bude topologie indukovaná normou $\|\cdot\|$ silnější, než topologie indukovaná normou $|\cdot|$. V následující větě tyto topologie označujeme symboly $\tau_{\|\cdot\|}$ a $\tau_{|\cdot|}$.

Věta 1.3. *Nechť $\|\cdot\|$ a $|\cdot|$ jsou dvě normy na vektorovém prostoru X. Následující čtyři výroky jsou ekvivalentní:*

1. *$\tau_{\|\cdot\|}$ je silnější než $\tau_{|\cdot|}$.*
2. *Existuje číslo $m > 0$ takové, že $B_m^{\|\cdot\|}(0) \subset B_1^{|\cdot|}(0)$.*
3. *Existuje číslo $m > 0$ takové, že $\bar{B}_m^{\|\cdot\|}(0) \subset \bar{B}_1^{|\cdot|}(0)$.*
4. *Existuje číslo $M > 0$ takové, že $|\cdot| \leq M \cdot \|\cdot\|$.*

D ů k a z. Předpokládejme, že platí tvrzení 1, že každá otevřená množina v topologii $\tau_{|\cdot|}$ je otevřená i v topologii $\tau_{\|\cdot\|}$. Pak množina $B_1^{|\cdot|}(0)$ je otevřená v topologii $\tau_{\|\cdot\|}$, což znamená že existuje otevřená koule $B_m^{\|\cdot\|}(0)$ tak, že $B_m^{\|\cdot\|}(0) \subset B_1^{|\cdot|}(0)$. To je tvrzení 2.

Postupujeme sporem, předpokládejme, že platí tvrzení 2. a neplatí tvrzení 3. Nejprve existuje $m > 0$ takové, že pro každé $\|x\| < m$ platí $|x| < 1$ a jelikož neplatí tvrzení 3. existuje $x \in X$, $\|x\| = m$ a $|x| > 1$. Pak pro vektor

$$\bar{x} = \frac{|x| + 1}{2|x|} x$$

platí jednak

$$\|\bar{x}\| = \left|\frac{|x| + 1}{2|x|}\right| \|x\| = \frac{||x| + 1|}{2|x|} m = \left(\frac{|x|}{2|x|} + \frac{1}{2|x|}\right) m < m$$

a jednak

$$|\bar{x}| = \left|\frac{|x| + 1}{2|x|}\right| |x| = \frac{||x| + 1|}{2|x|} |x| = \frac{||x| + 1|}{2} > 1,$$

což je spor. Platí tedy tvrzení 3.

Nyní předpokládejme platnost výroku 3. a položme $M = 1/m$. Kdyby existoval vektor $x \in X$ takový, že $|x| > M\|x\|$, pak by pro vektor

$$x_0 = \frac{m}{\|x\|}x$$

platilo $\|x_0\| = m$, neboli $x_0 \in \bar{B}_m^{\|\cdot\|}(0)$, a

$$|x_0| = \frac{m|x|}{\|x\|} > mM = 1,$$

neboli $x_0 \notin \bar{B}_1^{|\cdot|}$. To je spor, který dokazuje výrok 4.

Konečně, předpokládejme platnost tvrzení 4. Nechť U je množina otevřená v $\tau_{|\cdot|}$, $x \in U$ bod. Nechť $\varepsilon > 0$ je takové číslo, že $B_\varepsilon^{|\cdot|} \subset U$. Pak $B_{\varepsilon/M}^{\|\cdot\|}(x) \subset B_\varepsilon^{\|\cdot\|}(x) \subset U$, což dokazuje, že množina U je otevřená v topologii $\tau_{\|\cdot\|}$.

Tím je důkaz hotov. □

Dvě normy na vektorovém prostoru se nazývají *ekvivalentní*, mají-li shodné indukované topologie. Z předchozí věty nyní snadno plyne

Věta 1.4. *Normy $\|\cdot\|$ a $|\cdot|$ na vektorovém prostoru X jsou ekvivalentní, právě když existují čísla $m, M > 0$ taková, že*

$$m \cdot \|\cdot\| \le |\cdot| \le M \cdot \|\cdot\| .$$

Důsledek 1.5. *Jsou-li normy $\|\cdot\|$ a $|\cdot|$ na vektorovém prostoru X ekvivalentní, pak každá množina, ohraničená vzhledem k jedné z nich, je ohraničená i vzhledem k druhé.*

Platí i opačné tvrzení. Zformulujte je a dokažte!

Nechť X, Y jsou normované prostory $A \subset X$, $f: A \to Y$ zobrazení bod $a \in X$ hromadný bod množiny A (ne nutně prvek A). Prvek $L \in Y$ nazveme *limitou f pro x jdoucí k a*, pokud pro každou kouli $B_\varepsilon(L)$ existuje koule $B_\delta(a)$ taková, že $f(A \cap B_\delta(a) \setminus \{a\}) \subset B_\varepsilon(L)$. Zapisujeme

$$L = \lim_{x \to a} f(x)$$

Snadno lze ukázat, že $L \in Y$ je limitou $f: A \to Y$ pokud pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pokud $x \in A$, $\|x - a\|_X < \delta$ potom $\|f(x) - L\|_Y < \varepsilon$.

Podobnosti v definici limity a spojitosti lze jen těžko přehlédnout. Jde skutečně o těsně související pojmy.

Věta 1.6 (o souvislosti spojitosti a limity). *Nechť X, Y jsou normované prostory $A \subset X$, $f: A \to Y$ zobrazení a bod $a \in X$ hromadný bod množiny A. Bod $L \in Y$ je limitou f pro x jdoucí k a právě když zobrazení $\bar{f}: A \cup \{a\} \to$ definovaná*

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \textit{jestliže } x \in A; \\ L & \textit{jestliže } x = a, \end{cases}$$

je v a spojité.

D ů k a z. Plyne z definic obou pojmů. □

Příklady limity!!!!!

1.2. $\mathbb{R}^n$ jako normovaný prostor.. Uvažme zobrazení $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_\infty : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\|x\|_1 &= |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n| \\ \|x\|_2 &= \sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2 + \cdots + (x_n)^2} \\ \|x\|_\infty &= \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\}\end{aligned} \tag{1.2.1}$$

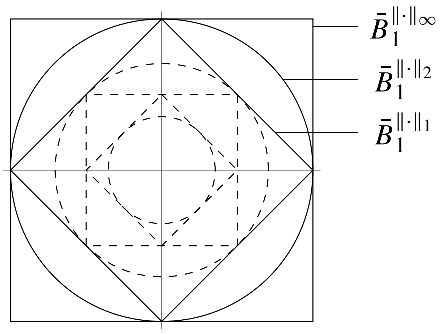
Lemma 1.7. *Každé ze zobrazení (1.2.1) je norma na* $\mathbb{R}^n$.
D ů k a z. Přenecháváme čtenáři. □

Snadno lze zjistit, že pro normu $\|\cdot\|_\infty$ platí

$$B_r^{\|\cdot\|_\infty}(x) = (x_1 - r, x_1 + r) \times (x_2 - r, x_2 + r) \times \cdots \times (x_n - r, x_n + r). \tag{1.2.2}$$
$$\bar{B}_r^{\|\cdot\|_\infty}(x) = [x_1 - r, x_1 + r] \times [x_2 - r, x_2 + r] \times \cdots \times [x_n - r, x_n + r]. \tag{1.2.3}$$

Otevřené koule v této normě jsou tedy krychle. Jak vypadají koule v nadefinovaných normách lze vidět na obrázku.

Pro $n = 1$ všechny tři uvedené normy splývají, otevřené (respektive uzavřené) koule jsou otevřené (respektive uzavřené) intervaly a indukují přirozenou topologii na $\mathbb{R}$.



Lemma 1.8. *Pro zobrazení* $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$ *platí*

$$\begin{aligned}&\|\cdot\|_1 \geq \|\cdot\|_2 \geq \|\cdot\|_\infty, \\ &\|\cdot\|_1 \leq \sqrt{n}\,\|\cdot\|_2, \\ &\|\cdot\|_2 \leq n\,\|\cdot\|_\infty,\end{aligned}$$

D ů k a z. Přenecháváme čtenáři. □

Z předchozího lemmatu a Věty 1.4 nyní plyne

Věta 1.9. *Normy* $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$ *jsou ekvivalentní.*

Topologie na $\mathbb{R}^n$, indukovaná normami $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$, se nazývá *přirozená (eukleidovská) topologie* $\mathbb{R}^n$.

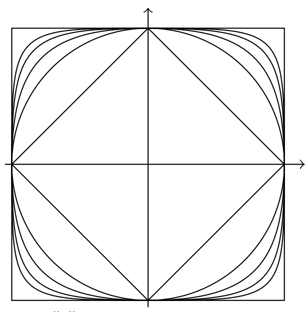
Uvedené definice můžeme ještě dále zobecnit, když pro libovolné $p \geq 1$ položíme

$$\|x\|_p := \sqrt[p]{|x_1|^p + |x_2|^p + \cdots + |x_n|^p}$$

Takto definované zobrazení $\|\cdot\|_p$ je norma; trojúhelníková nerovnost vyplývá z Minkowského nerovnosti

$$\sqrt[p]{|x_1 + y_1|^p + \cdots + |x_n + y_n|^p} \leq \sqrt[p]{|x_1|^p + \cdots + |x_n|^p} + \sqrt[p]{|y_1|^p + \cdots + |y_n|^p},$$

která platí pro každé $p \geq 1$.



Koule $B_1^{\|\cdot\|_p}(0)$, $p = 1, 2, 3, 4, 5, \infty$

Všechny normy $\|\cdot\|_p$ indukují tutéž topologii (jsou ekvivalentní); tato skutečnost snadno vyplývá Věty 1.4, Lemmatu 1.8 a Jensenovy nerovnosti

$$\sqrt[p]{|x_1|^p + \cdots + |x_n|^p} \leq \sqrt[q]{|x_1|^q + \cdots + |x_n|^q},$$

která platí pro každé p, q, $0 < p \leq q$.

Poznamenejme ještě, že označení $\|\cdot\|_\infty$ pro třetí normu z 1.2.1 je přirozené, jelikož platí

$$\lim_{p\to\infty} \sqrt[p]{|x_1|^p + \cdots + |x_n|^p} = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\} = \|x\|_\infty.$$

1.3. $\mathbb{R}^n$ **jako součin topologických prostorů.** Uvažme na množině $\mathbb{R}$ přirozenou topologii (jako obvykle) a na množině $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$ *topologii součinu topologických prostorů.* Víme, že bazí této topologie je systém všech otevřených kvádrů v $\mathbb{R}^n$, tj. množin

$$I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_n$$

kde $I_1, I_2, \dots, I_n$ jsou otevřené intervaly.

Věta 1.10. *Topologie součinu na $\mathbb{R}^n$ je shodná s přirozenou topologií.*
D ů k a z. Podle (1.2.2) existuje báze přirozené topologie na $\mathbb{R}^n$, jejíž každý prvek je otevřený kvádr tedy generátor součinové topologie. Tím je ukázáno, že přirozená topologie je silnější než součinová.

Naopak, jestliže x je prvkem nějaké množiny U otevřené v součinové topologii, existuje otevřený kvádr I, pro který platí

$$x \in I = (x_1 - r_1, x_1 + r_1) \times (x_2 - r_2, x_2 + r_2) \times \cdots \times (x_n - r_n, x_n + r_n) \subset U.$$

Položíme $r = \min\{r_1, r_2, \dots, r_n\}$. Potom platí

$$x \in B_r^{\|\cdot\|_\infty}(x) \subset (x_1 - r_1, x_1 + r_1) \times (x_2 - r_2, x_2 + r_2) \times \cdots \times (x_n - r_n, x_n + r_n) \subset I \subset U.$$

Našli jsme tedy kouli (zvolili jsme si výhodně normu $\|\cdot\|_\infty$ — však jsou všechny ekvivalentní) tedy otevřenou množinu v přirozené topologii, která je podmnožinou U. To dokazuje, že každý otevřený kvádr je otevřená množina v přirozené topologii. Součinová topologie je silnější něž přirozená. $\square$

Uvažujme funkci $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ k této funkci definujeme m funkcí $f_1, f_2, \dots f_m\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f_i = \mathrm{pr}_i \circ f$ a nazveme je *složkami funkce* f.

Máme-li funkci $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y, \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y\right)$ (otočení o $\pi/4$ proti směru hodinových ručiček), pak jeho složky jsou samozřejmě $f_1(x,y) = \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y$ a $f_2(x,y) = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y$. A často pak využíváme zápisu $f = (f_1, f_2)$.

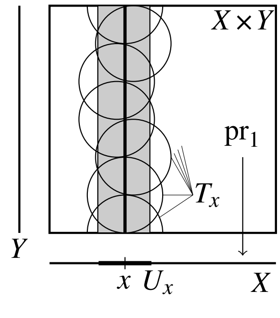
Následující věta nám usnadňuje ověřování spojitosti funkcí.

Věta 1.11. *Funkce $f\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je spojitá právě, když je spojitá každá z jejich složek.*
D ů k a z. $\square$

Věta 1.12. *Nechť $f\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $a \in \mathbb{R}^n$ hromadný bod A a $L = (l_1, l_2, \dots, l_m) \in \mathbb{R}^m$. Potom $\lim_{x\to a} f(x) = L$, právě když $\lim_{x\to a} f_i(x) = l_i$ pro každé $i = 1, 2, \dots, m$.*

1.4. Kompaktní množiny v $\mathbb{R}^n$. Z odstavce (1.1) víme, že $\mathbb{R}$ je Hausdorffův topologický prostor a že otevřené koule jsou souvislé množiny. Podívejme se nyní podrobně, jak vypadají kompaktní množiny v $\mathbb{R}^n$. Nejprve uvedeme pomocné topologické tvrzení.

Věta 1.13. *Buďte X a Y topologické prostory. Pak topologický prostor $X \times Y$ je kompaktní, právě když je kompaktní každý z prostorů X a Y.*



D ů k a z. Předpokládejme, že prostory X a Y jsou kompaktní a zvolme otevřené pokrytí S prostoru $X \times Y$. Pro každé $x \in X$ označme S_x systém těch množin $W \in S$, pro které $x \in \mathrm{pr}_1(W)$ (pr_1 je projekce $\mathrm{pr}_1\colon X \times Y \to X$). S_x je otevřené pokrytí množiny $\{x\} \times Y$, která je určitě kompaktní (proč?), má tedy konečné podpokrytí $T_x \subset S_x$ (Y je kompaktní). Označme nyní U_x průnik množin $\mathrm{pr}_1(W)$, kde $W \in T_x$. U_x je otevřená podmnožina X (jde o průnik konečně mnoha otevřených množin pr_1 je otevřené zobrazení). Systém $(U_x)_{x\in X}$ je otevřené pokrytí množiny X, má tedy konečné podpokrytí. Označme A konečnou množinu prvků $x \in X$ takovou, že systém $(U_x)_{x\in A}$ je otevřené pokrytí množiny X.

Konečně, položme $T = \bigcup_{x\in A} T_x$. Necháme nyní na čtenáři, aby ukázal, že $T \subset S$ a že T je konečné otevřené pokrytí množiny $X \times Y$.

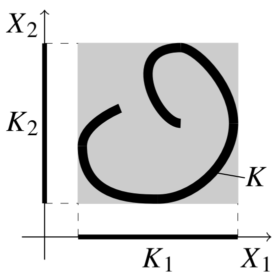
Nyní dokážeme opačnou implikaci. Předpokládejme, že $X \times Y$ je kompaktní a ukážeme, že potom je X kompaktní. Nechť $(U_\iota)_{\iota\in I}$ je otevřené pokrytí X, nalezneme jeho konečné podpokrytí. Pro každé $\iota \in I$ položme $O_\iota = \mathrm{pr}_1^{-1}(U_\iota)$, pak $(O_\iota)_{\iota\in I}$ je otevřeným pokrytím $X \times Y$. Jelikož je $X \times Y$ je kompakt existuje jeho konečné podpokrytí $(O_\iota)_{\iota\in K}$. Potom je ale $(U_\iota)_{\iota\in K}$konečným podpokrytím $(U_\iota)_{\iota\in I}$. Kompaktnost Y se ukáže obdobně. □

Důsledek 1.14. *Nechť $I_1, I_2, \dots, I_n \subset \mathbb{R}$ jsou kompaktní intervaly. Pak uzavřený kvádr $I_1 \times I_2 \times \dots \times I_n \subset \mathbb{R}^n$ je kompaktní množina.*
D ů k a z. Důkaz. Indukcí pomocí předchozí věty. □

Důsledek 1.15. *Nechť $\bar{B}(x)$ je uzavřená koule vzhledem k libovolné z norem $\|\cdot\|_p$, $1 \le p \le \infty$. Pak $\bar{B}(x)$ je kompaktní množina.*
D ů k a z. Plyne z toho, že každá uzavřená koule v $\mathbb{R}^n$ je podmnožinou nějakého kvádru a z toho, že uzavřená podmnožina kompaktní množiny je kompaktní. □

Tvrzení ve větě 1.13 lze samozřejmě indukcí rozšířit na součin konečného počtu topologických prostorů. Ovšem platí, že součin libovolného (i nekonečného) systému kompaktních prostoru je kompaktní — Tichonovova věta.

Věta 1.16. *Množina $K \subset \mathbb{R}^n$ je kompaktní, právě když je uzavřená a ohraničená.*



D ů k a z. Důkaz provedeme pro $n = 2$. Předpokládejme, že $K \subset \mathbb{R}^2$ je kompaktní. Jelikož je $\mathbb{R}^2$ Hausdorffův, tak je K uzavřená. Zbývá ohraničenost. Položme $K_1 = \mathrm{pr}_1(K)$ a $K_2 = \mathrm{pr}_2(K)$, kde $\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2$ jsou, jak již čtenář vytušil, první a druhá projekce. Tyto projekce jsou spojité a K_1, K_2 kompaktní v $\mathbb{R}$ a tedy ohraničené. Existuje tedy uzavřený ohraničené interval $I_r = [-r, r]$ takový, že $K_1, K_2 \subset I_r$. Potom ovšem $B_r^{\|\cdot\|_\infty}(0) = I_r \times I_r \supset K$.

Nyní opačná implikace, nechť $K \subset \mathbb{R}^2$ je uzavřená a ohraničená. Tedy $K \subset \bar{B}_r^{\|\cdot\|\infty}(0)$, jelikož $\bar{B}_r^{\|\cdot\|\infty}(0) = [-r, r] \times [-r, r]$, což je kompaktní množina podle důsledku 1.14, potom je K uzavřenou podmnožinou kompaktní množiny a tedy je sama kompaktní. □

1.5. Spojitost základních zobrazení. Nechť $s, p\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jsou zobrazení definovaná předpisem

$$s(x_1, x_2) = x_1 + x_2$$
$$p(x_1, x_2) = x_1 x_2$$

Ukážeme, že tato zobrazení jsou spojitá.

Nechť $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, $s = s(x_0, y_0) = x_0 + y_0$, zvolme libovolné $\varepsilon > 0$. Pokud libovolné $(x', y') \in B_\varepsilon^{\|\cdot\|_1}(x_0, y_0)$, pak platí

$$|x' - x_0| + |y' - y_0| < \varepsilon$$

Máme

$$|s(x', y') - s(x_0, y_0)| = |x' + y' - x_0 - y_0| \le |x' - x_0| + |y' - y_0| < \varepsilon.$$

což znamená, že pro každé $(x', y') \in B_\varepsilon^{\|\cdot\|_1}(x_0, y_0)$ platí $s(x', y') \in (x_0 + y_0 - \varepsilon, x_0 + y_0 + \varepsilon)$ nebo-li $s(B_\varepsilon^{\|\cdot\|_1}(x_0, y_0)) \subset (s(x_0, y_0) - \varepsilon, s(x_0, y_0) + \varepsilon)$ a dokazuje spojitost zobrazení s v bodě (x_0, y_0).

Nyní dokážeme spojitost zobrazení p. Nechť $(t, x) \in \mathbb{R}^2$, $y = p(t, x) = tx$, zvolme $\varepsilon > 0$. Položme $M = \|(t, x)\|_1$ a $\delta = \min\{1, \varepsilon/2(M + 1)\}$. Pro libovolné $(t', x') \in B_\delta^{\|\cdot\|_1}(t, x)$ máme $|t'| < M + 1$, $|x' - x| < \delta$, $|t' - t| < \delta$, $|x| \le M < M + 1$ a

$$
\begin{aligned}
|p(t', x') - tx| &= |t'x' - tx| = |t'(x' - x) + (t' - t)x| \\
&\le |t'| \cdot |x' - x| + |t' - t||x| < (M + 1)\delta + \delta(M + 1) \\
&\le (M + 1)\frac{\varepsilon}{2(M + 1)} + \frac{1}{2(M + 1)}(M + 1) = \varepsilon.
\end{aligned}
$$

To dokazuje spojitost zobrazení p v bodě (t, x).

Ze spojitosti zobrazení s a p a z věty o spojitosti kompozice spojitých zobrazení plynou známá tvrzení o spojitosti součtu a součinu dvou spojitých funkcí.

Zobrazení s je samozřejmě lineární. Dokažte, že každé lineární zobrazení $l\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je spojité.

1.6. Konečněrozměrné normované prostory. V odstavci 1.2 jsme zavedli různé normy na prostoru $\mathbb{R}^n$ a o některých z nich jsme ukázali, že jsou ekvivalentní. Nyní ukážeme, že se jedná o speciální případ obecnějšího tvrzení.

Věta 1.17. *Libovolné dvě normy na konečněrozměrném vektorovém prostoru jsou ekvivalentní.*
D ů k a z. Stačí dokázat, že libovolné dvě normy na $\mathbb{R}^n$ jsou ekvivalentní (proč?). Nechť tedy $\|\cdot\|$ je norma na $\mathbb{R}^n$. Dokážeme, že je ekvivalentní normě $\|\cdot\|_1$.

Označme $(e_1, \dots, e_n)$ kanonickou bázi v $\mathbb{R}^n$ a položme $M = \max\{\|e_1\|, \|e_2\|, \dots, \|e_n\|\}$. Pro libovolný prvek $x \in \mathbb{R}^n$ platí

$$
\begin{aligned}
\|x\| = \|x^1 e_1 + x^2 e_2 + \dots + x^n e_n\| &\le |x^1| \cdot \|e_1\| + |x^2| \cdot \|e_2\| + \dots + |x^n| \cdot \|e_n\| \\
&\le |x^1| \cdot M + |x^2| \cdot M + \dots + |x^n| \cdot M = M\|x\|_1.
\end{aligned}
$$

Tím je dokázáno, že norma $\|\cdot\|$ je slabší než norma $\|\cdot\|_1$ (Věta 1.3).

Dokažme nyní naopak, že norma $\|\cdot\|$ je silnější než norma$\|\cdot\|_1$. Označme

$$
S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_1\}
$$

(jednotková sféra vzhledem k normě $\|\cdot\|_1$ se středem v nule). Množina S je vzhledem k normě $\|\cdot\|_1$ ohraničená. V topologii normy $\|\cdot\|_1$ je také uzavřená (jako vzor uzavřené množiny $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ při spojitém zobrazení norma). Je tedy v této topologii kompaktní (Věta 1.16), což znamená, že je kompaktní i ve slabší topologii normy $\|\cdot\|$ (proč?). Dále: funkce $\|\cdot\|\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je vzhledem k normě $\|\cdot\|$ spojitá, nabývá tedy na množině S minimum m. Je jistě $m > 0$ a $\bar{B}_m(0)^{\|\cdot\|} \subset \bar{B}_1^{\|\cdot\|_1}(0)$. Podle Věty 1.3 je tedy norma $\|\cdot\|$ silnější než norma $\|\cdot\|_1$.

Tím je věta dokázána. □

1.7. Prostory lineárních zobrazení. V tomto odstavci zavedeme normovanou strukturu na prostoru lineárních zobrazení dvou vektorových prostorů.

Mějme dva konečněrozměrné normované prostory X, Y. Označme $\mathrm{L}(X;Y)$ vektorový prostor lineárních zobrazení z X do Y.

Tento vektorový prostor je, jak víme, konečněrozměrný. Jeho dimenze je rovna součinu dimenzí prostorů X a Y.

Pro každé $l \in \mathrm{L}(X;Y)$ položme

$$
\|l\| = \max_{x \in \bar{B}_1(0)} \|l(x)\| \tag{1.7.1}
$$

(množina $\bar{B}_1(0)$ je kompaktní, zobrazení l a $\|\cdot\|$ jsou spojitá; kompozice těchto zobrazení na této množině tedy má maximum).

Předpisem (1.7.1) je definováno zobrazení $\|\cdot\|\colon \mathrm{L}(X;Y) \to \mathbb{R}$.

Lemma 1.18. *Zobrazení* $\|\cdot\|\colon \mathrm{L}(X;Y) \to \mathbb{R}$ *je norma.*
D ů k a z. Musíme ověřit podmínky z definice normy.

1. Nechť $l \neq 0$. Pak existuje vektor $x \in X$, pro nějž je $l(x) \neq 0$. Platí $\|x\| \neq 0$ a pro vektor $x_0 = x/\|x\|$ platí $x_0 \in \bar{B}_1(0)$ a $\|l(x_0)\| > 0$. Tedy $\|l\| > 0$.
2. Mějme $l \in \mathrm{L}(X;Y)$ a $c \in \mathbb{R}$. Platí
$$\|c \cdot l\| = \max_{x\in\bar{B}_1(0)} \|c \cdot l(x)\| = \max_{x\in\bar{B}_1(0)} |c| \cdot \|l(x)\| = |c| \cdot \max_{x\in\bar{B}_1(0)} \|l(x)\| = |c| \cdot \|l\|.$$
3. Pro $l_1, l_2 \in \mathrm{L}(X;Y)$ dostáváme
$$\begin{aligned}\|l_1 + l_2\| &= \max_{x\in\bar{B}_1(0)} \|(l_1 + l_2)(x)\| = \max_{x\in\bar{B}_1(0)} \|l_1(x) + l_2(x)\|\\ &\leq \max_{x\in\bar{B}_1(0)} (\|l_1(x)\| + \|l_2(x)\|) = \max_{x\in\bar{B}_1(0)} \|l_1(x)\| + \max_{x\in\bar{B}_1(0)} \|l_2(x)\| = \|l_1| + \|l_2\|.\end{aligned}$$

□

Věta 1.19. *Pro libovolný vektor $x \in X$ a lineární zobrazení $l \in \mathrm{L}(X;Y)$ platí*
$$\|l(x)\| \leq \|l\| \cdot \|x\|.$$

D ů k a z. Pro vektor $x_0 = x/\|x\|$ platí $x_0 \in \bar{B}_1(0)$, což podle (1.7.1) znamená, že $\|l(x_0)\| \leq \|l\|$. Nyní dostáváme
$$\|l(x)\| = \|x\| \cdot \|l(x_0)\| \leq \|x\| \cdot \|l\|. \ \square$$

V případě $X = \mathbb{R}^n$ a $Y = R^m$ můžeme místo prvků prostoru $\mathrm{L}(X;Y)$ uvažovat matice typu $m \times n$. Přesněji řečeno, zobrazení z $\mathrm{L}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$ do $M_{m,n}$ (to je prostor matic o m řádcích a n sloupcích s reálnými prvky), které lineárnímu zobrazení l přiřadí jeho matici vzhledem ke kanonickým bazím, je izomorfismus vektorových prostorů.

Na prostoru $\mathrm{L}(X;Y)$ můžeme tedy kromě normy (1.7.1) uvažovat i libovolnou jinou normu, kterou umíme zavést na prostoru $M_{m,n}$. Tyto normy budou podle Věty 1.17 ekvivalentní. Jelikož prostor $M_{m,n}$ je izomorfní s prostorem $\mathbb{R}^{mn}$ (matice typu $m \times n$ jsou mn-tice čísel), můžeme použít například libovolnou normu zavedenou v odstavci 1.2. Tedy, pro matici $A = (a^i_j)$ můžeme položit
$$\begin{aligned}\|A\|_1 &= \sum_{i,j} |a^i_j|,\\ \|A\|_2 &= \sum_{i,j} \sqrt{(a^i_j)^2},\\ \|A\|_\infty &= \sum_{i,j} \max_{i,j} |a^i_j|.\end{aligned}$$

Věta 1.20. *Nechť* $|\cdot|$ *je libovolná norma na prostoru* $\mathrm{L}(X;Y)$. *Pak existuje číslo M takové, že pro každé $l \in \mathrm{L}(X;Y)$ a $x \in X$ platí*
$$\|l(x)\| \leq M|l| \cdot \|x\|.$$

D ů k a z. Plyne z vět 1.3, 1.17, a 1.19. □

DOPLŇKY

Prostor l_2
Ohraničený lineární operátor
Spojitost lineárního operátoru

2. Derivace prvního řádu

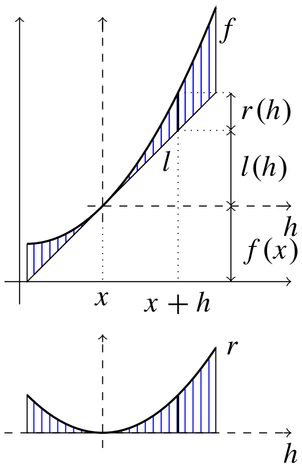
V této základní kapitole pojednáváme o diferencovatelnosti zobrazení $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ (podmnožina U je vždy otevřená). Zavádíme několik základních pojmů derivace: Fréchetovu, Gâteauxovu, derivace podle vektoru a parciální derivace. Ukazujeme souvislost těchto pojmů s pojmem derivace z prvního ročníku. Ukazujeme pravidla pro derivování základních zobrazení. Vysvítá, že pouze Fréchetova derivace splňuje základní větu o derivaci složeného zobrazení: derivace kompozice dvou zobrazení je rovna kompozici jejich derivací. Slabší derivace podle vektoru a zejména parciální derivace se zase poměrně snadno počítají. Ukazujeme, že v případě spojitě diferencovatelných zobrazení lze výhody všech pojmů derivace spojit: spojitou diferencovatelnost zobrazení na otevřené množině lze snadno odhalit pomocí parciálních derivací a přitom se jedná o pojem se stejně hezkými (či dokonce, jak zjistíme později, hezčími) vlastnostmi, jaké má Fréchetova derivace.

Většina výsledků této kapitoly je nezávislá na volbě normy na prostorech $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$. Na řídké výjimky vždy upozorňujeme.

2.1. Fréchetova derivace. Než přistoupíme k definici toho pojmu, podívejme se derivaci funkce na $\mathbb{R}$: Definovali jsme derivaci funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ v bodě x jako následující limitu

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}. \tag{2.1.1}$$

Geometrický význam derivace (viz obrázek) je pak směrnice tečny ke grafu funkce f v bodě $(x, f(x))$. V čárkovaných souřadnicích tečna hraje roli lineárního zobrazení $l(h) = f'(x) \cdot h$. Pokud si toto uvědomíme, definici derivace pak lze formulovat takto: Mějme $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a $x \in \mathbb{R}$, potom $f'(x)$ je derivací, pokud



$$r(h) = f(x+h) - f(x) - l(h), \tag{2.1.2}$$

kde $l(h) = f'(x) \cdot h$, jde k nule rychleji než lineární zobrazení, tedy splňuje

$$\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h} = 0. \tag{2.1.3}$$

Jinak řečeno, v daném bodě „zkoušíme" různé hodnoty $f'(x)$ (tedy různá zobrazení l), ke každé podle vzorce (2.1.2) určíme zbytkovou funkci r a pokud ta splňuje (2.1.3), našli jsme derivaci.

Podobného postupu použijeme pro definici diferencovatelnosti pro funkce $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Zobrazení $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je *diferencovatelné v bodě* $x \in U$, existuje-li lineární zobrazení $l\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ takové, že

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|f(x+h) - f(x) - l(h)\|}{\|h\|} = 0. \tag{2.1.4}$$

V podmínce (2.1.4) vystupují dvě normy, které jsou označeny stejným symbolem: jedna na $\mathbb{R}^n$ a druhá na $\mathbb{R}^m$.

Věta 2.1. *Lineární zobrazení l, splňující (2.1.4), existuje nejvýše jedno.*
D ů k a z. Připusťme, že jsou taková zobrazení dvě, l a $\bar{l}$, a že existuje vektor $h \in \mathbb{R}^n$ takový, že $l(h) \neq \bar{l}(h)$. Jelikož má lineární zobrazení v nule hodnotu nula musí $h \neq 0$. Dále

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{f(x+th) - f(x) - l(th)}{\|th\|} = 0, \qquad (l \text{ splňuje (2.1.4)})$$
$$\lim_{t\to 0^+} \frac{f(x+th) - f(x) - \bar{l}(th)}{\|th\|} = 0. \qquad (\bar{l} \text{ splňuje (2.1.4)})$$

Máme

$$0 \neq \frac{l(h) - \bar{l}(h)}{\|h\|} = \lim_{t\to 0^+} \frac{l(th) - \bar{l}(th)}{\|th\|} = \qquad \text{(limita z konstantního výrazu)}$$
$$= - \lim_{t\to 0^+} \frac{f(x+th) - f(x) - l(th)}{\|th\|} + \lim_{t\to 0^+} \frac{f(x+th) - f(x) - \bar{l}(th)}{\|th\|} = 0.$$

Tento spor dokazuje větu. □

Lineární zobrazení l z předchozí definice se označuje $\mathrm{d}f(x)$ a nazývá *(Fréchetovou) derivací zobrazení f v bodě x.*

Příklad. Uvažujme funkci $f(x,y) = x^2 + y^2$ a lineární zobrazení $l\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $l(h,k) = 2h + 2k$. Ověřme, že l je diferenciálem f v bodě $x = (1,1)$.

$$r(h,k) = f(x+h, y+k) - f(x,y) - l(h,k) = (1+h)^2 + (1+k)^2 - 1^2 - 1^2 - 2h - 2k = \\ = h^2 + k^2.$$

Ověříme (2.1.4). Máme

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{|r(h,k)|}{\|(h,k)\|} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h^2+k^2}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \sqrt{h^2+k^2} = 0.$$

Následující tvrzení uvádějí základní vlastnosti Fréchetovy derivace.

Věta 2.2 (o diferenciálu). *Zobrazení $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je diferencovatelné v bodě x, právě když existuje lineární zobrazení $l\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, okolí $V \subset \mathbb{R}^n$ bodu $0 \in \mathbb{R}^n$ a zobrazení $\varepsilon\colon V \to \mathbb{R}^m$ tak, že*

$$\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0 \tag{2.1.5}$$

a pro každé $h \in V$

$$f(x+h) - f(x) = l(h) + \varepsilon(h)\|h\|. \tag{2.1.6}$$

Platí $l(h) = \mathrm{d}f(x)(h)$.
D ů k a z. Podmínka (2.1.6) společně s (2.1.5) je ekvivalentní podmínce

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - l(h)}{\|h\|} = 0.$$

což dokazuje tvrzení. □

Věta 2.3. *Zobrazení $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, diferencovatelné v bodě x, je v tomto bodě spojité.*
D ů k a z. Z (2.1.6) plyne $\lim_{h\to 0} f(x+h) - f(x) = 0$. □

Porovnání s případem R do R — pozn. konečnost derivace !!!!!

Nyní dokážeme základní větu o derivaci složeného zobrazení. Nejprve pomocné lemma:

Lemma 2.4. *Nechť zobrazení $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je diferencovatelné v bodě $x \in U$. Pak zobrazení*

$$h \mapsto \frac{f(x+h) - f(x)}{\|h\|}$$

je na nějakém okolí bodu $0 \in \mathbb{R}^n$ ohraničené.
D ů k a z. Podle věty 2.2 je

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{\|h\|} = \mathrm{d}f(x)\left(\frac{h}{\|h\|}\right) + \varepsilon(h).$$

Norma prvního sčítance na pravé straně je ohraničena číslem $\|\mathrm{d}f(x)\|$, druhý má v bodě $0 \in \mathbb{R}^n$ podle zmíněné věty limitu rovnu 0 je tedy na nějakém okolí tohoto bodu rovněž ohraničený. □

Věta 2.5 (o derivaci složeného zobrazení). *Nechť zobrazení $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ je diferencovatelné v bodě $x \in U$, zobrazení $g\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ je diferencovatelné v bodě $y = f(x)$ Pak zobrazení $g \circ f$ je diferencovatelné v bodě x a platí*

$$\mathrm{d}(g \circ f)(x) = \mathrm{d}g(y) \circ \mathrm{d}f(x). \tag{2.1.7}$$

D ů k a z. Označme $l_f = \mathrm{d}f$, $l_g = \mathrm{d}g$. Pro $h \in \mathbb{R}^n$ označme

$$k = f(x+h) - f(x) = f(x+h) - y.$$

V následujícím (krom jiného) přičteme a odečteme výraz $l_g(f(x+h) - f(x))$, dvakrát použijeme předchozí rovnici, použijeme větu 1.19 a 2.2, máme

$$\begin{aligned}
&\frac{\|g(f(x+h)) - g(f(x)) - l_g(l_f(h))\|}{\|h\|} \leq \\
&\leq \frac{\|g(f(x+h)) - g(f(x)) - l_g(f(x+h) - f(x))\|}{\|h\|} + \frac{\|l_g(f(x+h) - f(x)) - l_g(l_f(h))\|}{\|h\|} \leq \\
&\leq \frac{\|g(y+k) - g(y) - l_g(k)\|}{\|h\|} + \|l_g\| \frac{\|f(x+h) - f(x) - l_f(h)\|}{\|h\|} = \\
&= \frac{\|k\| \cdot \|\varepsilon(k)\|}{\|h\|} + \|l_g\| \frac{\|f(x+h) - f(x) - l_f(h)\|}{\|h\|},
\end{aligned}$$

kde $\lim_{u \to 0} \varepsilon(u) = 0$. Z věty 2.3 plyne, že při $h \to 0$ je $\lim_{h \to 0} k = 0$ Navíc, podle lemmatu 2.4 je výraz $\|k\|/\|h\|$ na nějakém okolí nuly ohraničený. Proto je limita výrazu na pravé straně rovna nule a věta dokázána. □

Věta 2.6. *Každé konstantní zobrazení $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je diferencovatelné v každém bodě $x \in \mathbb{R}^n$. Platí $\mathrm{d}f(x) = 0$.*
D ů k a z.

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - 0}{\|h\|} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{\|h\|} = 0. \ \square$$

Věta 2.7. *Každé lineární zobrazení $l\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je diferencovatelné v každém bodě $x \in \mathbb{R}^n$. Platí $\mathrm{d}f(x) = l$.*
D ů k a z.

$$\lim_{h \to 0} \frac{l(x+h) - l(x) - l(h)}{\|h\|} = \lim_{h \to 0} \frac{l(x) + l(h) - l(x) - l(h)}{\|h\|} = 0. \ \square$$

Věta 2.8. *Zobrazení $f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je diferencovatelné v bodě $x \in U$, právě když jsou v tomto bodě diferencovatelné jeho složky $f_1, f_2, \ldots, f_m$. Pro každé $h \in \mathbb{R}^n$ platí*

$$\mathrm{d}f(x)(h) = (\mathrm{d}f_1(x)(h), \mathrm{d}f_2(x)(h), \ldots, \mathrm{d}f_m(x)(h)). \tag{2.1.8}$$

D ů k a z. Zřejmý. □

Vztah (2.1.8) se dá napsat takto:

$$\mathrm{d}f(x) = (\mathrm{d}f_1(x), \mathrm{d}f_2(x), \ldots, \mathrm{d}f_m(x)).$$

Věta 2.9. *Zobrazení $s: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $s(x, y) = x + y$, a $p: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $p(x, y) = xy$, jsou diferencovatelná v každém bodě $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Platí*

$$\mathrm{d}s(x, y)(h, k) = h + k, \mathrm{d}p(x, y)(h, k) = yh + xk.$$

D ů k a z. Zobrazení s je lineární, proto podle věty 2.7 je $\mathrm{d}s(x, y) = s$ tedy $\mathrm{d}s(x, y)(h, k) = s(h, k) = h + k$.

Pro zobrazení p máme

$$0 \leq \frac{|p(x+h, y+k) - p(x, y) - yh - xk|}{\|(h, k)\|_\infty} = \frac{|(x+h)(y+k) - xy - yh - xk|}{\|(h, k)\|_\infty} =$$
$$= \frac{|hk|}{\max\{|h|, |k|\}} \leq \frac{|h| \max\{|h|, |k|\}}{\max\{|h|, |k|\}} = |h|.$$

Takže

$$\lim_{(h,k)\to 0} \frac{|p(x+h, y+k) - p(x, y) - yh - xk|}{\|(h, k)\|_\infty} = 0$$

a tvrzení je dokázáno. □

Věta 2.10. *Jsou-li $f, g: U \subset \mathbb{R}^n \to R^m$ zobrazení diferencovatelná v bodě $x \in U$, pak pro libovolná čísla $a, b \in \mathbb{R}$ je zobrazení $af + bg$ diferencovatelné v bodě x a platí*

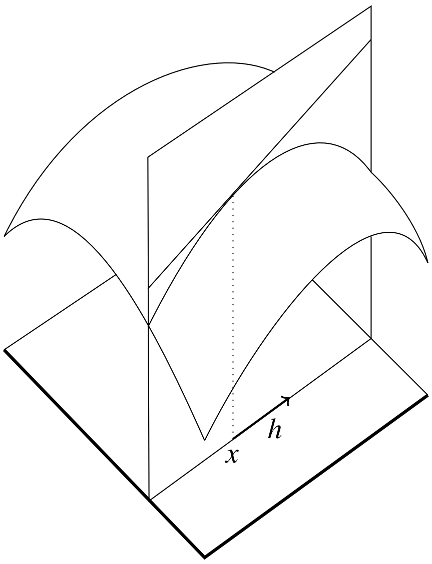
$$\mathrm{d}(af + bg)(x) = a\mathrm{d}f(x) + b\mathrm{d}g(x).$$

D ů k a z. Označme $l: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ lineární zobrazení, přiřazující každému vektoru $(h, k) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ vektor $ah + bk$ a nechť (f, g) je zobrazení $x \mapsto (f(x), g(x))$. Potom $af + bg = l \circ (f, g)$. Nyní máme

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(af + bg)(x) &= \mathrm{d}(l \circ (f, g))(x) = && \text{(definice } l\text{)}\\
&= \mathrm{d}l(f(x), g(x)) \circ \mathrm{d}(f, g)(x) = && \text{(věta 2.5)}\\
&= l \circ (\mathrm{d}f, \mathrm{d}g(x)) = && \text{(veta 2.7 a 2.8)}\\
&= a\mathrm{d}f(x) + b\mathrm{d}g(x). \ \square && \text{(opět defince } l\text{)}
\end{aligned}$$

2.2. Derivace podle vektoru, Gâteauxova derivace.

Nechť $f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $x \in U$ a $h \in \mathbb{R}^n$. *Derivací zobrazení f podle vektoru h v bodě x* rozumíme limitu



$$\frac{\partial f}{\partial h}(x) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x+th) - f(x)}{t}. \tag{2.2.1}$$

Nechť $g_{x,h}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ je zobrazení, definované předpisem

$$g_{x,h}(t) = x + th. \tag{2.2.2}$$

Přímo z uvedené definice plyne následující jednoduché tvrzení.

Lemma 2.11. *Zobrazení $f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ má v bodě $x \in U$ derivaci podle vektoru $h \in \mathbb{R}^n$, právě když je zobrazení $f \circ g_{x,h}$ diferencovatelné v nule a platí*

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial h}(x) &= \mathrm{d}(f \circ g_{x,h})(0)(1) = \\ &= \big((f_1 \circ g_{x,h})'(0), \dots, (f_m \circ g_{x,h})'(0)\big). \end{aligned} \tag{2.2.3}$$

D ů k a z. Předpokládejme, že zobrazení $f \circ g_{x,h}$ je diferencovatelné v nule. Pak podle věty 2.2 je ve vztahu

$$(f \circ g_{x,h})(t) - (f \circ g_{x,h})(0) = \mathrm{d}(f \circ g_{x,h})(0)(t) + t\varepsilon(t)$$

$\lim_{t\to 0} \varepsilon(t) = 0$. Vzhledem k tomu, že $(f \circ g_{x,h})(t) = f(x+th)$, dostáváme současně existenci uvažované derivace podle vektoru i první rovnost v (2.2.3). Druhá rovnost plyne z věty 2.8.

Obrácená implikace plyne ihned z !!!!!!!!. □

Derivaci zobrazení f v bodě x podle vektoru h budeme označovat následujícími způsoby

$$\frac{\partial f}{\partial h}(x), \quad \mathrm{d}_h f(x).$$

Derivace zobrazení f v bodě x podle vektoru h je tedy derivací zobrazení $f \circ g_{x,h}$ v nule. To, společně s větou 2.8, umožňuje počítat derivace podle vektorů velice snadno.

Příklad. Mějme $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 + y^2$, spočítejme derivaci v bodě $(1,1)$ podle vektoru $h = (1,2)$. Podle předchozí věty spočítáme $f \circ g_{x,h}$. Předně $g_{(1,1),(1,2)}: t \mapsto (1+1t, 1+2t)$, tedy

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial(1,2)}(1,1) &= (f(1+t, 1+2t))'_{t=0} = \Big((1+t)^2 + (1+2t)^2\Big)'_{t=0} = \\ &= (2(1+t) + 4(1+2t))_{t=0} = 6.\end{aligned}$$

Je-li zobrazení $h \mapsto \mathrm{d}_h f(x)$, které vektoru h přiřazuje derivaci ve směru h, lineární, nazýváme je *Gâteauxovou derivací zobrazení f v bodě x* a značíme $\mathrm{d}_G f(x)$. Je tedy $\mathrm{d}_G f(x) \in \mathrm{L}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$.

Lemma 2.12. *Je-li zobrazení $f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ diferencovatelné v bodě $x \in U$, má v tomto bodě i Gâteauxovu derivaci a platí*

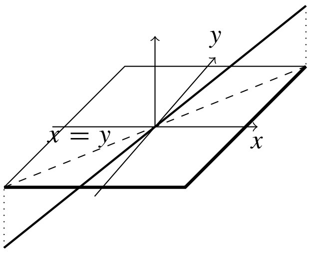
$$\mathrm{d}_G f(x) = \mathrm{d}f(x).$$

D ů k a z. Uvažujme zobrazení $g_{x,h}$ z (2.2.2). Toto zobrazení je diferencovatelné a platí $\mathrm{d}g_{x,h}(0)(t) = th$. Podle věty 2.5 máme

$$\mathrm{d}(f \circ g_{x,h})(0)(1) = \left(\mathrm{d}f(x) \circ \mathrm{d}g_{x,h}(0)\right)(1) = \mathrm{d}f(x)(h).$$

Tvrzení tedy plyne z lemmatu 2.11. $\square$

V následujících příkladech vidíme, že Gâteauxova derivace i derivace ve směru vektoru mohou existovat i funkcí, u kterých je diferencovatelnost vyloučena.



Příklad.
Uvažme funkci $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definovanou předpisem

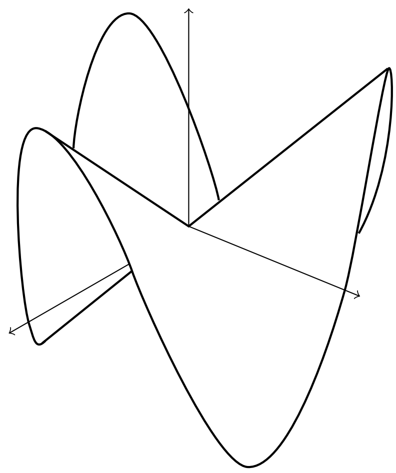
$$f(x,y) = \begin{cases} x & \text{když } x = y, \\ 0 & \text{jindy.} \end{cases}$$

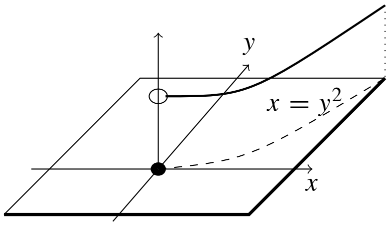
Vidíme, že derivace této funkce v nule podle libovolného vektoru $(h,k) \in \mathbb{R}^2$ existuje. Platí $\dfrac{\partial f}{\partial(h,k)}(0,0) = 0$ pro $h \neq k$ a $\dfrac{\partial f}{\partial(h,k)}(0,0) = (h,k)$ pro $h = k$, toto zobrazení ovšem není lineární (například derivace podle vektorů $(1,0)$ a $(0,1)$ je rovna nule, ale derivace podle jejich součtu, vektoru $(1,1)$ je nenulová). Tedy $\mathrm{d}_G f(0,0)$ neexistuje.

Přesvědčte se, že podobnou vlastnost má funkce

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 3xy^2}{x^2 + y^2}, & \text{když } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{když } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Tato funkce je dokonce spojitá. Graf této funkce vidíme na následujícím obrázku:





Příklad
Uvažujme nyní funkci $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definovanou předpisem

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{když } x > 0,\ y = x^2, \\ 0 & \text{jindy.} \end{cases}$$

Snadno zjistíme, že tato funkce má v nule Gâteauxovu derivaci, ačkoli tam není spojitá. Vidíme tedy, že pro Gâteauxovu derivaci neplatí věta 2.3.

Pomocí posledně uvedené funkce lze snadno dokázat, že pro Gâteauxovu derivaci neplatí ani věta 2.5. Stačí definovat funkci $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ předpisem

$$g(t) = (t, t^2)$$

a uvažovat kompozici $f \circ g$.

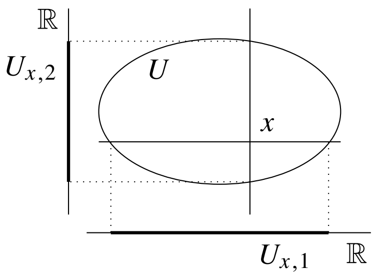
2.3. Parciální derivace. Nechť $f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $x \in X$. Označme $e_1, e_2, \dots, e_n$ kanonickou bázi vektorového prostoru $\mathbb{R}^n$ (tedy $e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, \dots, 0, 1)$. Derivace zobrazení f v bodě x podle e_i se nazývá *parciální derivací zobrazení f podle i-té proměnné v bodě x*. Klademe

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) &= \frac{\partial f}{\partial e_1}(x),\\
\frac{\partial f}{\partial x_2}(x) &= \frac{\partial f}{\partial e_2}(x),\\
&\vdots\\
\frac{\partial f}{\partial x_n}(x) &= \frac{\partial f}{\partial e_n}(x),
\end{aligned}$$

Takto se tradičně označují parciální derivace, z důvodu potřeby kompaktnějšího zápisu nebo v případech, kdy nejsou pojmenovány proměnné, označujeme parciální derivace také

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x), \quad \partial_{x_i} f(x), \quad \partial_i f(x).$$

Pro uvedené zobrazení f, bod $x \in U$ a číslo $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ označme $U_{x,i}$ množinu všech $t \in \mathbb{R}$ takových, že



$$(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_n) \in U$$

a $f_{x,i}$ zobrazení z $U_{x,i} \to \mathbb{R}^m$, definované předpisem

$$f_{x,i}(t) = f(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_n).$$

Toto zobrazení se nazývá *i-té parciální zobrazení zobrazení f v bodě x*.

Věta 2.13. *Zobrazení $f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ má v bodě $x \in U$ parciální derivaci podle i-té proměnné, právě když je v bodě x_i diferencovatelné parciální zobrazení $f_{x,i}$. Pro každé $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ platí*

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x) = (f_{x,i})'_j(x_i).$$

Důkaz. Necháváme na čtenáři. □

Věta 2.13 ukazuje způsob, kterým se ve skutečnosti parciální derivace počítají.

Pro zobrazení $f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, které má v bodě $x \in U$ parciální derivace podle všech proměnných, klademe

$$f'(x) = \begin{pmatrix}
\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x)\\
\frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x)\\
\vdots & \vdots & & \vdots\\
\frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x)
\end{pmatrix}.$$

Tato matice se jmenuje *matice parciálních derivací zobrazení f v bodě x*. V literatuře se čtenář může také setkat s označením *Jakobiho matice*

Předpokládejme, že zobrazení $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ má v bodě $x \in U$ Gâteauxovu derivaci. Pak pro libovolný vektor $h \in \mathbb{R}^n$, $h = h^1 e_1 + h^2 e_2 + \dots + h^n e_n$ platí

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}_G f(x)(h) &= \mathrm{d}_G f(x)(h^1 e_1 + h^2 e_2 + \dots + h^n e_n) = \\
&= h^1 \mathrm{d}_G f(x)(e_1) + h^2 \mathrm{d}_G f(x)(e_2) + \dots + h^n \mathrm{d}_G f(x)(e_n) = \\
&= h^1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) + h^2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) = \\
&= f'(x) \cdot h.
\end{aligned}$$

Zde jsme využili faktu, že z definice je $\mathrm{d}_G f(x)$ je lineární, dále že Gâteauxova derivace přiřazuje derivaci ve směru vektoru, což je v případě vektorů e_i parciální derivace.

To dokazuje následující větu

Věta 2.14. *Pro zobrazení $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, které má Gâteauxovu derivaci v bodě $x \in U$, je matice $f'(x)$ maticí lineárního zobrazení $\mathrm{d}_G f(x)$ v kanonické bázi.*

Pokud je zobrazení f diferencovatelné (Fréchet), pak podle lemmatu 2.12 a předchozí věty dostaneme, že i matice $\mathrm{d}f(x)$ je $f'(x)$.

Příklad. Mějmě zobrazení $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (x^2 + y^2, xy)$. Diferenciál $\mathrm{d}f$ v bodě (x,y) bude mít (v kanonických bázích) matici

$$f'(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ y & x \end{pmatrix},$$

v bodě $(1,2)$ tedy bude

$$f'(1,2) = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

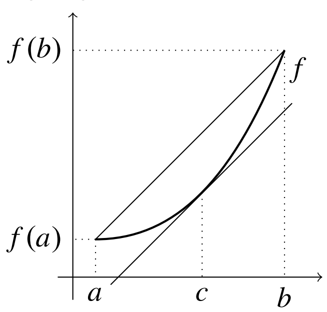
Z uvedeného a z věty 2.5 rovněž okamžitě vyplývá následující věta:

Věta 2.15. *Nechť zobrazení $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je diferencovatelné v bodě $x \in U$, zobrazení $g\colon V \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ je diferencovatelné v bodě $y = f(x)$. Pak*

$$(g \circ f)'(x) = g'(y) \cdot f'(x).$$

2.4. Věty o střední hodnotě.

Lagrangeova věta o střední hodnotě (nebo o přírůstku funkce) patří k základním nástrojům matematické analýzy. Zopakujme si ji. Nechť $f\colon [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je spojitá a má derivaci v každém bodě (a,b) potom existuje bod $c \in (a,b)$ takový, že



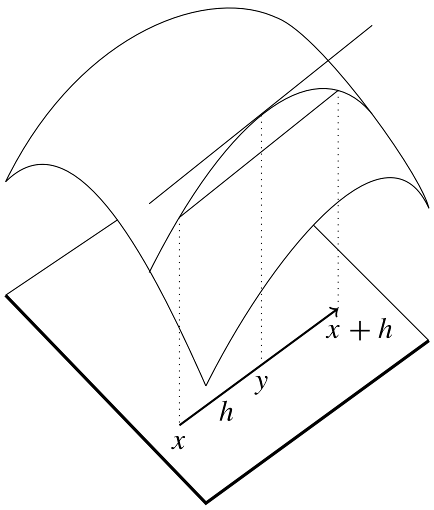
$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Tedy v intervalu (a,b) existuje bod v němž má f derivaci rovnu směrnici sečny body $(a, f(a))$ a $(b, f(b))$. To lze využít například k odhadu hodnoty $f(b)$, neboť $f(b) = f(a) + f'(c)(b-a)$. Známe-li odhad derivace f na (a,b), dostaneme odhad $f(b)$.

Nyní k situaci zobrazení mezi kartézskými součiny $\mathbb{R}$. Pro prvky $x, h \in \mathbb{R}^n$ klademe

$$[x, x+h] = g_{x,h}([0,1])$$

(viz (2.2.2)). Je tedy $[x, x+h]$ množina všech bodů $x + th$, kde $t \in [0, 1]$, čili úsečka, spojující body x a $x + h$. Nyní můžeme přikročit k větě o střední hodnotě.



Věta 2.16 (o střední hodnotě pro funkce). *Nechť množina $U \subset \mathbb{R}^n$ obsahuje úsečku $[x, x+h]$ a funkce $f\colon U \to \mathbb{R}$ má v každém bodě této úsečky derivaci podle vektoru h. Pak existuje bod $y \in [x, x+h]$ takový, že*

$$\frac{\partial f}{\partial h}(y) = f(x+h) - f(x).$$

D ů k a z. Nechť $t_0 \in [0, 1]$. Máme

$$\begin{aligned} f \circ g_{x,h}(t) &= f(x + t_0 h + (t - t_0)h) \\ &= f \circ g_{x+t_0 h,h}(t - t_0). \end{aligned} \tag{2.4.1}$$

Jelikož funkce $f \circ g_{x+t_0 h,h}$ na pravé straně je diferencovatelná v bodě t_0 (to plyne z předpokladu, že funkce f má derivaci podle vektoru h v bodě $x + t_0 h$), má zobrazení $f \circ g_{x,h}$ derivaci v bodě t_0 a tedy (vzhledem k libovolnosti bodu t_0) v každém bodě intervalu $[0, 1]$.

Podle Lagrangeovy věty tedy existuje bod $t_0 \in (0, 1)$ takový, že

$$f \circ g_{x,h}(1) - f \circ g_{x,h}(0) = (f \circ g_{x,h})'(t_0) \cdot (1 - 0).$$

Levá strana této rovnice je ovšem rovna $f(x+h) - f(x)$ (jak plyne z (2.2.2)), kdežto pravá $\frac{\partial f}{\partial h}(x + t_0 h)$ (jak je vidět po zderivování (2.4.1) v t_0 a pochopení (2.4.1). Můžeme tedy položit $y = x + t_0 h$. □

Důsledek 2.17. *Nechť množina $U \subset \mathbb{R}^n$ obsahuje úsečku $[x, x+h]$ a funkce $f\colon U \to \mathbb{R}$ má Gâteauxovu derivaci v každém bodě této úsečky. Pak existuje prvek $y \in [x, x+h]$ takový, že*

$$f(x+h) - f(x) = \mathrm{d}_G f(y)(h).$$

D ů k a z. Plyne z předchozí věty a definice Gâteauxovy derivace. □

Věta 2.18 (o střední hodnotě pro zobrazení). *Nechť množina $U \subset \mathbb{R}^n$ obsahuje úsečku $[x, x+h]$ a zobrazení $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ má v každém bodě této úsečky derivaci podle vektoru h. Pak platí*

$$\|f(x+h) - f(x)\| \le \sup_{y \in [x,x+h]} \left\| \frac{\partial f}{\partial h}(y) \right\|.$$

D ů k a z. Podobně jako v důkazu věty 2.16 uvažujeme zobrazení $f \circ g_{x,h}$. Toto zobrazení je diferencovatelné v každém bodě intervalu $[0, 1]$. Nechť $l\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ je lineární zobrazení takové, že $\|l\| = 1$ a $l(f(x+h) - f(x)) = \|f(x+h) - f(x)\|$ (takové zobrazení vždy existuje podle Hahn-Banachovy věty z funcionální analýzy, není ovšem těžké dokázat ji pro jednoduchý případ $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$). Zobrazení $l \circ f \circ g_{x,h}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je diferencovatelné na celém intervalu $[0, 1]$ a můžeme na ně použít Lagrangeovu větu o střední hodnotě z prvního ročníku. Dostáváme

$$l \circ f \circ g_{x,h}(1) - l \circ f \circ g_{x,h}(0) = (l \circ f \circ g_{x,h})'(t_0),$$

pro nějaké $t_0 \in (0, 1)$. Pro levou stranu ovšem platí

$$l \circ f \circ g_{x,h}(1) - l \circ f \circ g_{x,h}(0) = l(f(x+h) - f(x)) = \|f(x+h) - f(x)\|$$

a pro pravou

$$\begin{aligned}(l \circ f \circ g_{x,h})'(t_0) &= (l \circ f \circ g_{x+ht_0,h})'(0) \leq \\ &\leq |\mathrm{d}(l \circ f \circ g_{x+ht_0,h})(0)(1)| \leq \\ &\leq \|l\| \cdot \|\mathrm{d}(f \circ g_{x+ht_0,h})(0)(1)\| = \\ &= \|\mathrm{d}_h f(x+ht_0)\| \leq \\ &\leq \sup_{y \in [x,x+h]} \|\mathrm{d}_h f(y)\|.\end{aligned}$$

□

Důsledek 2.19. *Nechť množina $U \subset \mathbb{R}^n$ obsahuje úsečku $[x, x+h]$ a zobrazení $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ má v každém bodě této úsečky Gâteauxovu derivaci. Potom*

$$\|f(x+h) - f(x)\| \leq \sup_{y \in [x,x+h]} \|\mathrm{d}_G f(y)\| \cdot \|h\|.$$

D ů k a z. Plyne z věty 2.18, definice Gâteauxovy derivace a věty 1.19. □

Komentář!!!!!!

Příklad Uvažujme zobrazení $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definované předpisem

$$f(t) = (\cos t, \sin t)$$

a položme $x = 0$, $h = 2\pi$. Platí $f(x+h) - f(x) = (0,0)$. Přitom ale neexistuje bod $y \in [0, 2\pi]$, ve kterém by bylo $\frac{\partial f}{\partial h}(y) = (0,0)$.

2.5. Spojitá diferencovatelnost. Předpokládejme, že zobrazení $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ má Gâteauxovu derivaci v každém bodě nějakého okolí $V \subset U$. Dostáváme zobrazení $\mathrm{d}_G\colon V \to \mathrm{L}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$, přiřazující každému bodu z V Gâteauxovu derivaci zobrazení f v tomto bodě (tedy $\mathrm{d}_G f(x)$).

Zvolme nyní bod $x \in U$. Řekneme, že zobrazení f je *v bodě x spojitě diferencovatelné*, je-li zobrazení $\mathrm{d}_G f$ definováno na nějakém jeho okolí a je-li v tomto bodě spojité.

Víme, že prostor $\mathrm{L}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$ je izomorfní s vektorovým prostorem matic typu $n \times m$. Podle věty 1.17 o spojitosti zobrazení $\mathrm{d}_G f$ nerozhoduje, jakou normu na prostoru $\mathrm{L}(\mathbb{R}^n; R^m)$ zvolíme. Můžeme tedy usoudit, že zobrazení $\mathrm{d}_G f$ je spojité, právě když je spojité zobrazení f'. O spojitosti tohoto zobrazení se přitom rozhoduje poměrně snadno.

Věta 2.20. *Zobrazení spojitě diferencovatelné v bodě x je v tomto bodě diferencovatelné.*

Věta vypadá na první pohled podezřele triviální, uvědomme si, že v definici spojité diferencovatelnosti požadujeme existenci Gâteauxovy derivace a její spojitou závislost. Ve trvzení věty jde ovšem o Fréchetovu derivaci.

D ů k a z. Nechť $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je zobrazení, spojitě diferencovatelné v bodě $x \in U$. Zobrazení d_G je tedy definováno v každém bodě nějakého okolí V bodu x. Označme $\mathrm{d}_G f(y) = l_y$ pro $y \in V$. Platí

$$\lim_{h \to 0} \|l_{x+h} - l_x\| = 0.$$

Aplikujeme-li důsledek 2.19 věty o střední hodnotě pro zobrazení na zobrazení $f - l_x$, dostaneme

$$\|f(x+h) - f(x) - l_x(h)\| \leq \sup_{y \in [x,x+h]} \|l_y - l_x\| \cdot \|h\|.$$

Máme tedy

$$\frac{\|f(x+h)-f(x)-l_x(h)\|}{\|h\|} \leq \sup_{y\in[x,x+h]} \|l_y - l_x\|$$

přičemž limita pravé strany pro $h \to 0$ je rovna nule. □

Věta 2.21. *Nechť zobrazení $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ a $g\colon V \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ jsou spojitě diferencovatelná v každém bodě svých definičních oborů. Pak zobrazení $g \circ f$ je spojitě diferencovatelné v každém bodě množiny U.*
D ů k a z. Necháme čtenáři. □

Lemma 2.22. *Předpokládejme, že zobrazení $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ má derivace podle vektorů h, k, v každém bodě množiny U a zobrazení $\mathrm{d}_h f\colon U \to \mathbb{R}^m$ je spojité v bodě $x \in U$. Pak pro každé $a, b \in \mathbb{R}$ existuje derivace $\mathrm{d}_{ah+bk} f(x)$ a platí*

$$\mathrm{d}_{ah+bk} f(x) = a\mathrm{d}_h f(x) + b\mathrm{d}_k f(x).$$

D ů k a z. Chceme dokázat, že

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x+tah+tbk)-f(x)}{t} = a\mathrm{d}_h f(x) + b\mathrm{d}_k f(x) = \mathrm{d}_{ah}(x) + \mathrm{d}_{bk}(x).$$

Na pravé straně dostáváme

$$\mathrm{d}_{ah}(x) + \mathrm{d}_{bk}(x) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x+tah)-f(x)}{t} + \frac{f(x+tbk)-f(x)}{t}.$$

Na levé straně

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x+tah+tbk)-f(x)}{t} = \qquad \text{(trik)}$$
$$= \lim_{t\to 0} \frac{f(x+tah+tbk)-f(x+tbk)+f(x+tbk)-f(x)}{t}.$$

Stačí dokázat, že

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x+tah+tbk)-f(x+tbk)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(x+tah)-f(x)}{t}$$

Označme

$$g(x) = \frac{f(x+tbk)-f(x)}{t}.$$

Ukážeme, že

$$g(x+tah)-g(x) = \frac{f(x+tah+tbk)-f(x+tah)}{t} - \frac{f(x+tbk)-f(x)}{t}.$$

jde k nule pro $t \to 0$. Podle věty 2.18 platí

$$\|g(x+tah)-g(x)\| \leq \sup_{y\in[x,x+tah]} \|\mathrm{d}_{tah} g(y)\|. \tag{2.5.1}$$

Ale

$$\mathrm{d}_{tah} g(y) = a(\mathrm{d}_h f(y+tbk) - \mathrm{d}_h f(y)),$$

což podle předpokladu o spojitosti zobrazení $\mathrm{d}_h f$ znamená, že limita levé strany (2.5.1) pro $t \to 0$ je rovna nule. Tím je lemma dokázáno. $\square$

Věta 2.23. *Nechť pro zobrazení $f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ existují všechny funkce $\partial_{x_j} f_i: U \to \mathbb{R}$, kde $i \in \{1, \ldots, m\}$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, a jsou na množině U spojité. Pak zobrazení f je spojitě diferencovatelné v každém bodě množiny U.*

D ů k a z. Podle předchozího lemmatu má zobrazení f Gâteauxovu derivaci v každém bodě množiny U (proč?). Tvrzení tedy plyne z předpokladu o spojitosti parciálních derivací. $\square$

Důsledek: Spojité parc. derivace => diferencovatelnost a matice parciálních derivací.

DOPLŇKY

Definice Fréchetovy derivace je nezávislá na volbě norem.

Gradient

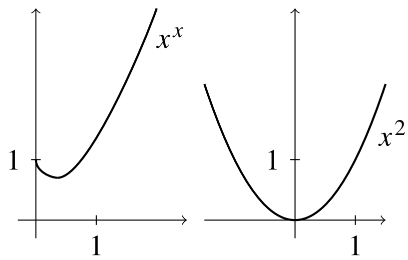
3. Inverzní a implicitní zobrazení

V této kapitole uvádíme dvě důležité věty, které nacházejí aplikace v mnoha oblastech matematiky: Větu o inverzním a větu o implicitním zobrazení.

3.1. Inverzní zobrazení. V tomto odstavci formulujeme větu o inverzním zobrazení na prostoru $\mathbb{R}^n$.

Nejprve se však vraťme k situaci funkce na $\mathbb{R}$. Pokud spojitá funkce $f : U \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je monotonní na intervalu na intervalu I pak zúžení $f : I \to f(I)$ je homeomorfismus, tedy existuje inverze f^{-1}.

Příklad. Funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^x$ je rostoucí na každém $[a, b] \subset [1, \infty)$ a má zde inverzi, ačkoli analytické řešení rovnice $y = x^x$ neznáme.



Situace se komplikuje v případě, že f není monotonní na celém definičním oboru, pak by přirozeným postupem bylo nalézt intervaly monotonnosti a na nich by pak existovaly inverze.

Příklad. Uvažujme $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, na intervalech $(-\infty, 0]$ a $[0, \infty)$ je f monotonní a existují na nich její inverze konkrétně $\sqrt{x}$ a $-\sqrt{x}$. Na druhou stranu neexistuje okolí bodu 0 na kterém by x^2 měla inverzi.

Zamysleme se ještě nad situací v předchozím příkladě, existence intervalu monotonnosti plyne z faktu, že se na něm znaménko derivace nemění. Pokud je funkce spojitě diferencovatelná, pak pouhý fakt, že je tato derivace nenulová, zaručuje existenci intervalu o stejném znaménku derivace a tedy monotonnost.

To nás přivádí k tvrzení o inverzním zobrazení pro funkce z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$, které je jen jednoduchým důsledkem tvrzení z prvního ročníku.

Věta 3.1. *Nechť $f : U \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je spojitě diferencovatelná v x_0 a $f'(x_0) \neq 0$, potom existuje okolí I bodu x_0, okolí J bodu $y_0 = f(x_0)$ a funkce $f^{-1} : J \to I$, která je inverzí ke zúžení f na I a platí*

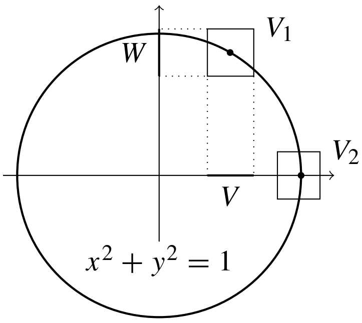
$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

V odstavci 3.3 dokážeme obecnější tvrzení pro zobrazení mezi prostory $\mathbb{R}^n$.

3.2. Věta o implicitní funkci. Uvažujme rovnici ve tvaru $f(x, y) = 0$, kde f je daná funkce $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. často nás zajímá, pro která (x, y) je rovnice splněna. Označme M množinu takových řešení, tedy $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = 0\}$.

Nyní si položíme otázku, zda lze množinu M popsat pomocí rovnice $y = g(x)$, pro nějakou funkci $g\colon A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Příklad. Pokud $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$, pak množinou M je kružnice se středem v počátku a poloměrem 1. Tuto množinu nelze popsat jednou rovnicí ve tvaru $y = g(x)$ (lze snadno vidět, že pokud je $x = 0$, musela by g mít dvě hodnoty ± 1).



Obdobně lze snadno najít příklad rovnice $f(x, y) = 0$ s prázdnou množinou řešení, či případ kdy M bude mít neprázdný vnitřek. To nás přivádí na problém, kdy lze popsat množinu M alespoň lokálně.

Takže zda kolem každého bodu množiny M existuje jeho okolí V, jehož průnik s množinou $V \cap M$ je popsatelný jako $y = g(x)$, tedy zda $V \cap M$ je grafem funkce g.

V případě na obrázku vidíme, že V_1 je okolím, které po průniku s M je grafem nějaké funkce g (bude se zřejmě jednat o zúžení funkce $\sqrt{1 - x^2}$ na nějaký interval). Na druhou stranu i kdybychom okolí V_2 kolem $(1, 0)$ zmenšovali nebude $V_2 \cap M$ grafem žádné funkce (ta by musela mít nalevo od 1 dvě hodnoty zatímco napravo žádnou).

Funkce g v předchozích odstavcích se nazývá *implicitně definovaná funkcí f*.

Odpověď kdy existuje implicitně definovaná funkce na okolí bodu množiny M dává následující věta.

Věta 3.2 (věta o implicitní funkci $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$). *Nechť $f\colon U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je spojitá, spojitě diferencovatelná v (x_0, y_0). Uvažujme množinu $M = \{(x, y) \in U \mid f(x, y) = 0\}$. Jestliže $\partial_y f(x_0, y_0) \neq 0$, potom existují okolí V bodu x_0, W bodu y_0 a zobrazení $g\colon V \to W$ tak, že $M \cap (V \times W)$ je rovno grafu zobrazení g.*

Navíc zobrazení g je v x_0 diferencovatelné a platí

$$g'(x_0) = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)}{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)}. \tag{3.2.1}$$

Na konci této kapitoly dokážeme obecnější tvrzení.

Příklad. Uvažujme opět množinu M danou body, pro které je funkce $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ rovna 0. Ukážeme, že existuje okolí bodu $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$, na kterém rovnice $f(x, y) = 0$ implicitně definuje y jako funkci x a určeme derivaci jejího vyjádření. (Víme, že toto vyjádření je $y = \sqrt{1 - x^2}$ a derivace je -1, ale použijeme právě uvedené věty o implicitní funkci.)

Derivace $\partial_y f(x, y) = 2y$, to je různé od nuly v bodě $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$, proto můžeme použít větu 3.2. Dostáváme, že existuje okolí bodu $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ na němž lze y vyjádřit jako funkci x, jestliže si tuto funkci označíme g je derivace $g'(\sqrt{2}/2)$ rovna

$$g'(\sqrt{2}/2) = -\frac{\partial_x f(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)}{\partial_y f(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)} = \left.\frac{2x}{2y}\right|_{(x,y)=(\sqrt{2}/2,\sqrt{2}/2)} = -1.$$

Druhá derivace g!!!!!

Pokud víme, že existuje implicitně definovaná funkce g, jako tomu je v předchozím příkladě, na jistém okolí x_0 platí rovnice

$$f(x, g(x)) = 0.$$

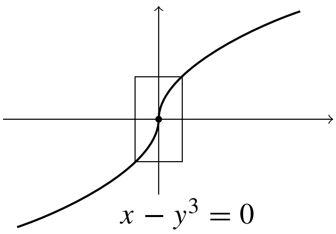
Derivací této konstantní funkce (jde o složenou funkci, vnitřní funkce je $x \mapsto (x, g(x))$), dostáváme

$$0 = (f(x, g(x)))' = \frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x)) \cdot 1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x)) \cdot g'(x).$$

Odtud lze mimochodem obdržet vzorec (3.2.1). My však může zderivovat funkci podruhé a získáme vzorec pro $g''(x)$.

$$0 = (f(x, g(x)))'' = !!!!$$

Věta 3.2 v žádném případě neříká, že v bodech, kde je $\partial_y f(x, y)$ rovno nule, vyjádření y jako funkce x neexistuje. V předchozím příkladě tomu tak sice bylo, ovšem obecně tomu tak být nemusí. Může existovat rovnice $f(x, y) = 0$ a na okolí bodu s $\partial_y f(0, 0) = 0$ na kterém lze vyjádřit y jako funkci x. Viz obrázek.



$x - y^3 = 0$

Z rovnice

$$x - y^3 = 0$$

lze vyjádřit y, vždyť

$$y = \sqrt[3]{x}.$$

Ačkoliv bylo $\partial_y f(0, 0) = 3y^2\big|_{y=0} = 0$.

Věta 3.3 (věta o implicitní funkci $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$). *Nechť $f : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ je spojitá, spojitě diferencovatelná v (x_0, y_0, z_0). Uvažujme množinu $M = \{(x, y, z) \in U \mid f(x, y, z) = 0\}$. Jestliže $\partial_z f(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, potom existují okolí V bodu (x_0, y_0), W bodu z_0 a zobrazení $g : V \to W$ tak, že $M \cap (V \times W)$ je rovno grafu zobrazení g. Navíc zobrazení g je v (x_0, y_0) diferencovatelné a platí*

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)}{\dfrac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)}, \tag{3.2.2}$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)}{\dfrac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)}. \tag{3.2.3}$$

Příklad!!!!

DOPLŇKY

3.3. Obecná věta o inverzním zobrazení.

Věta 3.4 (o inverzním zobrazení). *Nechť $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ je spojité zobrazení, spojitě diferencovatelné v bodě $x_0 \in U$. Jestliže lineární zobrazení $\mathrm{d}f(x_0)$ je izomorfismus, pak existuje okolí V bodu x_0 tak, že množina $W = f(V)$ je okolí bodu $y_0 = f(x_0)$ a zúžení $f : V \to W$ je homeomorfismus. Inverzní zobrazení $f^{-1} : W \to V$ je diferencovatelné v bodě y_0. Platí*

$$\mathrm{d}f^{-1}(y_0) = (\mathrm{d}f(x_0))^{-1}. \tag{3.3.1}$$

Lemma 3.5. *Nechť $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ je spojité zobrazení, spojitě diferencovatelné v bodě $x_0 \in U$ a takové, že $\mathrm{d}f(x_0) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$. Pak existuje okolí V bodu x_0 tak, že množina $W = f(V)$ je okolí bodu $y_0 = f(x_0)$ a zúžení $f\colon V \to W$ je homeomorfismus.*

D ů k a z. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že zobrazení f má Gâteauxovu derivaci v každém bodě množiny U. Položme $g = f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ (čili $g(x) = f(x) - x$ pro každé $x in U$). Máme

$$\mathrm{d}g(x_0) = \mathrm{d}f(x_0) - \mathrm{d}\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}(x_0) = 0$$

(viz věty 2.10 a 2.7). Máme tedy

$$\|\mathrm{d}g(x_0)\| = 0$$

Podle předpokladu je zobrazení f spojitě diferencovatelné v bodě x_0. Zobrazení g je tedy rovněž spojitě diferencovatelné v bodě x_0, což znamená, že zobrazení $\mathrm{d}_G g\colon U \to \mathrm{L}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$ je spojité v bodě x_0. Existuje tedy uzavřená koule B se středem v bodě x_0 taková, že pro všechny její prvky x platí

$$\|\mathrm{d}_G g(x)\| \le \frac{1}{2}, \quad \det f'(x) \neq 0. \tag{3.3.2}$$

Zvolme nyní dva libovolné body $x_1, x_2 \in B$. Podle důsledku 2.19 věty o střední hodnotě 2.18 je

$$\|g(x_2) - g(x_1)\| \le \sup_{y \in [x_1, x_2]} \|\mathrm{d}_G g(y)\| \cdot \|x_2 - x_1\|$$

což společně s (3.3.2) dává

$$\|g(x_2) - g(x_1)\| \le \frac{1}{2}\|x_2 - x_1\|$$

Máme tedy

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\|x_2 - x_1\| &\ge \|g(x_2) - g(x_1)\| = \|f(x_2) - x_2 - f(x_1) + x_1\| = \\ &= \|(x_1 - x_2) - (f(x_2) - f(x_1))\| \ge \|x_2 - x_1\| - \|(f(x_2) - f(x_1))\|,\end{aligned}$$

neboli

$$2\|f(x_2) - f(x_1)\| \ge \|x_2 - x_1\|, \tag{3.3.3}$$

což dokazuje, že zobrazení f je na množině B injektivní.

Uvažme nyní množinu $f(\mathrm{fr}\,B)$. Tato množina je kompaktní (množina $\mathrm{fr}\,B$ je kompaktní a zobrazení f spojité) a neobsahuje bod y_0 (zobrazení f je na kouli B prosté a $x_0 \notin \mathrm{fr}\,B$). Existuje tedy číslo $d > 0$ takové, že pro každý prvek $y \in f(\mathrm{fr}\,B)$ platí

$$\|y - y_0\| \ge d. \tag{3.3.4}$$

Položme

$$W = B_{d/2}(y_0) \tag{3.3.5}$$

a dokažme, že $W \subset f(\mathrm{int}\,B)$.

Nechť $y_1 \in W$ je libovolný bod. Definujme funkci $h\colon B \to \mathbb{R}$ předpisem

$$h(x) = \|f(x) - y_1\|^2 = \sum_{i=1}^{n} (f^i(x) - (y_1)_i)^2$$

Tato funkce je spojitá a v každém bodě uvnitř množiny B má Gâteauxovu derivaci. Ze spojitosti této funkce a z kompaktnosti množiny B plyne, že existuje bod x_1, ve kterém funkce h má minimum. Bod x_1 leží určitě uvnitř množiny B: kdyby totiž ležel na její hranici, bylo by $\|f(x_1 - y_1)\| \geq d$ (to plyne z (3.3.4)) a $\|f(x_0) - y_1\| < d/2$ (viz (3.3.5)), což by znamenalo, že $h(x_0) < h(x_1)$ a v x_1 funkce h nemá minimum. A jelikož $x_1 \in \operatorname{int} B$ a funkce h má v x_1 minimum, musí v tomto bodě mít všechny parciální derivace nulové:[1)] $\partial_i h(x_1) = 0$ pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$. Jelikož

$$\partial_j h(x_1) = \sum_{i=1}^{n} 2(f^i(x_1) - (y_1)_i)\partial_j f^i(x_1) = 0$$

a $\det f'(x_1) \neq 0$ (3.3.2), dostáváme, že $f(x_1) = y_1$.

Položme $V = f^{-1}(W) \cap \operatorname{int} B$. Právě jsme ukázali, že zúžení $f: V \to W$ je bijekce. Zbývá tedy dokázat, že zobrazení $f^{-1}: W \to V$ je spojité. To ovšem snadno plyne ze vztahu

$$\|f^{-1}(y_2) - f^{-1}(y_1)\| \leq 2\|y_2 - y_1\|,$$

který pro libovolné y_1, y_2 plyne z (3.3.3).

Tím je lemma dokázáno. □

Lemma 3.6. *Nechť $f: V \to W$ je bijekce mezi otevřenými množinami v $\mathbb{R}^n$, diferencovatelná v bodě $x_0 \in V$ a taková, že $\mathrm{d}f(x_0) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$. Dále předpokládejme, že zobrazení f^{-1} je spojité v bodě $y_0 = f(x_0)$. Pak zobrazení f^{-1} je diferencovatelné v bodě y_0 a platí*

$$\mathrm{d}f^{-1}(y_0) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}.$$

D ů k a z. Pro libovolný bod $y \in W$, $y = f(x)$, máme

$$\begin{aligned} &\|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0) - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}(y - y_0)\| = \|x - x_0 - f(x) + f(x_0)\| = \\ &\quad = \|f(x) - f(x_0) - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}(x - x_0)\| = \|x - x_0\| \cdot \varepsilon(x - x_0), \end{aligned}$$

kde $\lim_{x \to x_0} \varepsilon(x - x_0) = 0$ (viz větu 2.2 (o diferenciálu)). Dále,

$$\begin{aligned} &\|x - x_0\| \cdot \varepsilon(x - x_0) = \|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)\| \cdot \varepsilon(f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)) = \\ &\quad = \|y - y_0\| \cdot \frac{\|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)\|}{\|y - y_0\|} \cdot \varepsilon(f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)). \end{aligned}$$

Jelikož $\lim_{y \to y_0} \varepsilon(f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)) = 0$ (zobrazení f^{-1} je spojité v y_0), stačí ukázat, že výraz $\|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)\| / \|y - y_0\|$ je na nějakém okolí bodu y_0 ohraničený. Tvrzení pak bude vyplývat z věty 2.2 (o diferenciálu).

Nechť V_0 je okolí bodu x_0 takové, že pro každé $x \in V_0$ platí

$$\frac{\|f(x) - f(x_0) - x + x_0\|}{\|x - x_0\|} < \frac{1}{2} \qquad \text{(diferencovatelnost } f \text{ s } \mathrm{d}f(x_0) = \mathrm{id})$$

Pak

[1)]Toto tvrzení je vcelku zřejmé; dokážeme je však až v kapitole 5

$$\frac{1}{2} > \frac{\|f(x) - f(x_0) - x + x_0\|}{\|x - x_0\|} \geq \frac{\|x - x_0\|}{\|x - x_0\|} - \frac{\|f(x) - f(x_0\|}{\|x - x_0\|} = 1 - \frac{\|f(x) - f(x_0\|}{\|x - x_0\|}$$

neboli

$$\frac{\|f(x) - f(x_0\|}{\|x - x_0\|} > \frac{1}{2}.$$

Označme W_0 okolí bodu y_0, pro jehož všechny prvky y platí $f^{-1}(y) \in V_0$. Pro libovolný prvek $y \in W$ a $x = f^{-1}(y)$ pak máme

$$\frac{\|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)\|}{\|y - y_0\|} = \frac{\|x - x_0\|}{\|f(x) - f(x_0\|} < 2.$$

Tím je lemma dokázáno. □

Nyní dokážeme dvě lemmata podobná lemmatům 3.5 a 3.6, avšak s oslabeným předpokladem o derivaci zobrazení f.

Lemma 3.7. *Nechť $f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ je spojité zobrazení, spojitě diferencovatelné v bodě $x_0 \in U$. Jestliže lineární zobrazení $\mathrm{d}f(x_0)$ je izomorfismus, pak existuje okolí V bodu x_0 tak, že množina $W = f(V)$ je okolím bodu $y_0 = f(x_0)$ a zúžení $f: V \to W$ je homeomorfismus.*

D ů k a z. Označme $l = \mathrm{d}f(x_0)$, $y_0 = f(x_0)$ a položme $\bar{f} = l^{-1} \circ f$. Máme

$$\mathrm{d}\bar{f}(x_0) = \mathrm{d}(l^{-1} \circ f)(x_0) = \mathrm{d}l^{-1}(y_0) \circ \mathrm{d}f(x_0) = l^{-1} \circ l = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}.$$

Na zobrazení $\bar{f}$ tedy lze aplikovat lemma 3.5. Platí $f^{-1} = l \circ f$. □

Lemma 3.8. *Nechť $f: V \to W$ je bijekce mezi otevřenými množinami v $\mathbb{R}^n$, diferencovatelná v bodě $x_0 \in V$ a taková, že $\mathrm{d}f(x_0)$ je izomorfismus. Dále předpokládejme, že zobrazení f^{-1} je spojité v bodě $y_0 = f(x_0)$. Pak zobrazení f^{-1} je diferencovatelné v bodě y_0 a platí*

$$\mathrm{d}f^{-1}(y_0) = (\mathrm{d}f(x_0))^{-1}.$$

D ů k a z. Stejně jako v důkazu předchozího lemmatu označme $l = \mathrm{d}f(x_0)$ a položme $\bar{f} = l^{-1} \circ f$. Máme $\mathrm{d}\bar{f}(x_0)$ a podle lemmatu 3.7 $\mathrm{d}\bar{f}^{-1}(y_0) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$. Nyní $f^{-1} = \bar{f}^{-1} \circ l^{-1}$ a

$$\mathrm{d}f^{-1}(y_0) = \mathrm{d}(\bar{f}^{-1} \circ l^{-1})(y_0) = \mathrm{d}\bar{f}^{-1}(x_0) \circ \mathrm{d}l^{-1}(y_0) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} \circ l^{-1} = l^{-1}.$$

Tím je lemma dokázáno. □

D ů k a z. (věty 3.4) Plyne z předchozích lemmat. □

Tvrzení o derivaci inverzního zobrazení (vztah (3.3.1)) lze také dokázat přímo, pomocí věty 2.5 o derivaci složeného zobrazení. Platí totiž

$$\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} = \mathrm{d}\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}(x_0) = \mathrm{d}(f^{-1} \circ f)(x_0) = \mathrm{d}f^{-1}(y_0) \circ \mathrm{d}f(x_0).$$

Odtud už vztah (3.3.1) plyne.

Za poznámku jistě také stojí, že dimenze definičního oboru a oboru hodnot zobrazení f ve větě 3.4 musí být stejné; jinak by totiž nemohl platit vztah (3.3.1) (to víme z lineární algebry). Tento závěr lze dalekosáhle zobecnit: snadno lze například ukázat, že žádná spojitě diferencovatelná funkce $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ není bijekce (pokud je $\partial_1 f(x, y) \neq 0$ pro každé (x, y) z nějaké otevřené množiny V, pak stačí uvážit zobrazení $g(x, y) = (f(x, y), y)$).

Předpokládáme-li ve větě o inverzním zobrazení navíc, že zobrazení f je na množině U diferencovatelné, lze okolí V a W nalézt tak, aby inverzní zobrazení f^{-1} bylo diferencovatelné na okolí W a spojitě diferencovatelné v bodě y_0. Pokuste se to dokázat.

3.4. Obecná věta o implicitním zobrazení. Mějme zobrazení $f: U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, diferencovatelné v bodě $(x_0, y_0) \in U$ a označme $l_1: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ a $l_2: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ lineární zobrazení, definovaná předpisy

$$\begin{aligned} l_1(h_1) &= \mathrm{d}f(x_0, y_0)(h_1, 0), \\ l_2(h_2) &= \mathrm{d}f(x_0, y_0)(0, h_2). \end{aligned} \tag{3.4.1}$$

Evidentně platí

$$\mathrm{d}f(x_0, y_0) = l_1 + l_2.$$

Zobrazením l_1 a l_2 se někdy říká *parciální derivace zobrazení f v bodě* (x_0, y_0) (zobecněného typu). Přestože my jsme si tento termín vyhradili pro jiný objekt, vidíme, že s ním velmi úzce souvisí.

Věta 3.9 (o implicitním zobrazení). *Nechť $f: U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ je spojité zobrazení, spojitě diferencovatelné v bodě $(x_0, y_0) \in U$ takovém, že $f(x_0, y_0) = 0$. Uvažme lineární zobrazení l_1 a l_2 z (3.4.1) a množinu $M = \{(x, y) \in U \mid f(x, y) = 0\}$. Jestliže zobrazení l_2 je izomorfismus, pak existují okolí V_1 bodu x_0, okolí V_2 bodu y_0 a zobrazení $g: V_1 \to V_2$ tak, že množina $M \cap (V_1 \times V_2)$ je rovna grafu zobrazení g.*

Zobrazení g je v bodě x_0 diferencovatelné a platí

$$\mathrm{d}g(x_0) = -l_2^{-1} \circ l_1. \tag{3.4.2}$$

D ů k a z. Uvažme zobrazení $F: U \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, $F(x, y) = (x, f(x, y))$. Toto zobrazení je spojité na U a spojitě diferencovatelné v bodě (x_0, y_0). Pro lineární zobrazení $\mathrm{d}F(x_0, y_0)$ a libovolný vektor (h_1, h_2) platí

$$\mathrm{d}F(x_0, y_0)(h_1, h_2) = (h_1, \mathrm{d}f(x_0, y_0)(h_1, h_2)) = (h_1, l_1(h_1) + l_2(h_2)),$$

Toto zobrazení je tedy izomorfismus: inverzní zobrazení je totiž dáno předpisem

$$(\mathrm{d}F(x_0, y_0))^{-1}(u_1, u_2) = (u_1, l_2^{-1}(u_2 - l_1(u_1))) \tag{3.4.3}$$

Podle věty 3.4 tedy existují okolí V bodu (x_0, y_0), okolí W bodu $(x_0, 0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ a inverzní zobrazení $F^{-1}: W \to V$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že množina V je rovna součinu dvou otevřených množin: $V = V_1 \times V_2$.

Nyní pro $x \in V_1$ položme

$$g(x) = \mathrm{pr}_2(F^{-1}(x, 0)). \tag{3.4.4}$$

Nyní dokážeme, že zobrazení g má požadované vlastnosti. Nechť $(x_0, y_0) \in M \cap (V_1 \times V_2)$. Máme $f(x, y) = 0$, neboli $F(x, y) = (x, 0)$, což znamená, že

$$g(x) = \mathrm{pr}_2(F^{-1}(x, 0)) = \mathrm{pr}_2(x, y) = y.$$

Naopak, pro libovolné $x \in V$ máme

$$(x, f(x, g(x)) = F(x, g(x)) = F(x, \mathrm{pr}_2(x, 0)).$$

Přitom $\mathrm{pr}_1(F^{-1}(x, 0)) = x$, což znamená

$$(x, f(x, g(x))) = F(F^{-1}(x, 0)) = (x, 0)$$

a celkově

$$f(x, g(x)) = 0.$$

Zbývá tedy dokázat vztah (3.4.2). Podle (3.4.3) a (3.4.4) máme

$$\mathrm{d}g(x_0)(u_1) = \mathrm{pr}_2(\mathrm{d}F^{-1}(x_0, 0)(u_1, 0)) = \mathrm{pr}_2(u_1, -l_2^{-1} \circ l_1(u_1)) = -l_2^{-1} \circ l_1(u_1).$$

Tím je celé tvrzení dokázáno. □

O zobrazení g z předchozí věty se někdy říká, že je *implicitně definováno* zobrazením f.

Podobně jako u věty o inverzním zobrazení, vztah (3.4.2) můžeme dokázat přímo, pomocí vztahu (3.4.1): Víme, že pro každé $x \in V_1$ platí

$$f(x, g(x)) = 0$$

Derivací této rovnice v bodě x_0 dostaneme

$$0 = \mathrm{d}f(x_{0}),_{y_0} \circ \mathrm{d}(\mathrm{id}(x), g(x))|_{x_0} = l_1 + l_2 \circ \mathrm{d}g(x_0) = 0$$

což je ekvivalentní s (3.4.2). Tento způsob odvozování derivace implicitního zobrazení se často používá při praktických výpočtech.

Větu o implicitním zobrazení jsme vlastně dokázali jako poměrně jednoduchý důsledek věty o inverzním zobrazení. Kdybychom ji dokázali bez použití této věty, mohli bychom pak naopak větu o inverzním zobrazení dokázat pomocí věty o implicitním zobrazení, a to pomocí vztahu

$$f\big(f^{-1}(x)\big) - x = 0.$$

Můžete se o to pokusit.

4. Derivace vyšších řádů

4.1. Bilineární a kvadratická zobrazení. Připomeňme si, že zobrazení $l\colon X_1 \times X_2 \to Y$, kde X_1, X_2 a Y jsou vektorové prostory, se nazývá bilineární, jsou-li pro každé $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$ zobrazení

$$\begin{aligned} &X_1 \to Y, x \mapsto l(x, x_2), \\ &X_2 \to Y, x \mapsto l(x_2, x), \end{aligned}$$

lineární. Vektorový prostor všech bilineárních zobrazení $l\colon X_1 \times X_2 \to Y$ označujeme symbolem $\mathrm{L}(X_1 \times X_2; Y)$.

Libovolnému lineárnímu zobrazení $l \in \mathrm{L}(X_1; \mathrm{L}(X_2; Y))$ lze předpisem

$$\bar{l}(x_1, x_2) = l(x_1)(x_2)$$

přiřadit bilineární zobrazení $\bar{l} \in \mathrm{L}(X_1 \times X_2; Y)$. Přiřazení $l \to \bar{l}$ je evidentně bijektivní.

Dokažte to.

Přesvědčte se o tom, že zobrazení $\bar{l}$ je skutečně bilineární!

Příklad Pro libovolné číslo x_1 definujme lineární zobrazení $l(x_1)$ předpisem

$$l(x_1)(x) = 2x_1x.$$

Zobrazení l je zjevně lineární. Příslušné zobrazení $\bar{l}\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je dáno předpisem

$$\bar{l}(x_1, x_2) = 2x_1x_2. \tag{4.1.1}$$

Bilineární zobrazení $l \in \mathrm{L}(X \times X; Y)$ se nazývá *symetrické*, jestliže pro libovolné dva vektory $x_1, x_2 \in X$ platí

$$l(x_1, x_2) = l(x_2, x_1).$$

Bilineární zobrazení l z (4.1.1) je symetrické.

Každé bilineární zobrazení z $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$ je symetrické (lze dokázat pomocí vyjádření vektorů z $\mathbb{R}$ v bázi).

Symetrická a *antisymetrická* část bilineárního zobrazení $l \in \mathrm{L}(X \times X; Y)$ jsou bilineární zobrazení $\operatorname{sym} l$ a $\operatorname{alt} l$, definovaná předpisy

$$\begin{aligned} \operatorname{sym} l(x_1, x_2) &= \tfrac{1}{2}(l(x_1, x_2) + l(x_2, x_1)), \\ \operatorname{alt} l(x_1, x_2) &= \tfrac{1}{2}(l(x_1, x_2) - l(x_2, x_1)). \end{aligned} \tag{4.1.2}$$

Pro každé bilineární zobrazení l platí

$$\operatorname{sym} l + \operatorname{alt} l = l.$$

Zobrazení l je symetrické, právě když $\operatorname{sym} l = l$, což je ekvivalentní podmínce $\operatorname{alt} = 0$.

Zobrazení $l\colon X \to Y$ se nazývá *kvadratické*, existuje-li bilineární zobrazení $p\colon X \times X \to Y$ takové, že pro každé $x \in X$ platí

$$l(x) = p(x, x). \tag{4.1.3}$$

Vektorový prostor všech kvadratických zobrazení $l\colon X \to Y$ označujeme $\mathrm{L}_2(X;Y)$.

Zobrazení p, která splňují vztah (4.1.3) je více; pokud platí $\operatorname{sym} p_1 = \operatorname{sym} p_2$, pak samozřejmě pro každé x $p_1(x,x) = p_2(x,x)$. Důležité je, že platí také opačné tvrzení:

Lemma 4.1. *Jestliže pro bilineární zobrazení $p_1, p_2\colon X \times X \to Y$ a každé $x \in X$ platí $p_1(x,x) = p_2(x,x)$, pak* $\operatorname{sym} p_1 = \operatorname{sym} p_2$.
D ů k a z. Pro libovolné $x_1, x_2 \in X$ máme

$$\begin{aligned}
\operatorname{sym} p_1(x_1,x_2) &= \tfrac{1}{2}(p_1(x_1,x_2) + p_1(x_2,x_1)) = \\
&= \tfrac{1}{2}(p_1(x_1,x_2) + p_1(x_1,x_1) + p_1(x_2,x_1) + p_1(x_2,x_2) - p_1(x_1,x_1) - p_1(x_2,x_2)) = \\
&= \tfrac{1}{2}(p_1(x_1+x_2, x_1+x_2) - p_1(x_1,x_1) - p_1(x_2,x_2)) = \\
&= \tfrac{1}{2}(p_2(x_1+x_2, x_1+x_2) - p_1(x_1,x_1) - p_1(x_2,x_2)) = \\
&= \operatorname{sym} p_2(x_1,x_2). \ \square
\end{aligned}$$

Z uvedeného vyplývá

Věta 4.2. *K libovolnému kvadratickému zobrazení $l \in$* $\mathrm{L}_2(X;Y)$ *existuje právě jedno symetrické bilineární zobrazení $p \in X \times X \to Y$, splňující (4.1.3).*

Zobrazení l a p z uvedené věty se nazývají *asociovaná*.

Symetrické bilineární zobrazení, asociované s daným kvadratickým zobrazením l lze vypočítat podle vztahu

$$p(x_1,x_2) = \tfrac{1}{2}(l(x_1+x_2) - l(x_1)l(x_2)).$$

Na prostoru $\mathrm{L}(X;\mathrm{L}(X;Y))$ je dána norma pomocí předpisu (1.7.1). Pro zobrazení p a l z (4.1.3) můžeme položit

$$\|l\| = \|p\|.$$

Dostaneme tak normu na vektorovém prostoru $\mathrm{L}_2(X;Y)$.

Uvedená definice patří k oněm poněkud abstraktním a napoprvé těžko pochopitelným. Pro začátek jistě postačí, když si z ní odneseme poznatek, že jsme na prostoru $\mathrm{L}_2(X;Y)$ definovali normu. Beztak jsou podle věty 1.17 všechny ekvivalentní a my se budeme zajímat pouze o topologii touto normou indukovanou. To také znamená, že jsme normu na $\mathrm{L}_2(X;Y)$ mohli definovat jinak—indukovaná topologie vyjde stejně.

4.2. Derivace a diferenciál druhého řádu. Než přistoupíme k definici derivace druhého řádu, uvědomme si, že v definici Fréchetovy derivace v kapitole 2 jsme ze všech vlastností prostoru $\mathbb{R}^n$ (a $\mathbb{R}^m$) využili pouze jeho strukturu normovaného prostoru. Téměř celý odstavec 2.1 tedy zůstane v platnosti, pokud v něm všude místo o $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$ budeme hovořit o libovolných normovaných prostorech. Výjimku tvoří jen věta 2.8, která pojednává o složkách zobrazení.

Mějme zobrazení $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, diferencovatelné v každém bodě nějakého okolí V bodu $x \in U$. Zobrazení $\mathrm{d}f$ je tedy definováno v každém bodě množiny V a jeho oborem hodnot je normovaný prostor $\mathrm{L}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$. Fréchetova derivace $\mathrm{d}(\mathrm{d}f)(x)$ tohoto zobrazení v bodě x (pokud existuje) je tedy lineární zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do prostoru $\mathrm{L}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$. Příslušné bilineární zobrazení z $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$ označujeme symbolem $\mathrm{d}^2 f(x)$ a nazýváme *druhou (Fréchetovou) derivací zobrazení f v bodě x*.

Zobrazení, které má v bodě x druhou derivaci, se nazývá *dvakrát diferencovatelné v bodě x*.

Pro derivace podle vektoru a parciální derivace zavádíme tato označení:

$$\mathrm{d}_h(\mathrm{d}_k f)(x) = \mathrm{d}_{h,k} f(x), \quad \partial_i(\partial_j f)(x) = \partial_{i,j} f(x).$$

Lemma 4.3. *Nechť zobrazení $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ má v bodě $x \in U$ druhou derivaci. Pak pro libovolný vektor $h \in \mathbb{R}^n$ je derivace zobrazení $\mathrm{d}_h f$ v bodě x rovna lineárnímu zobrazení $\bar{h} \mapsto \mathrm{d}^2 f(x)(\bar{h}, h)$.*

D ů k a z. Uvažme zobrazení $ev_h\colon \mathrm{L}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m) \to \mathbb{R}^m$, $en_h(l) = l(h)$. Platí

$$\mathrm{d}_h f(x) = \mathrm{d}f(x)(h) = ev_h(\mathrm{d}f(x)),$$

neboli

$$\mathrm{d}_h f = ev \circ \mathrm{d}f.$$

Zobrazení ev je lineární, je tedy diferencovatelné v libovolném bodě $l \in \mathrm{L}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$ a platí $\mathrm{d}ev_h(l) = ev_h$. Zobrazení $\mathrm{d}_h f$ je tedy (jako kompozice diferencovatelných zobrazení) diferencovatelné v bodě x. Dostáváme

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}(\mathrm{d}_h f(x)(\bar{h}) = \mathrm{d}(ev_h \circ \mathrm{d}f)(x)(\bar{h}) = \\
&\quad = (ev_h \circ \mathrm{d}(\mathrm{d}f)(x))(\bar{h}) = && (\mathrm{d}ev_h = ev_h \text{ a derivace kompozice}) \\
&\quad = ev_h(\mathrm{d}(\mathrm{d}f)(x)(\bar{h})) = (\mathrm{d}(\mathrm{d}f)(x)(\bar{h}))(h) = \\
&\quad = \mathrm{d}^2 f(x)(\bar{h}, h)
\end{aligned}$$

□

Podívejme se podrobněji na zobrazení ev, použité v minulém důkazu. Tak například pro $n = 2$ a $m = 1$ je každé lineární zobrazení $l \in \mathrm{L}(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$ dáno maticí typu 1×2 (l_1, l_2) tak, že pro každé $h \in \mathbb{R}^2$ platí

$$l(h) = l_1(h_1) + l_2(h_2).$$

Pokud tedy například $h = (2, 3)$, pak zobrazení ev_h je určeno předpisem

$$ev_h(l) = 2l_1 + 3l_2.$$

Nyní tedy snad již není divu, že se jedná o lineární (a tedy spojité a diferencovatelné) zobrazení.

Jiný důkaz lemmatu 4.3 pomocí definice derivace lze provést takto:

$$\begin{aligned}
&\lim_{\bar{h}\to 0} \frac{\mathrm{d}_h f(x+\bar{h}) - \mathrm{d}_h f(x) - \mathrm{d}^2 f(x)(\bar{h}, h)}{\|h\|} = \lim_{\bar{h}\to 0} \frac{\mathrm{d}f(x+\bar{h})(h) - \mathrm{d}_h f(x)(h) - \mathrm{d}(\mathrm{d}f)(x)(\bar{h})(h)}{\|h\|} = \\
&\quad = \lim_{\bar{h}\to 0} \frac{(\mathrm{d}f(x+\bar{h}) - \mathrm{d}_h f(x) - \mathrm{d}(\mathrm{d}f)(x)(\bar{h}))(h)}{\|h\|} = \\
&\quad = \lim_{\bar{h}\to 0} \frac{ev_h(\mathrm{d}f(x+\bar{h}) - \mathrm{d}_h f(x) - \mathrm{d}(\mathrm{d}f)(x)(\bar{h}))}{\|h\|} = \\
&\quad = ev\left(\lim_{\bar{h}\to 0} \frac{\mathrm{d}f(x+\bar{h}) - \mathrm{d}_h f(x) - \mathrm{d}(\mathrm{d}f)(x)(\bar{h})}{\|h\|}\right) = ev_h(0) = 0.
\end{aligned}$$

Lemma 4.4. *Nechť zobrazení $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ má v bodě $x \in U$ druhou derivaci. Pak pro libovolné dva vektory $h, k \in \mathbb{R}^n$ platí*

$$\mathrm{d}_{h,k} f(x) = \mathrm{d}^2 f(x)(k, h). \tag{4.2.1}$$

D ů k a z. Plyne přímo z lemmatu 4.3 □

Věnujme se nyní chvíli pojmu spojité diferencovatelnosti druhého řádu. Budeme postupovat podobně, jako v kapitole2. Uvažme zobrazení $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ a předpokládejme, že v okolí V bodu $x \in U$ existují derivace $\mathrm{d}f$ a $\mathrm{d}_G(\mathrm{d}f)$. Druhá ze zmíněných derivací je zobrazením z V do prostoru $\mathrm{L}(\mathbb{R}^n; \mathrm{L}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m))$, na kterém je podle (1.7.1) definovaná norma. Můžeme tedy uvažovat spojitost zobrazení $\mathrm{d}_G f$ v bodě x: Je-li zobrazení $\mathrm{d}_G(\mathrm{d}f)$ v bodě x spojité, pak se o zobrazení f říká, že je v bodě x *dvakrát spojitě diferencovatelné*. O spojité diferencovatelnosti druhého řádu platí následující věty, které jsou (včetně důkazů!) velmi podobné větám 2.20 a 2.23.

Věta 4.5. *Zobrazení dvakrát spojitě diferencovatelné v bodě x je v tomto bodě dvakrát diferencovatelné.*

Věta 4.6. *Nechť pro zobrazení $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ existují všechny funkce $\partial_j f_i\colon U \to \mathbb{R}$ a $\partial_{j,k} f_i\colon U \to \mathbb{R}$, kde $i \in \{1,\dots,m\}$, $j,k \in \{1,\dots,n\}$, a jsou na množině U spojité. Pak zobrazení f je dvakrát spojitě diferencovatelné v každém bodě množiny U.*

Jestliže zobrazení je dvakrát spojitě diferencovatelné v každém bodě množiny U, říkáme také, že je *třídy* C^2.

Posledním úkolem tohoto odstavce je ukázat Schwartzovu větu o symetrii druhé derivace. Důkaz této věty je v obecném případě poměrně složitý, vybereme si proto pouze speciální (ale základní a nejobvyklejší) případ pro dvakrát spojitě diferencovatelná zobrazení.

Lemma 4.7. *Mějme zobrazení $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ a vektory h, k takové, že zobrazení $\mathrm{d}_{h,k} f$ je definováno na množině U a spojité v bodě $x \in U$. Pak platí*

$$\mathrm{d}_{h,k} f(x) = \frac{f(x+sh+sk) - f(x+sh) - f(x+sk) + f(x)}{s^2}.$$

D ů k a z. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $n = 1$ a pro pevné $s \in R$ definujme zobrazení g předpisem

$$g(x) = f(x+sk) - f(x).$$

Podle věty o střední hodnotě pro funkce nyní platí

$$\begin{aligned} f(x+sh+sk) - f(x+sh) - f(x+sk) + f(x) = g(x+sh) - g(x) = \\ = \mathrm{d}_{sh} g(y) = \mathrm{d}_{sh} f(y+sk) - \mathrm{d}_{sh} f(y) = \mathrm{d}_{sk}\mathrm{d}_{sh} f(z) = s^2 \mathrm{d}_{h,k} f(z), \end{aligned}$$

kde bod y leží na úsečce $[x, x+sh]$ a bod z na úsečce $[y, y+sk]$. Určitě tedy

$$\|y - x\| \le \|sh + sk\| = |s|\|h+k\|,$$

což znamená, že $\lim_{s\to 0} z = x$ a $\lim_{s\to 0} \mathrm{d}_{h,k} f(z) = \mathrm{d}_{h,k} f(x)$.[1] Tím je lemma dokázáno. □

Věta 4.8 (Schwartzova o symetrii druhé derivace). *Nechť zobrazení $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je dvakrát spojitě diferencovatelné v bodě $x \in U$. Pak bilineární zobrazení $\mathrm{d}^2 f(x)$ je symetrické.*

D ů k a z. Důkaz speciálního případu. Je-li zobrazení f v bodě x dvakrát spojitě diferencovatelné, pak můžeme použít předchozí lemma, z něhož plyne

$$\mathrm{d}_{h,k} f(x) = \mathrm{d}_{k,h} f(x).$$

Tvrzení tedy plyne z (4.2.1). □

4.3. Multilineární a homogenní zobrazení. Pojmy bilineární a kvadratické zobrazení v tomto odstavci zobecníme pro případ vyššího než druhého řádu. Zobrazení $l\colon X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n \to Y$, kde $X_1, X_2, \dots, X_n, Y$ jsou vektorové prostory nazýváme *multilineární zobrazení*, je-li zobrazení

$$X_i \to Y, x \mapsto l(x_1,\dots,x_{i-1},x,x_{i+1},\dots,x_n)$$

lineární pro každou volbu $x_1 \in X_1, \dots, x_{i-1} \in X_{i-1}, x_{i+1} \in X_{i+1}, \dots, x_n \in X_n$.

K libovolnému lineárnímu zobrazení $l \in \mathrm{L}(X_1; \mathrm{L}(X_2; \dots; \mathrm{L}(X_n; Y)\dots))$ předpisem

$$\bar{l}(x_1,\dots,x_n) = l(x_1)(x_2)\dots(x_n)$$

[1] V těchto limitách jsme poněkud nepřesní; necháme na čtenáři, aby si v nich udělal jasno sám (je třeba místo z psát jinou funkci proměnné s).

kanonicky přiřadit multilineární zobrazení $\bar{l} \in \mathrm{L}(X_1 \times \ldots \times X_n; Y)$.

Stejně jako v případě bilineárního zobrazení definujeme *symetrickou* a *antisymetrickou část* multilineárního zobrazení

$$\begin{aligned} \operatorname{sym} l(x_1, \ldots, x_n) &= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma} l(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}), \\ \operatorname{alt} l(x_1, \ldots, x_n) &= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma} \operatorname{sgn} \sigma \cdot l(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}), \end{aligned} \tag{4.3.1}$$

kde σ probíhá permutace množiny $\{1, \ldots, n\}$ a $\operatorname{sgn} \sigma$ je znaménko permutace. Zobrazení je *symetrické*.

Příklady. 1) Skalární součin $g \colon X \times X \to \mathbb{R}$ je symetrické multilineárním zobrazením Neboť, jak víme z algebry, $g(ax, y) = ag(x, y)$, $g(x + y, z) = g(x, z) + g(y, z)$ a $g(x, y) = g(y, x)$. $\operatorname{alt} g(x, y) = \frac{1}{2}(g(x, y) - g(y, x)) = \frac{1}{2}(g(x, y) - g(x, y)) = 0$.
2) Vektorový součin na $\mathbb{R}^3$,

$$(u, v) \to u \times v$$

je antisymetrické multilineární zobrazení $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.
3) Determinant n-tice vektorů z $\mathbb{R}^n$

$$(x_1, \ldots, x_n) \mapsto \det(x_1, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} x_{1,1} & \ldots & x_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n,1} & \ldots & x_{n,n} \end{vmatrix}$$

je antisymetrické multilineární zobrazení $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Zobrazení $l \colon X \to Y$ se nazývá *homogenní řádu n* jestliže existuje multilineární zobrazení $p \colon X^n \to Y$ takové, že pro každé $x \in X$ platí

$$l(x) = p(x, \ldots, x). \tag{4.3.2}$$

Stejně jako v případě kvadratického zobrazení, ke každému homogennímu zobrazení l existuje jediné symetrické multilineární zobrazení p splňující (4.3.2). Tato zobrazení opět nazýváme *asociovaná*. Vektorový prostor homogenních zobrazení řádu n označíme $\mathrm{L}_n(X; Y)$ a definujeme normu na jeho prvcích pomocí normy s ním asociovaným zobrazením, tedy

$$\|l\| = \|p\|.$$

4.4. Derivace vyššího řádu.

Uvažujme $f \colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, pro $p \in \mathbb{N}$ definujeme *p-tou Fréchetovu derivaci v bodě $x \in U$* obdobně jako jsme definovali druhou derivaci, tedy jako $\mathrm{d}(\mathrm{d}^{p-1} f)(x)$ pokud existuje. Jedná se zobrazení $\mathrm{L}(\mathbb{R}^n; \mathrm{L}(\mathbb{R}^n \ldots; \mathrm{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m) \ldots))$, což ovšem ztotožňujeme s $\mathrm{L}(\mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ O takovém zobrazení říkáme, že je *p-krát diferencovatelné v bodě x*

Podobně zavádíme derivace podle vektorů (parciální derivace) vyššího řádu, jako derivace podle vektorů (parciální derivace) o řád nižší. Tedy pro funkci f, bod $x \in U$ a k-tici vektorů $h_1, \ldots, h_{k-1}, h_k \in \mathbb{R}^n$ máme

$$\mathrm{d}_{h_1, \ldots, h_{k-1}, h_k} f(x) = \mathrm{d}_{h_k}(\mathrm{d}_{h_1, \ldots, h_{k-1}} f)(x), \qquad \frac{\partial f}{\partial h_1, \ldots, h_{k-1}, h_k}(x) = \frac{\partial}{\partial h_k} \left(\frac{\partial f}{\partial h_1, \ldots, h_{k-1}} \right)(x),$$

a parciální derivaci pro k-tici indexů $i_1, \ldots, i_{k-1}, i_k \in \{1, \ldots, n\}$

$$\partial_{i_1,\dots,i_{k-1},i_k} f(x) = \partial_{i_k}(\partial_{i_1,\dots,i_{k-1}} f)(x), \qquad \frac{\partial f}{\partial x_{i_1},\dots,x_{i_{k-1}},x_{i_k}}(x) = \frac{\partial}{\partial x_{i_k}}\left(\frac{\partial f}{\partial x_{i_1},\dots,x_{i_{k-1}}}\right)(x).$$

Vraťme se nyní k první derivaci funkce (pro jednoduchost $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$) má-li f derivaci v x pak má, jako lineární zobrazení matici v kanonických souřadnicích složenou z parciálních derivací. Tedy

$$\mathrm{d}f(x)(h) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x),\dots,\frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right)\begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)h_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)h_n. \tag{4.4.1}$$

Pokud si uvědomíme, že $h_i = \mathrm{pr}_i(h)$ (pr_i je i-tá kartézská projekce), lze (4.4.1) přepsat:

$$\mathrm{d}f(x)(h) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)\,\mathrm{pr}_1(h) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\,\mathrm{pr}_n(h). \tag{4.4.2}$$

Tradičně ovšem pr_1 značíme $\mathrm{d}x$, případně $\mathrm{d}x_1$, podobně s pr_2 je označováno $\mathrm{d}y$ či $\mathrm{d}x_2$, tedy pro lineární operátory máme

$$\mathrm{d}f(x) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)\mathrm{d}x_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\mathrm{d}x_n. \tag{4.4.3}$$

Nyní pokud uvažujeme druhou derivaci, pak druhá derivace jako bilineární zobrazení lze popsat pomocí druhých parciálních derivací následovně:

$$\mathrm{d}^2 f(x)(h,k) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i x_j}(x) h_i k_j$$

To lze maticově popsat zápisem

$$\mathrm{d}^2 f(x)(h,k) = (h_1,\dots,h_n)\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_1}(x) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n x_1}(x) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n x_n}(x) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}.$$

Toto lze zobecnit pro derivaci p-tého řádu.

Věta 4.9 (o reprezentaci). *Nechť $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je p-krát diferencovatelná v bodě $x \in U$. Potom pro každé $h^1,\dots,h^p \in \mathbb{R}^n$ platí*

$$\mathrm{d}^p f(x)(h^1,\dots,h^p) = \sum_{i_1=1}^{n}\cdots\sum_{i_p=1}^{n} \frac{\partial^p f}{\partial x_{i_1}\cdots x_{i_p}}(x) h^1_{i_1}\cdots, h^p_{i_p},$$

zde $h^k = (h^k_1,\dots,h^k_n)$.

Věta 4.10 (symetrie parciálních derivací). *Nechť zobrazení $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je p-krát spojitě diferencovatelné v bodě $x \in U$. Pak multilineární zobrazení $\mathrm{d}^p f(x)$ je symetrické.*

Důsledek 4.11. *Nechť zobrazení $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je p-krát spojitě diferencovatelné v bodě $x \in U$ a $h_1,\dots,h_k \in \mathbb{R}^n$. Pak pro libovolnou permutaci σ množiny $\{1,\dots,k\}$ platí*

$$\mathrm{d}_{h_1,\ldots,h_k} f(x) = \mathrm{d}_{h_{\sigma(1)},\ldots,h_{\sigma(k)}} f(x),$$

speciálně

$$\frac{\partial f}{\partial x_{i_1},\ldots,x_{i_k}}(x) = \frac{\partial f}{\partial x_{i_{\sigma(1)}},\ldots,x_{i_{\sigma(k)}}}(x)$$

D ů k a z. Plyne z definice derivace podle vektoru (parciální) vyššího řádu a faktu, že každou permutaci lze realizovat jako výměnu dvou sousedních indexů. Tento částečný výsledek byl dokázáno ve větě 4.8. □

4.5. Diferenciál a Taylorův polynom. Nechť zobrazení $f\colon \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ má v bodě $x \in U$ derivaci řádu k, definujeme *diferenciál k-tého řádu funkce f v bodě a* a označíme jej $\mathbf{d}^k f(a)$ jako homogenní zobrazení z $\mathrm{L}_p(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$ asociované s $\mathrm{d}^k f(x)$. Tedy pro každé $h \in \mathbb{R}^n$ platí

$$\mathbf{d}^p f(x)(h) = \mathrm{d}^p f(x)(h,\ldots,h). \tag{4.5.1}$$

Lemma 4.12. *Nechť $l \in \mathrm{L}_r(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$. Pak*

a) pro libovolné $p < r$ platí $\mathbf{d}^p l(0) = 0$,
b) $\mathbf{d}^r l(0) = r! \cdot l$,
c) pro libovolné $p > r$, $x \in \mathbb{R}^n$ platí $\mathbf{d}^p l(x) = 0$.

D ů k a z.

$$\mathbf{d}^r l(0)(h) = \|h\|^r \mathbf{d}^r l(0)\left(\frac{h}{\|h\|}\right)$$

□

Lemma 4.13. *Nechť pro zobrazení $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ a bod $x \in U$ platí*

$$\begin{aligned} \mathrm{d}f(x) &= 0\\ \mathrm{d}^2 f(x) &= 0\\ &\vdots\\ \mathrm{d}^k f(x) &= 0. \end{aligned}$$

Pak

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|f(x+h) - f(x)\|}{\|h\|^k} = 0.$$

D ů k a z. Pro $k = 1$ tvrzení plyne přímo z definice derivace. Předpokládejme nyní platnost tvrzení pro $k = r - 1$ a položme $g = \mathrm{d}f$. Máme $g(x) = 0$ a

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|g(x+h) - g(x)\|}{\|h\|^{r-1}} = \lim_{r\to 0} \frac{\|g(x+h)\|}{\|h\|^{r-1}} = 0,$$

což znamená, že k libovolnému $\varepsilon > 0$ existuje otevřená koule $B \subset \mathbb{R}^n$ se středem v nule taková, že pro každé $h \in B$ platí

$$\|g(x+h)\| = \|g(x+h) - g(x)\| < \varepsilon \|h\|^{r-1}.$$

Pro libovolný vektor $h \in B$ nyní podle důsledku 2.19 věty o střední hodnotě platí

$$\|f(x+h) - f(x)\| \le \sup_{y\in[x,x+h]} \|\mathrm{d}f(y)\| \cdot \|h\| = \sup_{y\in[x,x+h]} \|g(y)\| \cdot \|h\| < \varepsilon\|h\|^{r-1}\|h\| = \varepsilon\|h\|^r.$$

Tím je tvrzení dokázáno i pro $k = r$. $\square$

Věta 4.14 (o diferenciálu vyššího řádu). *Nechť zobrazení $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ má derivaci řádu k v bodě $x \in U$. Pak*

$$f(x+h) - f(x) = \mathbf{d}f(x)(h) + \frac{1}{2!}\mathbf{d}^2 f(x)(h) + \cdots + \frac{1}{k!}\mathbf{d}^k f(x)(h) + \varepsilon(h)\|h\|^k,$$

kde

$$\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0. \tag{4.5.2}$$

D ů k a z. Položme

$$g(h) = f(x+h) - f(x) - \mathbf{d}f(x)(h) - \frac{1}{2!}\mathbf{d}^2 f(x)(h) - \cdots - \frac{1}{k!}\mathbf{d}^k f(x)(h).$$

Podle lemmatu 4.12 máme pro $r \in \{1, \dots, k\}$ $\mathbf{d}^r g(0) = 0$ a podle lemmatu 4.13 pro

$$\varepsilon(h) = \frac{g(h)}{\|h\|^k}$$

platí (4.5.2). $\square$

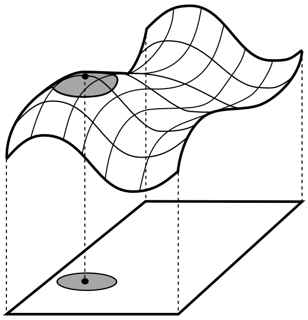
Věta 4.15 (Taylova pro funkce více proměnných). *Nechť zobrazení $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ spojitě diferencovatelné řádu $k+1$ na U a úsečka $[x, x+h]$ leží v U. Potom existuje bod $\xi \in [x, x+h]$ takový, že*

$$\begin{aligned} f(x+h) = f(x) + \mathbf{d}f(x)(h) + \frac{1}{2!}\mathbf{d}^2 f(x)(h) + \cdots + \frac{1}{k!}\mathbf{d}^k f(x)(h) +& \\ + \frac{1}{(k+1)!}\mathbf{d}^{k+1} f(\xi)(h)& \end{aligned} \tag{4.5.3}$$

D ů k a z. Položme $g(h) = f(x) + \mathbf{d}f(x)(h) + \frac{1}{2!}\mathbf{d}^2 f(x)(h) + \cdots + \frac{1}{k!}\mathbf{d}^k f(x)(h) + \frac{1}{(k+1)!}$. $\square$

5. Extrémy funkcí více proměnných

5.1. Extremální úlohy bez vazby. V této sekci se budeme věnovat problému…
Nechť $f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je funkce, řekneme, že funkce f nabývá v bodě $x \in U$ *lokálního minima* jestliže existuje okolí V bodu x takové, že pro každé $y \in V$, $y \neq x$ platí



Lokální maximum.

$$f(x) \leq f(y). \tag{5.1.1}$$

Pokud lze ve výrazu (5.1.1) nahradit nerovnost $\leq$ ostrou nerovností $<$, říkáme, že f *nabývá v x ostrého lokálního minima*. Zcela obdobně definujeme také pojmy *lokální maximum funkce* a *ostré lokální maximum funkce*. *Lokální extrém* je potom souhrnný název pro lokální minimum a maximum.

Následující věta uvádí nutnou (nikoliv však postačující) podmínku lokálního extrému pro funkce, jistého stupně diferencovatelnosti.

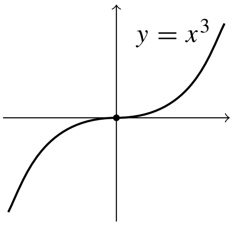
Věta 5.1 (zobecněná Fermatova). *Nechť funkce $f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ má v bodě $x \in U$ lokální minimum. Pokud pro nějaké $h \in \mathbb{R}^n$ existuje $\mathrm{d}_h f(x)$ pak $\mathrm{d}_h f(x) = 0$.*

D ů k a z. Uvažujme funkci $g_{x,h}$ z definice derivace podle vektoru (viz (2.2.2)). Ukážeme, že $(f \circ g_{x,h})'(0) = 0$, to spolu s větou 2.11 dává tvrzení věty. Je jasné, že $f \circ g_{x,h}$ má v $0 \in \mathbb{R}$ lokální minimum. Podle nutné podmínky existence extrému z prvního ročníku máme $(f \circ g_{x,h})'(0) = 0$.
□

Důsledek 5.2. *Nechť funkce $f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ má v bodě $x \in U$ lokální minimum.*
1. Pokud $\mathrm{d}_G f(x)$ existuje, je $\mathrm{d}_G f(x) = 0$.
2. Pokud existují parciální derivace f v bodě x, potom

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) = 0, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) = 0.$$

Samozřejmě, pokud existuje $\mathrm{d}f(x)$ v bodě lokálního extrému, je nulová.
Obdobné tvrzení lze dokázat také pro lokální maximum.



Věta 5.1 nedává postačující podmínku existence lokálního extrému. To ukazuje následující příklad.
Příklad. Funkce $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ má derivaci v bodě nula rovnu nule. Ovšem neexistuje okolí bodu nula takové, aby hodnota v nule byla menší než hodnoty funkce z toho okolí.

Věta 5.1 dává jen nutnou podmínku pro lokální extrém, to znamená, že pokud hledáme lokální extrémy, stačí se omezit na body, ve kterých je nutná podmínka splněna. Takové body nazýváme *stacionární body*.

Nechť l je kvadratické zobrazení, řekneme, že l je:
pozitivně definitní jestliže pro libovolný $h \in \mathbb{R}^n$, $h \neq 0$ je $l(h) > 0$;

negativně definitní jestliže pro libovolný $h \in \mathbb{R}^n$, $h \neq 0$ je $l(h) < 0$;
indefinitní jestliže existují $h, k \in \mathbb{R}^n$ takové, že $l(h) > 0$ a $l(k) < 0$.

Pokud nahradíme ostrou nerovnost v definici pozitivní definitnosti neostrou, dostaneme *pozitivně semidefinitní*, obdobně *negativně semidefinitní*.

Lemma 5.3. *Pokud je kvadratické zobrazení $l: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ pozitivně definitní, potom existuje $K > 0$ takové, že pro každé $h \in \mathbb{R}^n$ je $l(h) \geq K\|h\|$.*
D ů k a z. Označme $S = \{h \in \mathbb{R}^n \mid \|h\| = 1\}$ jednotkovou sféru v $\mathbb{R}^n$. Množina S je kompaktní (evidentně je ohraničená a je uzavřená, jelikož je vzorem množiny $\{0\}$ při spojitém zobrazení $\|\cdot\|$). l tedy na S nabývá svého minima, označme jej K. Určitě $K \neq 0$, protože l je pozitivně definitní. Nyní pokud je $h \neq 0$, máme

$$l(h) = l\left(\|h\|\frac{h}{\|h\|}\right) = \|h\|^2 l\left(\frac{h}{\|h\|}\right) \geq K\|h\|^2.$$

Pro $h = 0$ je nerovnice $l(h) \geq K\|h\|^2$ splněna taktéž. □

Následující věta dává postačující podmínku existence lokálního extrému.

Věta 5.4. *Nechť $f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je spojitě diferencovatelná na okolí bodu $x \in U$, který je stacionárním bodem f.*

1. *Je-li $\mathbf{d}^2 f(x)$ pozitivně definitní, pak má f v bodě lokální minimum.*
2. *Je-li $\mathbf{d}^2 f(x)$ negativně definitní, pak má f v bodě lokální maximum.*
3. *Je-li $\mathbf{d}^2 f(x)$ indefinitní, pak f v bodě x nemá lokální extrém.*

D ů k a z. 1. Jelikož je x stacionárním bodem, pak podle věty 4.14 o diferenciálu vyššího řádu pro $k = 2$, máme

$$f(x+h) - f(x) = \tfrac{1}{2}\mathbf{d}^2 f(x)(h) + \varepsilon(h)\|h\|^2,$$

kde $\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$. Podle lemmatu 5.3 existuje $K > 0$ takové, že $\mathbf{d}^2 f(x)(h) \geq K\|h\|^2$. Tedy

$$f(x+h) - f(x) \geq \tfrac{1}{2}K\|h\|^2 + \varepsilon(h)\|h\|^2 = \left(\tfrac{1}{2}K + \varepsilon(h)\right)\|h\|^2$$

Limita závorky pro $h \to 0$ je rovna $\frac{1}{2}K$, proto existuje koule $B_0(r)$, že pro všechna $h \in B_0(r)$ je $\frac{1}{2}K + \varepsilon(h) > 0$. Pro taková $h \neq 0$ je

$$f(x+h) - f(x) \geq \tfrac{1}{2}K\|h\|^2 > 0.$$

Hledaným okolím, na němž je $f(x)$ nejmenší hodnotou, je tedy $B_x(r)$.
2. Převede se na předchozí případ uvažováním zobrazení $-f$.
3. Existují $h, k \in \mathbb{R}^n$ takové, že $\mathbf{d}f(x)(h) > 0$ a $\mathbf{d}f(x)(k) < 0$. Pro $t \neq 0$ máme

$$f(x+th) - f(x) = \tfrac{1}{2}\mathbf{d}^2 f(x)(th) + \varepsilon(th)\|th\|^2 = t^2\left(\tfrac{1}{2}\mathbf{d}^2 f(x)(h) + \varepsilon(t)\|h\|^2\right).$$

Jelikož $\lim_{t\to 0} \varepsilon(t)\|h\|^2 = 0$, pro dostatečně malá t je $\frac{1}{2}\mathbf{d}^2 f(x)(h) + \varepsilon(t)\|h\|^2 > 0$. Proto libovolně blízko x existuje bod $x + th$ takový, že $f(x+t) - f(x) > 0$.

Na druhou stranu pokud v předchozí úvaze místo h použijeme k, dostáváme, že existují libovolně malá t, pro které $\frac{1}{2}\mathbf{d}^2 f(x)(k) + \varepsilon(t)\|k\|^2 < 0$ a následně $t^2(\frac{1}{2}\mathbf{d}^2 f(x)(k) + \varepsilon(t)\|k\|^2) < 0$. Odtud $f(x+tk) - f(x) < 0$. □

Zopakujme z algebry známé *Sylvestrovo pravidlo* pro kvadratickou formy l: *Nechť p je symetrická bilineární forma asociovaná s l a A je matice p v libovolné bázi. Uvažujme* $\det A_1, \det A_2, \dots, \det A_n$ *její*

hlavní minory.
1. Pokud $\det A_1 > 0, \det A_2 > 0, \dots, \det A_n > 0$*, potom je l pozitivně definitní.*
2. Pokud $\det A_1 < 0, \det A_2 > 0, \det A_3 < 0, \det A_4 > 0\dots$*, potom je l negativně definitní.*
Příklad. Nalezněte lokální extrémy funkce $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = x^3 - 3xy + 3y^2.$$

Nejprve nalezneme stacionární body f, tím že parciální derivace f položíme rovny nule:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 - 3y = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -3x + 6y = 0.$$

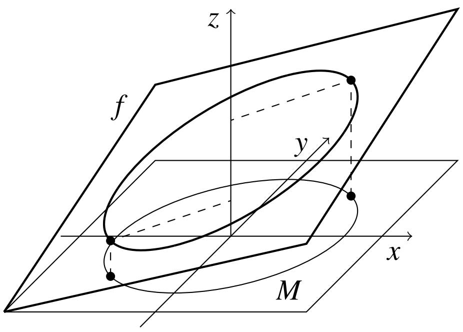
Stacionárními body — tedy body podezřelými z lokálního extrému jsou $(0, 0)$ a $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$. Abychom zjistili je-li extrém v některém z nich vyřešíme definitnost $\mathbf{d}^2 f(x, y)$ v těchto bodech. Matice příslušného kvadratického zobrazení se skládá z druhých parciálních derivací.

$$f''(x, y) = \begin{pmatrix} \partial^2_{x^2} f(x, y) & \partial^2_{xy} f(x, y) \\ \partial^2_{xy} f(x, y) & \partial^2_{y^2} f(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$$

Pro $(x, y) = (0, 0)$ jsou jeho hlavní minory: $\det A_1 = 0$, $\det A_2 = \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = -9$. Nyní, pro $(x, y) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ jsou jeho hlavní minory: $\det A_1 = 3$, $\det A_2 = 9$.

To znamená, že v bodě $(0, 0)$ nemá f lokální extrém ale v bodě $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ má lokální minimum.

Čtenáři jistě neuniklo, že věta 5.4 nic neříká v případě, že je $\mathbf{d}^2 f(x)$ semidefinitní. Tak tomu bylo již v případě funkce na $\mathbb{R}$ a k vyšetření extrému, kdy $f'(x) = 0$, $f''(x) = 0$, bylo nutné použít jiného postupu.



5.2. Vázané extrémy. Nechť $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, a $M \subset U$, řekneme, že f nabývá *lokálního extrému v* $x \in M$ *na* M jestliže x je extrémem (stejného druhu) funkce $f|_M$.

Ačkoliv funkce $f(x, y) = x + y + 1$ lokální extrém nemá pokud ji vyšetřujeme na množině M dané rovnicí $x^2 + y^2 - 1 = 0$ extrému nabývat musí (jako spojitá funkce na kompaktní množině).

Jedním ze způsobů, jak zjednodušit problém hledání extrému na množině, je parametrizací množiny M. Tím se může snížit i počet neznámých v rovnicích, které je třeba potom vyřešit.

Věta 5.5 (o parametrizaci M**).** *Nechť* $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *je funkce a* $M \subset U$ *množina. Pokud pro nějaký bod* $x \in M$ *existuje homeomorfismus* $\varphi\colon W \subset \mathbb{R}^r \to V \subset M$ *takový že* V *je otevřená množina*[1)] *v* M, $x \in V$ *a* $f \circ \varphi$ *má lokální minimum v* $t = f^{-1}(x)$*, potom* f *má v* x *lokální minimum na množině* M.

Důkaz. Tvrzení je zřejmé. □

Obdobně lze tvrzení formulovat pro lokální maximum

Příklad. Najděme lokální minimum funkce $f(x, y) = x + y + 1$ na množině M dané rovnicí $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$. Použijeme větu 5.5. Položme $\varphi(t) = (\cos t, \sin t)$ to jistě není injektivní, ale až budeme znát bod podezřelý z minima, můžeme φ definovat jen na otevřeném intervalu kolem tohoto bodu na němž u prostá bude.

Hledáme lokální minimum složení $(f \circ \varphi)(t) = \cos t + \sin t + 1$. Proto jej zderivujeme a položíme rovno nule:

1) otevřená množina v M je zde myšleno jako otevřená množina v indukované topologii na M, tedy $V = M \cap O$ pro nějakou otevřenou množinu $O \subset \mathbb{R}^n$.

$$(f \circ \varphi)'(t) = -\sin t + \cos t = 0$$

Rovnice je splněna, je-li $t = \pi/4$ nebo $t = 5\pi/4$ ostatní řešení rovnice se po aplikaci φ nezobrazují již na nic nového. Body podezřelé z extrému jsou tedy $t = \pi/4, 5\pi/4$ potažmo $\varphi(\pi/4) = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ a $\varphi(-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$. Druhou derivací (čeho?) zjistíme, že bod $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ je bodem lokálního maxima f na M a $(-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$ bodem lokálního minima.

Další metodou hledání lokálního extrému na množině jsou tzv. Lagrangeovy multiplikátory. Ta zahrnuje funkci, která popisuje množinu, do nové funkce a hledáme její extrémy. Tímto postupem se převádí problém hledání extrémů na množině na problém hledání lokálního extrému bez podmínek.

Množina $M \subset \mathbb{R}^n$ je zadaná pomocí funkce $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ následovně

$$M = \{x \in U \mid g(x) = 0\}. \tag{5.2.1}$$

Jelikož má g oborem hodnot $\mathbb{R}^k$ je M zadána k rovnicemi

$$M = \{x \in U \mid g^1(x) = 0, \dots, g^k(x) = 0\}. \tag{5.2.2}$$

Rovnicím v (5.2.2) se někdy říká *vazbové podmínky.*

Pro $\lambda \in \mathbb{R}^k$ položme

$$L_\lambda(x) = f(x) + \lambda_1 g^1(x) + \cdots + \lambda_k g^k. \tag{5.2.3}$$

Funkci L_λ říkáme *Lagrangeova funkce*.

Věta 5.6 (o Lagrangevých multiplikátorech, postačující podmínka). *Nechť $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $M \subset U$ definovaná (5.2.1), uvažujeme Lagrangeovu funkci definovanou (5.2.3).*

Jestliže pro nějaké $\lambda \in \mathbb{R}^k$ má Langrangeova funkce L_λ lokální minimum v bodě $x \in M$, potom má f v x lokální minimum na množině M.

Důkaz. Nechť x je lokálním minimem L_λ. Evidentně je x také lokálním minimem L_λ na množině M. Jelikož $L_\lambda|_M = f|_M + \sum_{i=1}^k \lambda_i \cdot g^i|_M$ a $g|_M = 0$, musí být x lokálním minimem $f|_M$. □

Větu lze samozřejmě zformulovat i pro případ lokálního maxima.

Poznamenejme pro zajímavost, že na funkci f nejsou ve větě 5.6 kladeny žádné předpoklady.

Následující věta nám usnadní hledání lokálních extrémů. Je opět zformulována pro lokální minimum, ale platí samozřejmě i pro lokální maximum.

Věta 5.7 (o Lagrangevých multiplikátorech, nutná podmínka). *Nechť $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $M \subset U$ je definovaná (5.2.1), $x \in M$, f a g jsou spojitě diferencovatelné v x a $\mathrm{d}g(x)$ je surjektivní. Jestliže x je lokálním minimem f na množině M potom existuje $\lambda \in \mathbb{R}^k$ takové, že funkce L_λ definovaná (5.2.3) má v x stacionární bod, tedy $\mathrm{d}L_\lambda(x) = 0$.*

Podmínka $\mathrm{d}g(x)$ je surjektivní v předchozí větě znamená, že matice parciálních derivací

$$g'(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g^1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \dfrac{\partial g^1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial g^k}{\partial x_1}(x) & \cdots & \dfrac{\partial g^k}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

má maximální hodnost.

Kombinace vět 5.6 a 5.7 dává silný nástroj. Nejprve nalezneme stacionární body funkcí L_λ, pro všechny volby λ. Věta 5.7 nám zaručuje, že lokální extrémy jsou tímto pokryty. Vyšetříme tyto stacionární body Lagrangeovy funkce a věta 5.6 nám zaručuje, že lokální extrémy, které jsme našli, jsou lokálními extrémy f na množině M.

Podrobný postup při hledání lokálních extrémů pomocí Lagrangeových multiplikátorů bez velkých skoků v postupu ilustruje následující příklad.

Příklad. Vraťme se k příkladu funkce f s vazbovou podmínkou g, kde

$$f(x,y) = x + y + 1, \quad g(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0.$$

Nejprve ověříme podmínku surjektivity derivace g. Máme

$$\partial_x g(x,y) = 2x, \quad \text{a} \quad \partial_y g(x,y) = 2y.$$

Tedy d$g(x,y)$ má matici

$$g'(x,y) = (2x, 2y).$$

Ta má nulovou hodnost jen v počátku, ten ovšem bodem množiny M není. Proto všechny body M by mohly být bodem x z věty 5.7. Spojitá diferencovatelnost f i g je ve všech bodech M zřejmá. Lagrangeova funkce pro $\lambda \in \mathbb{R}$ má tvar

$$L_\lambda(x,y) = x + y + 1 + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$

Pokud je nějaké (x,y) stacionárním bodem některé L_λ (tedy pro nějaké λ) splňuje

$$\begin{aligned} \partial_x L_\lambda &= 1 + \lambda 2x = 0 \\ \partial_y L_\lambda &= 1 + \lambda 2y = 0 \end{aligned}$$

Tuto soustavu dvou rovnic o třech neznámých doplňuje podmínka, že $(x,y) \in M$ tedy $g(x,y) = 0$, konkrétně

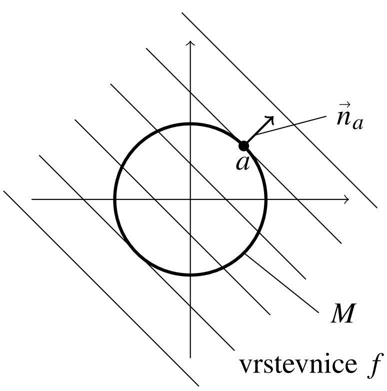
$$x^2 + y^2 - 1 = 0.$$

Vyřešením této soustavy dostáváme jednak $x = \sqrt{2}/2$, $y = \sqrt{2}/2$, $\lambda = -\sqrt{2}/2$ a jednak $x = -\sqrt{2}/2$, $y = -\sqrt{2}/2$, $\lambda = \sqrt{2}/2$. Nyní ověříme, že zda je $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ lokálním extrémem $L_{-\sqrt{2}/2}$ a zda je $(-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$ lokálním extrémem $L_{\sqrt{2}/2}$.

Kvadratická forma $\mathbf{d}L_{-\sqrt{2}/2}(x,y)$ má matici

$$L''_\lambda(x,y) = \begin{pmatrix} 2\lambda & 0 \\ 0 & 2\lambda \end{pmatrix}, \quad L''_{-\sqrt{2}/2}(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2) = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}.$$

Ta je negativně definitní, to znamená, že $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ je lokální maximem $L_{-\sqrt{2}/2}$ a věta 5.7 říká, že $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ lokálním maximem f na M.



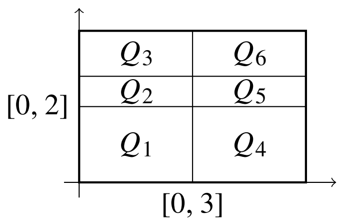
Princip metody Lagrangeových multiplikátorů spočívá v nalezení bodu a množiny M, ve kterém bude normálový vektor $\vec{n}_a$ k množině M v bodě a kolmý na vrstevnice funkce f. Na obrázku je znázorněna situace tato situace z příkladu.

6. Riemannův integrál na $\mathbb{R}^n$

6.1. Integrál na obdélníku v $\mathbb{R}^n$. V prvním paragrafu této kapitoly zavedeme pojem integrálu funkce na obdélníku v $\mathbb{R}^n$. Postupujeme analogicky k případu Riemannova integrálu na $\mathbb{R}$.

Uspořádanou k-tici $P = (t_0, t_1, \dots, t_k)$, pro kterou je $a = t_0 \le t_1 \le \dots \le t_k = b$, nazýváme *dělení intervalu* $[a, b]$. Nechť $Q = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$ je *obdélník v* $\mathbb{R}^n$. Pokud pro každé $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ je P_n dělením intervalu $[a_i, b_i]$, potom uspořádaná n-tice $P = (P_1, \dots, P_n)$ je dělením obdélníku Q. Množinu všech dělení obdélníku Q označujeme $\mathscr{P}(Q)$.

Rozklad obdélníku Q definovaný dělením P je konečná množina obdélníků $\operatorname{Rect} P = \{Q_i\}$ takových, že jejich sjednocení je Q, průnik vnitřků libovolné různé dvojice je prázdný a $\operatorname{pr}_j(Q_i) = [P_j, P_{j+1}]$

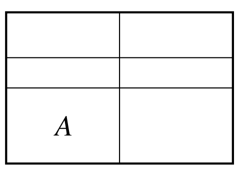


Dělení P obdélníku Q.

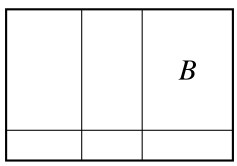
Příklad Mějme $Q = [0, 3] \times [0, 2]$. Uvažujeme dělení $P_1 = (0, \frac{3}{2}, 3)$ intervalu $[0, 3]$ a $P_2 = (0, 1, \frac{7}{5}, 2)$ intervalu $[0, 2]$. Dělení $P = (P_1, P_2) = ((0, \frac{3}{2}, 3), (0, 1, \frac{7}{5}, 2))$ je dělení obdélníku Q.

$$\{Q_i\} = \{[0, \tfrac{3}{2}] \times [0, 1], [0, \tfrac{3}{2}] \times [1, \tfrac{7}{2}], [0, \tfrac{3}{2}] \times [\tfrac{7}{2}, 2], [\tfrac{3}{2}, 2] \times [0, 1], [\tfrac{3}{2}, 2] \times [1, \tfrac{7}{2}], [\tfrac{3}{2}, 2] \times [\tfrac{7}{2}, 2]\}$$

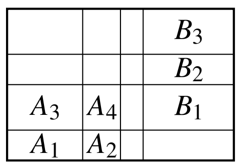
Dělení R obdélníku Q je *zjemněním dělení P,* pokud pro každé $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ je R_i zjemněním dělení P_i tedy pro každé $t_j = P_{i,j} = R_{i,l}$ pro nějaké l. Jinými slovy, R je zjemněním P v každé souřadnici. Dělení S obdélníku Q je *společným zjemněním dělení P* a Q, pokud S je zjemněním P i Q.



Dělení P obdélníku Q.



Dělení R

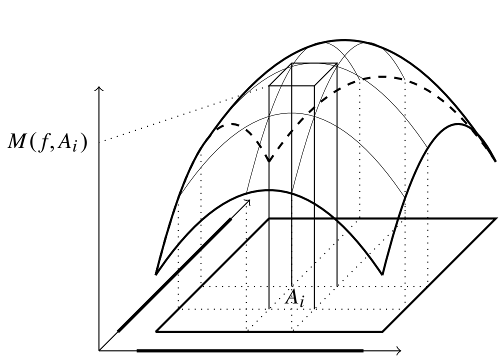


Společné zjemnění P a R.

Evidentně, ke každým dvěma dělením existuje jejich společné zjemnění.

Je-li A obdélník dělení P a S je jeho zjemnění, potom existují obdélníky $A_1, \dots, A_l$ dělení S takové, že $A = A_1 \cup \dots \cup A_l$.

Nechť $f\colon Q \to \mathbb{R}$ je funkce na obdélníku Q. V celé této kapitole budeme předpokládat, že je f omezená. Pro takovou funkci v následujících odstavcích definujeme integrál. V případě Riemannova integrálu v prvním ročníku jsme definovali horní a dolní součty příslušné určitému dělení intervalu. Pomocí délky těchto intervalů dělení vynásobené supremem a infimem. Proto nyní potřebujeme definovat n-rozměrný objem. Nechť $A = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$ je obdélník, definujeme *n-rozměrný objem obdélníku A* (nebo pouze *objem*), jako $\operatorname{vol} A = (b_1 - a_1) \cdot \ldots \cdot (b_n - a_n)$.



Pro funkci f a dělení P obdélníku Q definujeme *horní součet*

$$S(f,P) = \sum_{A_i} \sup_{A_i} f(x) \cdot \operatorname{vol} A_i = \sum_{A_i} M(f, A_i) \operatorname{vol} A_i \tag{6.1.1}$$

a *dolní součet*

$$s(f,P) = \sum_{A_i} \inf_{A_i} f(x) \cdot \operatorname{vol} A_i = \sum_{A_i} m(f, A_i) \operatorname{vol} A_i. \tag{6.1.2}$$

Poznamenejme, že supremum a infimum v rovnicích (6.1.1),(6.1.2) vždy existuje, jelikož je f ohraničená, a součet je konečný, neboť Q je ohraničený.

Označme

$$H(f) = \{S(f,P) \mid P \in \mathscr{P}(Q)\}, \qquad \text{(množina horních součtů)}$$

$$D(f) = \{S(f,P) \mid P \in \mathscr{P}(Q)\}. \qquad \text{(množina dolních součtů)}$$

Následující dvě lemmata jsou analogickými tvrzeními k těm z prvního ročníku.

Lemma 6.1. *Nechť R je zjemněním dělení P na Q, potom*

$$S(f,P) \geq S(f,R),$$
$$s(f,P) \leq s(f,R).$$

D ů k a z. Ke každému obdélníku A_i dělení P existuje $l(i) \in \mathbb{N}$ a obdélníky $A_{i,1}, \dots, A_{i,l(i)}$ příslušné k dělení R takové, že $A_i = A_{i,1} \cup \dots \cup A_{i,l(i)}$ (viz poznámka za definicí zjemnění). Navíc máme $Q = \bigcup_{i=1}^{k(P)} \bigcup_{j=1}^{l(i)} A_{i,j}$.

$$M(f, A_i) \geq M(f, A_{i,j})$$

$$\begin{aligned}
S(f,P) &= \sum_{i=1}^{k(P)} M(f, A_i) \operatorname{vol} A_i \\
&= \sum_{i=1}^{k(P)} M(f, A_i) \operatorname{vol}(A_{i,1} \cup \dots \cup A_{i,l(i)}) \\
&= \sum_{i=1}^{k(P)} M(f, A_i) \sum_{j=1}^{l(i)} \operatorname{vol} A_{i,j} \\
&\geq \sum_{i=1}^{k(P)} \sum_{j=1}^{l(i)} M(f, A_{i,j}) \operatorname{vol} A_{i,j} \\
&= \sum_{i=1}^{k(R)} M(f, A_i) \operatorname{vol} A_i = S(f,R).
\end{aligned}$$

Výsledek pro dolní součty plyne stejným způsobem za pomoci nerovnosti $m(f, A_i) \leq m(f, A_{i,j})$. $\square$

Lemma 6.2. *Nechť P a R jsou dvě dělení Q, potom*

$$s(f, P) \leq S(f, R).$$

D ů k a z. Nechť T je společné zjemnění P a R potom podle lemmatu 6.1 máme

$$s(f, P) \leq s(f, T) \leq S(f, T) \leq S(f, R).$$

□

Předchozí tvrzení nás opravňuje k následujícímu.

Důsledek 6.3. *Pro každou omezenou funkci $f\colon Q \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je*

$$D(f) \leq H(f).$$

Množiny $D(f)$ a $H(f)$ jsou evidentně neprázdné a podle předchozího důsledku je $D(f)$ shora ohraničená libovolným horním součtem; stejně tak je $H(f)$ zdola ohraničená. Proto můžeme definovat *dolní integrál f na Q* jako

$$\underline{\int_Q} f = \sup D(f) \tag{6.1.3}$$

a *horní integrál f na Q* jako

$$\overline{\int_Q} f = \inf H(f). \tag{6.1.4}$$

Nyní pokud pro omezenou $f\colon Q \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je $\underline{\int_Q} f = \overline{\int_Q} f$, pak tuto hodnotu označíme $\int_Q f$ a říkáme ji *integrál funkce f na obdélníku Q*. Funkci f pak nazveme *integrovatelnou na Q*

V případě konstantní funkce $f \equiv c$ jsou množiny $H(f)$ a $D(f)$ jednoprvkové obsahující číslo c vol Q, což je tím pádem její integrál. Přirozené, že? Ověřte!

Spojitá funkce je také integrovatelná, jak uvidíme z pozdějšího tvrzení.

Věta 6.4. *Nechť $f, g\colon Q \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ jsou omezené integrovatelné funkce na Q a $c \in \mathbb{R}$. Potom*
1. $f + g$ je integrovatelná na Q a

$$\int_Q f + g = \int_Q f + \int_Q g.$$

2. cf je integrovatelná na Q a

$$\int_Q cf = c \int_Q f.$$

D ů k a z. !!!!
□

Věta 6.5. *Nechť $A, B \subset \mathbb{R}^n$ jsou obdélníky s disjunktními vnitřky takové, že $A \cup B$ je obdélník. Dále $f\colon A \cup B \to \mathbb{R}$ je omezená integrovatelná funkce. Potom f je integrovatelná na A i B a*

$$\int_{A \cup B} f = \int_A f + \int_B f. \tag{6.1.5}$$

D ů k a z. Z kritéria integrovatelnosti (věta 6.6) existuje dělení P obdélníku $A \cup B$ takové, že $S(f, P) - s(f, P) < \varepsilon$. Nechť R je zjemněním dělení P vzniklé přidáním bodů tak, aby

$R_i = (s_0, \dots, s_{k-1}, s_k = t_0, t_1, \dots, t_l)$. Potom S, kde $S_i = (s_0, \dots, s_{k-1}, s_k)$, a T, kde $T_i = (t_0, t_1, \dots, t_l)$, jsou děleními A a B. Platí

$$S(f, P) > S(f, R) = S(f, S) + S(f, T) \quad (R \text{ zjemnění } P, \text{konstrukce } S \text{ a } T) \tag{6.1.6}$$
$$s(f, P) < s(f, R) = s(f, S) + s(f, T). \quad (R \text{ zjemnění } P, \text{konstrukce } S \text{ a } T) \tag{6.1.7}$$

Což dává $S(f, S) - s(f, S) + S(f, T) - s(f, T) = S(f, R) - s(f, R) < \varepsilon$. Oba rozdíly jsou tedy menší než ε a věta 6.6 zaručuje integrovatelnost f na A a B. Rovnice (6.1.5) plyne z (6.1.6) a 6.1.7. □

Věta 6.6 (kritérium integrovatelnosti). *Nechť $f : Q \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je omezená. Funkce f je integrovatelná, právě když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje dělení P obdélníku Q takové, že $S(f, P) - s(f, P) < \varepsilon$.*

Stejně jako v případě integrálu na $\mathbb{R}$ lze vyvodit, že každá spojitá funkce na obdélníku je integrovatelná. Pokud má funkce konečně či spočetně mnoho bodů nespojitosti je rovněž integrovatelná. Nyní se zaměříme na zjištění „jak velká“ může být množina bodů nespojitosti, aby funkce byla integrovatelná.

Množina $A \subset \mathbb{R}^n$ má (Lebesguovu) *míru nula* jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje spočetný systém $(Q_i)_i$ obdélníků v $\mathbb{R}^n$ takový, že $\bigcup_i Q_i \supset A$ a $\sum_i \operatorname{vol} Q_i < \varepsilon$.

Konečná i spočetná množina má míru nula.

Úsečka v $\mathbb{R}^2$ má míru nula.

Obdélník v $\mathbb{R}^n$ s neprázdným vnitřkem nemá míru nula. Hranice obdélníku má míru nula.

Příklad. Kantorova množina $C \subset \mathbb{R}$ má míru nula. Skutečně, Kantorovu množinu lze psát ve tvaru $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} Q_n$, kde Q_n je sjednocení 2^n intervalů délky 3^{-n}. Objem $\operatorname{vol} Q_n = (2/3)^n$, pro vhodné n může tento výraz být menší než libovolné předem dané ε.

Pro ohraničenou funkci $f : Q \to \mathbb{R}$ a bod z jejího definičního bodu x definujeme *oscilaci funkce f v bodě x*

$$\Omega_f(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{x \in B_\varepsilon(x)} f(x) - \inf_{x \in B_\varepsilon(x)} f(x).$$

Pro $A \subset Q$ definujeme *oscilaci funkce f na množině A* jako

$$\Omega_f(A) = \sup_{x \in A} f(x) - \inf_{x \in A} f(x).$$

Je-li P dělení obdélníku Q, potom

$$S(f, P) - s(f, P) = \sum_{A \in \operatorname{Rect} P} \Omega_f(A) \operatorname{vol} A.$$

Lemma 6.7. *Funkce f je spojitá v bodě x, právě když je $\Omega_f(x) = 0$.*

Důkaz.

□

Příklady. Funkce $\sin x$ má v každém bodě x oscilaci $\Omega_{\sin}(x) = 0$, jako každá spojitá funkce. Oscilace na intervalu $[0, \pi]$ je $\Omega_{\sin}([0, \pi]) = 1$ a $\Omega_{\sin}([0, 2\pi]) = 2$.

Funkce signum má v bodě 0 oscilaci $\Omega_{\mathrm{sgn}}(0) = 2$. Na každém intervalu obsahujícím nulu, tedy například $[-1, 1]$ má $\Omega_{\mathrm{sgn}}([-1, 1]) = 2$, na druhou stranu $\Omega_{\mathrm{sgn}}([0, 1]) = 1$ a $\Omega_{\mathrm{sgn}}([1, 2]) = 0$.

Lemma 6.8. *Nechť $f : Q \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je ohraničená. Potom pro každé $\varepsilon > 0$ je*

$$A_\varepsilon = \{x \in Q \mid \Omega_f(x) < \varepsilon\}$$

je otevřená množina.

Věta 6.9 (Lebesguova). *Nechť $f\colon Q \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je ohraničená funkce. Označme $N \subset Q$ množinu bodů nespojitosti f. Funkce f je integrovatelná na Q, právě když N má míru nula.*

Důkaz.

□

6.2. Integrál na množině v $\mathbb{R}^n$. Nechť $f\colon Q \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je omezená a $A \subset Q$ definujeme *integrál funkce f na množině A* jako

$$\int_A f = \int \chi_A \cdot f. \tag{6.2.1}$$

Je jasné, že definice $\int_A f$ nezávisí na volbě Q, pokud je $A \subset Q$

Následující věta nám dává nástroj pro počítání integrálu na obdélníku převodem na jednorozměrné integrály.

Věta 6.10 (Fubiniho). *Nechť A je obdélník v $\mathbb{R}^k$, B je obdélník v $\mathbb{R}^l$ a $f\colon A \times B \subset \mathbb{R}^{k+l} \to \mathbb{R}$ je omezená integrovatelná funkce. Předpokládejme, že pro každé t je $f|_{x=t}$ integrovatelná na B a pro každé $t \in A$ položme $u(t) = \int_B f|_{x=t}$. Potom u je integrovatelná na A a platí*

$$\int_{A\times B} f = \int_A u. \tag{6.2.2}$$

Rovnici (6.2.2) lze přepsat jako

$$\int_{A\times B} f = \int_A \left(\int_B f\right). \tag{6.2.3}$$

Důkaz.

□

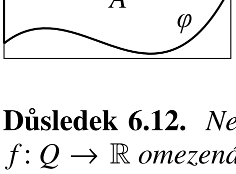
Označení. Pro integrál funkce f na obdélníku $Q = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ budeme v souladu s klasikou používat taktéž označení

$$\int_Q f = \int_Q f(x)\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\ldots\mathrm{d}x_n = \int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2}\cdots\int_{a_n}^{b_n} f(x)\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\ldots\mathrm{d}x_n.$$

Důsledek 6.11 (Fubiniho věta pro $\mathbb{R}^2$).

$$\int_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x.$$

Důsledek věty 6.10 a definice integrálu na množině je následující tvrzení.



Q

Množina $A \subset [a,b] \times [c,d]$ je ve tvaru

$$A = \{(x,y) \mid x \in [a,b], \varphi(x) \le y \le \psi(x)\},$$

kde φ, ψ jsou spojité funkce na intervalu $[a,b]$, $c \le \varphi \le \psi \le \psi$

Důsledek 6.12. *Nechť $A \subset [a,b] \times [c,d] \subset \mathbb{R}^2$ je množina popsaná v předchozím odstavci, $f\colon Q \to \mathbb{R}$ omezená integrovatelná, potom*

$$\int_A f = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \tag{6.2.4}$$

Řekneme, že ohraničená množina $A \subset \mathbb{R}^n$ je *Jordanovsky měřitelná* jestliže konstantní funkce $f = 1$ je na A integrovatelná ($\int_A 1$ existuje). Neboli $\int_Q \chi_A$ existuje pro $A \subset Q$, Q obdélník.

Pro obdélníky = vol Q.

Množina má Lebesguovu míru nula, právě když je Jordanova míra této množiny nula.

Tyto poznámky nás opravňují Jordanovskou míru množiny A označit stejným symbolem jako objem v případě obdélníků, tedy vol A.

Lemma 6.13. *Ohraničená množina $A \subset \mathbb{R}^n$ je Jordanovsky měřitelná, právě když* fr A *má míru nula.*

Důkaz. Plyne z faktu, že množina bodů nespojitosti χ_A je právě fr A a samozřejmě věty 6.9. □

Lemma 6.14. *Jsou-li A, B Jordanovsky měřitelné množiny, potom jsou Jordanovsky měřitelné i množiny $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$.*

Věta 6.15. *Nechť $A, B \subset \mathbb{R}^n$ jsou ohraničené Jordanovsky měřitelné množiny a f je integrovatelná na A i B. Potom*

$$\int_{A\cup B} f = \int_A f + \int_B f - \int_{A\cap B} f.$$

Důkaz. Nechť Q_A (respektive Q_B) je obdélník obsahující A (respektive B). Bez újmy na obecnosti, můžeme předpokládat, že $Q_A \cup Q_B$ je obdélník. Z definice integrálu na množině je $\int_A f = \int_{Q_A} f$ (stejně tak $\int_B f = \int_{Q_B}$).

...

□

Lemma 6.16. *Nechť $A \subset \mathbb{R}^n$ je ohraničená Jordanovsky měřitelná množina, potom pro každé $\varepsilon > 0$ existují množiny M_ε, N_ε takové, že:*
1) M_ε, M_ε jsou sjednocením obdélníků;
2) $M_\varepsilon \subset A \subset N_\varepsilon$;
3) $\mathrm{vol}\, N_\varepsilon - \mathrm{vol}\, M_\varepsilon < \varepsilon$.

Důkaz. jelikož je $A \subset Q$ Jordanovsky měřitelná, je χ_A integrovatelná na Q a tedy existuje dělení P obdélníku Q, že $M(\chi_A, P) - m(\chi_A, P) < \varepsilon$. Množina M_ε je pak sjednocení těch obdélníků z Rect P, které jsou podmnožinou A, a proto $\mathrm{vol}\, M_\varepsilon = m(\chi_A, P)$. Obdobně N_ε je sjednocení těch obdélníků z Rect P, které mají neprázdný průnik s A, a tedy $\mathrm{vol}\, N_\varepsilon = M(\chi_A, P)$. □

Následnující věta je hlavním výsledkem

Věta 6.17 (o substitutci). *Nechť G, H jsou otevřené množiny v $\mathbb{R}^n$, $g\colon G \to H$ bijektivní spojitě diferencovatelné zobrazení. Potom pro každou integrovatelnou funkci $f\colon H \to R$ platí*

$$\int_{g(A)} f = \int_A f \circ g \cdot |\det g'|. \tag{6.2.5}$$

Příklad Vypočítejte integrál

$$\int_A x^2 + y^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kde A je mezikruží se středem v $(0, 0)$, poloměry $R_1 = 1$ a $R_2 = 2$.

Použijeme větu o substituci, množina A je obrazem obdélníka $[1, 2] \times [0, 2\pi]$ při zobrazení $g(r, \varphi) = (r \cos\varphi, r \sin\varphi)$. Věta 6.17 je formulována pro otevřené množiny G, H ...

7. Integrování diferenciálních forem

7.1. Formy na $\mathbb{R}^n$. V této kapitole si zopakujeme některé pojmy týkající se forem na vektorovém prostoru. Předpokládejme, že V je vektorový prostor nad polem reálných čísel. Symbolem $L(V)$ budeme označovat jeho *duální prostor*, tedy prostor všech *forem*, nebo-li všech lineárních zobrazení $l: V \to \mathbb{R}$.

Algebraická struktura na $L(V)$, sčítání a násobení skalárem.
Příklad. Uvažujme vektorový prostor $\mathbb{R}$ nad $\mathbb{R}$. Pak $L(V)$ tvoří všechna lineární zobrazení $l: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Jsou-li $l_1, l_2 \in L(\mathbb{R})$, pak $l_1 + l_2$ je definováno, jako zobrazení $l_1 + l_2: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující

$$(l_1 + l_2)(x) = l_1(x) + l_2(x). \qquad \text{(sčítání bod po bodu)}$$

Speciálně je-li $l_1(x) = ax$ a $l_2(x) = bx$ (pro nějaká $a, b \in \mathbb{R}$), potom $l_1 + l_2$ je lineární zobrazení dané předpisem $(l_1 + l_2)(x) = (a + b)x$.

Obdobně s násobením skalárem $c \in \mathbb{R}$.

Pro $p \in \mathbb{N}$ definujeme *p-formu*, jako p-lineární zobrazení z V do $\mathbb{R}$. Prostor těchto p-forem značíme $L^p(V)$. A zavádíme na něm algebraické operace (bod po bodu), jako v případě $L(V)$. Nad

Pro $p = 2$ pojem 2-formy splývá s pojmem bilineárního zobrazení, viz 4.1.

I o p-formách jsme již mluvili, to bylo v kapitole 4.3.

Operace, kterou z jednodušších forem dostáváme složitější, se nazývá *tenzorový součin* a definujeme ji následovně. Nechť $u \in L^p(V)$, $v \in L^q(V)$ jsou formy, potom $p + q$-forma, kterou značíme $u \otimes v \in L^{p+q}(V)$, je tenzorovým součinem u a v jestliže

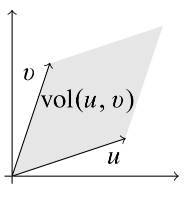
$$(u \otimes v)(x_1, \ldots, x_{p+q}) = u(x_1, \ldots, x_p) \cdot v(x_{p+1}, \ldots, x_{p+q}). \tag{7.1.1}$$

Příklad. Uvažujme $\mathbb{R}^2$ a na něm formy $\mathrm{pr}_X : (x, y) \mapsto x$ a $\mathrm{pr}_Y : (x, y) \mapsto y$. Potom je $\mathrm{pr}_X \otimes \mathrm{pr}_Y$ bilineární zobrazení, které $\mathrm{pr}_X \otimes \mathrm{pr}_Y((x, y), (u, v)) = \mathrm{pr}_X(x, y) \cdot \mathrm{pr}_Y(u, v) = xv$.
Záměnou vektorů (x, y) a (u, v) lze snadno ověřit, že zobrazení $\mathrm{pr}_X \otimes \mathrm{pr}_Y$ není symetrické.

Je symetrické zobrazení $\mathrm{pr}_X \otimes \mathrm{pr}_X$?

Věta 7.1 (o bázi v $L^p(\mathbb{R}^n)$). *Uvažujme $L^p(\mathbb{R}^n)$ pro $n, p \in \mathbb{N}$, potom $\{\mathrm{pr}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \mathrm{pr}_{i_p}$, kde $i_p \in \{1, \ldots, n\}\}$, je báze $L^p(\mathbb{R}^n)$ a jeho dimenze je tedy n^p.*

Příklad. 1) Uvažujme $\mathbb{R}^2$, podle předchozí věty je báze $L^1(\mathbb{R}^2)$ množina $\{\mathrm{pr}_X, \mathrm{pr}_Y\}$. Není divu, neboť je-li $l: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ lineární zobrazení, pak jej lze psát ve tvaru $l(x, y) = ax + by$. Proto $l = a \cdot \mathrm{pr}_X + b \cdot \mathrm{pr}_Y$ a uspořádaná dvojice (a, b) jsou složky l v bázi $\{\mathrm{pr}_X, \mathrm{pr}_Y\}$. Tato je asociovaná s bází $\{(1, 0), (0, 1)\}$ v $\mathbb{R}^2$, proto složky (a, b) lze obdržet jako $l(1, 0) = a \cdot 1 + b \cdot 0 = a$, $l(0, 1) = b$.
2) $L^2(\mathbb{R}^2)$



3) Orientovaná plocha rovnoběžníku[0)] v $\mathbb{R}^2$ určeného vektory u, v je 2-forma na $\mathbb{R}^2$. Ověřte! Lze ji vypočítat pomocí determinantu

$$\mathrm{vol}(u, v) = \det \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} = u_1 v_2 - v_1 u_2.$$

Proto $\mathrm{vol}(u, v) = \mathrm{pr}_1 \otimes \mathrm{pr}_2(u, v) - \mathrm{pr}_2 \otimes \mathrm{pr}_1(u, v)$.

[0)] Jak orientovaná? Proč orientovaná?

Antisymetrické p-formy tvoří vektorový podprostor (značíme jej $\Lambda^p(V)$) prostoru $L^p(V)$.

Ověřte, že se skutečně jedná o podprostor.

Pro $u \in \Lambda^p(V)$, $v \in \Lambda^q(V)$ definujeme *vnější součin u a v* jako $p+q$-formu

$$u \wedge v = \frac{(p+q)!}{p!q!} \operatorname{alt}(u \otimes v). \tag{7.1.2}$$

Zopakujme, že $\operatorname{alt} u$ je definováno v (4.3.1).

Příklad. Na $\Lambda^1(\mathbb{R}^2)$ uvažujme $\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2$.

$$\mathrm{pr}_1 \wedge \mathrm{pr}_2 = \frac{2!}{1!1!} \operatorname{alt}(\mathrm{pr}_1 \otimes \mathrm{pr}_2) = \frac{2}{1}\frac{1}{2}(\mathrm{pr}_1 \otimes \mathrm{pr}_2 - \mathrm{pr}_2 \otimes \mathrm{pr}_1)$$

tedy

$$\mathrm{pr}_1 \wedge \mathrm{pr}_2(u, v) = \mathrm{pr}_1 \otimes \mathrm{pr}_2(u, v) - \mathrm{pr}_2 \otimes \mathrm{pr}_1(u, v) = u_1 v_2 - u_2 v_1.$$

To znamená $\mathrm{pr}_1 \wedge \mathrm{pr}_2 = \det_{\mathbb{R}^2}$.

Obdobně lze odvodit na $\mathbb{R}^n$ je $\mathrm{pr}_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{pr}_n = \det_{\mathbb{R}^n}$.

Věta 7.2 (o bázi v $\Lambda^p(\mathbb{R}^n)$). *Nechť $k \in \mathbb{N}$, $k \le n$, potom* $\{\mathrm{pr}_{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{pr}_{i_k} \mid i_1 < \cdots < i_k\}$ *je báze $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$, to znamená* $\dim \Lambda^k(\mathbb{R}^n) = \binom{n}{k}$.

Pro $k > n$, je $\dim \Lambda^k(\mathbb{R}^n) = 0$, $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ obsahuje pouze nulovou formu. Na druhou stranu $L^p(\mathbb{R}^n)$ má dimenzi n^p.

Věta 7.3 (vlastnosti $\wedge$). *Nechť $u, u_1, u_2 \in \Lambda^p(V)$, $v \in \Lambda^q(V)$ a $w \in \Lambda^s(V)$, potom*
1. $(u_1 + u_2) \wedge v = u_1 \wedge v + u_2 \wedge v$.
2. $u \wedge v = (-1)^{pq} v \wedge u$.
3. $(u \wedge v) \wedge w = u \wedge (v \wedge w)$.

Pokud máme $\mathrm{pr}_k \wedge \mathrm{pr}_k \wedge w$ je tato forma nulová neboť záměnou prvních dvou forem dostáváme tentýž výraz ale ten musí mít podle předchozí věty opačné znaménko.

Jsou-li tedy ve výrazu $\mathrm{pr}_{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{pr}_{i_k}$ dva indexy stejné, je tato forma nulová.

7.2. Diferenciální formy. Množina $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená a $p \in \mathbb{N}$, *diferenciální formou řádu p* (p-formou) na G rozumíme hladké zobrazení

$$\omega \colon G \to \Lambda^p(\mathbb{R}^n).$$

Jedná se tedy o pole p-forem na G. V každému bodu $x \in G$ je přiřazena $\omega(x)$ antisymetrická p-forma, navíc toto přiřazení je hladké.

V prostoru $\Lambda^p(\mathbb{R}^n)$ máme bázi $\{\mathrm{pr}_{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{pr}_{i_k} \mid 1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n\}$, v každém bodě má $\omega(x)$ složky v této bázi. Zadat p-formu tedy stačí pomocí funkcí daných těmito složkami. Tedy

$$\omega = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} f_{i_1,\cdots,i_k} \mathrm{pr}_{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{pr}_{i_k}. \tag{7.2.1}$$

K ověření hladkosti stačí ověřit hladkost těchto souřadnicových funkcí.

Tradičně se prvky báze pr_i značí symbolem $\mathrm{d}x_i$. Proto

$$\omega = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} f_{i_1,\cdots,i_k} \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_{i_k}. \tag{7.2.2}$$

Příklad. 1. Každá hladká funkce na G je 0-forma.
2. Jsou-li f a g hladké funkce na $\mathbb{R}^2$, potom $\omega = f\mathrm{d}x + g\mathrm{d}y$ je hladká 1-forma na $\mathbb{R}^2$. Konkrétněji, například $\omega(x) = xy\mathrm{d}x - x^2y\mathrm{d}y$ je 1-formou na $\mathbb{R}^2$. (Víme, že $f(x, y) = xy$ a $g(x, y) = x^2y$ jsou hladké funkce.)

Množinu p-forem na G značíme $\Omega^p(G)$. Na této množině zavádíme operace $+$, skalární násobení hladkou funkcí a $\wedge$ bod po bodu.

$$(\omega + \eta)(x) = \omega(x) + \eta(x),$$
$$(f\omega)(x) = f(x)\omega(x),$$
$$(\omega \wedge \eta)(x) = \omega(x) \wedge \eta(x).$$

Mějme na $G \subset \mathbb{R}^n$ danou 0-formu, tedy hladkou funkci f. Definujeme *vnější derivaci* f, jako 1-formu, která je v každém bodě rovna derivaci f. Proto si dovolíme ji označit stejným symbolem, tedy $\mathrm{d}f$. Pomocí složek v bázi $\Lambda^1(\mathbb{R}^n)$ má $\mathrm{d}f$ následující vyjádření

$$\mathrm{d}f(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}\mathrm{d}x_k. \tag{7.2.3}$$

Pro obecnou p-formu ω, která má vyjádření (7.2.2), je *vnější derivací* ω $k+1$-forma $\mathrm{d}\omega$, pro kterou

$$\mathrm{d}\omega(x) = \sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n} \mathrm{d}f_{i_1,\cdots,i_k} \wedge \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_{i_k} \tag{7.2.4}$$

což s využitím (7.2.3) dává

$$\mathrm{d}\omega(x) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n} \frac{\partial f_{i_1,\cdots,i_k}}{\partial x^k}\mathrm{d}x_k \wedge \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_{i_k}. \tag{7.2.5}$$

Příklad. 1. Hladká funkce $f(x, y) = xy^2$ na $\mathbb{R}^2$. Vnější derivace této 0-formy je dle (7.2.3):

$$\mathrm{d}f(x, y) = y^2\mathrm{d}x + 2xy\mathrm{d}y.$$

2. Mějme 1-formu $\omega(x, y) = xy\mathrm{d}x - x^2y\mathrm{d}y$, její vnější derivací bude 2-forma $\mathrm{d}\omega$. Podle (7.2.5) máme

$$\mathrm{d}\omega(x, y) = y\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}x + x\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x - (2xy\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + x^2\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}y).$$

Podle poznámky za větou 7.3 je $\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}x = 0$ a $\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}y = 0$. Pokračujeme

$$\mathrm{d}\omega(x, y) = x\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x - 2xy\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = -(x + 2xy)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y.$$

3. 2-forma

Věta 7.4 (vlastnosti d**).** *Nechť* $\omega_1 \in \Omega^p(G)$ *a* $\omega_2 \in \Omega^q(G)$*, potom*
1.$\mathrm{d}(\omega_1 + \omega_2) = \mathrm{d}\omega_1 + \mathrm{d}\omega_2$*;*
2.$\mathrm{d}(\omega_1 \wedge \omega_2) = \mathrm{d}\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^p\omega_1 \wedge \mathrm{d}\omega_2$
3.$\mathrm{d}(\mathrm{d}\omega_1) = 0.$

7.3. Integrál z diferenciální formy na krychli. Označme symbolem $I^n \subset \mathbb{R}^n$ (n-násob-ný) kartézský součin intervalu $[0,1]$ a říkejme mu *jednotková krychle v* $\mathbb{R}^n$. Nechť $\omega = f(x_1,\dots,x_n)\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n$ je diferenciální n-forma na otevřené množině G obsahující krychli I^n, definujeme *integrál z diferenciální formy ω na I^n* jako

$$\int_{I^n}\omega = \int_0^1\cdots\int_0^1 f(x_1,\dots,x_n)\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n.$$

Diferencovatelné zobrazení $c\colon I^m \to \mathbb{R}^n$ (taktéž obraz $\operatorname{Im} c = c(I^m)$) nazýváme *($m$-rozměrná) krychle v* $\mathbb{R}^n$.

Je-li $\varphi\colon G\subset\mathbb{R}^m \to H\subset\mathbb{R}^n$ diferencovatelné zobrazení mezi otevřenými množinami, definujeme *pull back diferenciální formy $\omega\in\Omega(H)$ při zobrazení φ* jako $\varphi^*\omega\in\Omega(G)$ pro kterou

$$(\varphi^*\omega)(x) = \omega(f(x))\circ \mathrm{d}\varphi(x).$$

Příklad. 1. Pro zobrazení $f\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$, $f=(f_1,\dots,f_m)$ a diferenciální formu $\omega = \mathrm{d}y_i$ platí

$$f^*\omega = f^*\mathrm{d}y_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j}\mathrm{d}x_j,$$

kde $(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ a $(y_1,\dots,y_m)\in\mathbb{R}^m$. Je-li $f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ definováno předpisem $(x(u,v),y(u,v),z(u,v)) = (\cos u\cos v,\cos u\sin v,\sin u)$, potom je

$$f^*\mathrm{d}y = \frac{\partial}{\partial u}(\cos u\sin v)\mathrm{d}u + \frac{\partial}{\partial v}(\cos u\sin v)\mathrm{d}v = -\sin u\sin v\mathrm{d}u + \cos u\cos v\mathrm{d}v.$$

2. Uvažujme zobrazení $\varphi\colon\mathbb{R}\to(\cos t,\sin t)$ a diferenciální formu $\omega\in\Omega^1(\mathbb{R}^2)$ zadanou

$$\omega(x,y) = x\mathrm{d}x - y\mathrm{d}y.$$

Platí $\varphi'(t) = (-\sin t,\cos t)$, tedy $\varphi^*\mathrm{d}x = -\sin t\mathrm{d}t$ a $\varphi^*\mathrm{d}y = \cos t\mathrm{d}t$. Proto

$$\varphi^*\omega(t) = \cos t(-\sin t)\mathrm{d}t - \sin t\cos t\mathrm{d}t = -2\sin 2t\mathrm{d}t.$$

Definujeme *integrál z diferenciální k-formy přes m-rozměrnou krychli c* jako integrál z pull backu ω při zobrazení c. Tedy

$$\int_c\omega = \int_{I^m} c^*\omega$$

Příklad. Vypočteme integrál

$$\int_S z\mathrm{d}x\mathrm{d}y + x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x,$$

kde S je severní polovina ($z\ge 0$) jednotkové sféry.

...

Uzavřená forma!!!

Exaktní forma!!!

7.4. Stokesova věta. *Diferencovatelný řetězec* je lineární kombinace reálných čísel $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ a krychlí $c_1, \dots, c_p$. Tedy $c = \lambda_1 c_1 + \dots + c_p \lambda_p$. Jako lineární kombinaci definujeme integrál přes diferencovatelný řetězec

$$\int_c \omega = \lambda_1 \int_{c_1} \omega + \dots + \lambda_p \int_{c_p} \omega.$$

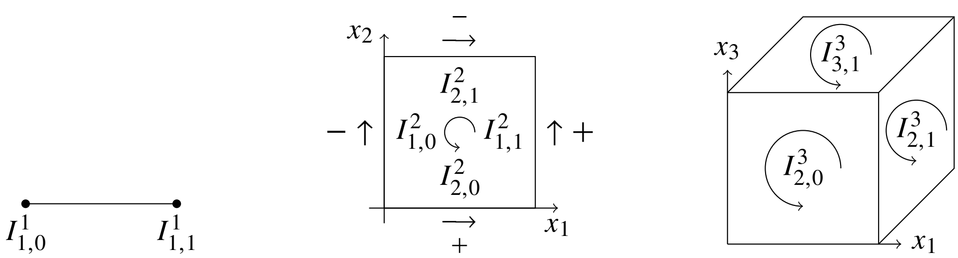
Pro jednotkovou krychli I^k definujeme její *stěny* jako $k - 1$ rozměrné krychle, pro každou volbu $i \in \{1, \dots, k\}$ a $\alpha \in \{0, 1\}$ danou

$$I^k_{i,\alpha}\colon [0,1]^{k-1} \to \mathbb{R}^k, (x_1, \dots, x_{k-1}) \mapsto (x_1, \dots, x_{i-1}, \alpha, x_{i+1} \dots, x_{k-1})$$

Je-li zobrazení $c(I^k)$ krychle, potom její stěna $c_{i,j}$ je $c(I^k_{i,\alpha})$.

Nechť c je k-rozměrná krychle definujeme její (orientovanou) *hranici* ∂c, jako diferencovatelný řetězec krychlí

$$\partial c = \sum_{i=1}^k \sum \alpha = 0, 1(-1)^{\alpha+i} c_{i,j} \tag{7.4.1}$$



Příklad. 1. Interval $[0,1]$ je jednotkovou krychlí I^1. Body $I^1_{1,0} = \{0\}$ a $I^1_{1,1} = \{1\}$ jsou její stěny.

2. Čtverec $I^2 = [0,1]^2$ má následující stěny $I^2_{1,0} = \{0\} \times [0,1]$, $I^2_{1,1} = \{1\} \times [0,1]$, $I^2_{2,0} = [0,1] \times \{0\}$, $I^2_{2,1} = [0,1] \times \{1\}$.

$$\partial I^2 = -I^2_{1,0} + I^2_{1,1} + I^2_{2,0} - I^2_{2,1}.$$

3. Krychle I^3.

$$\partial I^3 = -I^3_{1,0} + I^3_{1,1} + I^3_{2,0} - I^3_{2,1} - I^3_{3,0} + I^3_{3,1}.$$

Řekneme, že diferencovatelný řetězec je *uzavřený,* pokud její hranice je nulový řetězec (nulová krychle).

Snadno ověříte, že kružnice je příkladem jednorozměrného řetězce (jednorozměrné krychle), který je uzavřený.

Taktéž lze odvodit, že pro libovolný řetězec c je $\partial(\partial c)) = 0$, tedy $\partial^2 = 0$. Podobnost operátoru ∂ na řetězcích s vnější derivací d diferenciálních forem není náhodná, jak uvidíme později.

Řekneme, že diferencovatelný řetězec c je *exaktní,* pokud je hranicí nějakého řetězce. Tedy pokud existuje h takové, že $\partial d = c$.

Lemma 7.5. *Nechť $c \subset G$ je k-rozměrná krychle a ω je k-forma na otevřené množině G. Potom*

$$\int_{\partial c} \omega = \int_{\partial [0,1]^k} c^* \omega \tag{7.4.2}$$

Nyní se dostáváme k důležitému výsledku diferenciální geometrie, který dává do souvislosti integrování forem na řetězcích a na jejich hranicích.

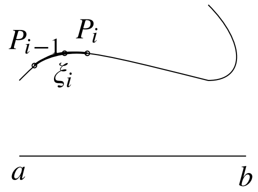
Věta 7.6 (Stokesova). *Nechť ω je $k-1$ forma na otevřené množině G v $\mathbb{R}^n$ a c je k-rozměrný řetězec v G. Potom*

$$\int_{\partial c} \omega = \int_c \mathrm{d}\omega. \tag{7.4.3}$$

7.5. Integrování diferenciálních forem. V tomto odstavci se podíváme integrování diferenciálních forem v $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$. Postupujeme od jednodušších případů ke složitějším a ilustrujeme na nich obecné principy z předchozích odstavců.

Křivkový integrál v $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$. *Křivka C* v $\mathbb{R}^2$ (případně v $\mathbb{R}^3$) je spojitý obraz uzavřeného intervalu $[a, b]$, tedy existuje spojité zobrazení $\Gamma\colon [a, b] \to \mathbb{R}^2$ (případně v $\mathbb{R}^3$) — *parametrizace* křivky $C = \Gamma([a, b])$. Křivka je *jednoduchá,* jestliže existuje její bijektivní parametrizace. Křivka C je uzavřená, jestliže pro její parametrizaci platí $\Gamma(a) = \Gamma(b)$ a Γ je na (a, b) injektivní. Křivka je *(po částech) hladká,* jestliže je (po částech) hladká její parametrizace.

Pokud chceme definovat nějakou veličinu křivky C odvozenou od hodnot f v jejich bodech integrací (například hmotnost křivky integrováním délkové hustoty). Pak na křivce a tím pádem i na definičním oboru uvažujeme dělení pomocí integrálního součtu



$$s(P, f) = \sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\|P_i - P_{i-1}\|_2,$$

kde P_i jsou body dělení C a ξ_i leží na části křivky mezi P_{i-1} a P_i.

Limitním přechodem získáváme *křivkový integrál 1. druhu*

$$\int_C f(x, y)\mathrm{d}C, \tag{7.5.1}$$

kde dC je diferenciální 1-forma, které říkáme *element délky* křivky C, a platí

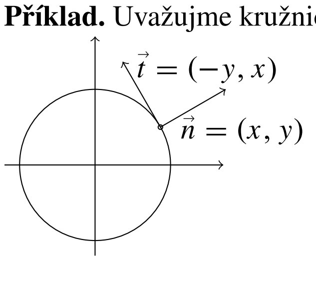
$$\mathrm{d}C = c_1\mathrm{d}x + c_2\mathrm{d}y. \tag{7.5.2}$$

V předchozím vzorci je (c_1, c_2) tečný jednotkový vektor ke křivce C v souhlasném směru s orientací C. Obdobně, je-li C v $\mathbb{R}^3$, potom její element délky bude

$$\mathrm{d}C = c_1\mathrm{d}x + c_2\mathrm{d}y + c_3\mathrm{d}z \tag{7.5.3}$$

Délka křivky C je rovna integrálu elementu délky přes C: $\int_C \mathrm{d}C$.

Příklad. Uvažujme kružnici C středem v počátku a poloměrem jedna orientovanou ve směru hodinových ručiček. Nechť (x, y) je prvkem C pak vektor $\vec{n} = (x, y)$ je normálovým vektorem k C. Je jednotkový, neboť $x^2 + y^2 = 1$. Potom $\vec{t} = (-y, x)$ je tečný jednotkový vektor, navíc je souhlasně orientován.



Délkový element dC jednotkové kružnice je tedy

$$\mathrm{d}C = -y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y.$$

Pokud tedy chceme spočítat délku jednotkové kružnice integrujeme objemový element:

$$L = \int_C -y\mathrm{d}C = \int_C -y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y.$$

Zvolíme parametrizaci $\Gamma\colon [0, 2\pi] \to C$, $\varphi(t) = (\cos t, \sin t)$, máme

$$\int_C -y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y = \int_{[0,2\pi]} \varphi^*(-y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y) = \int_0^{2\pi} -\sin t\mathrm{d}(\cos t) + \cos t\mathrm{d}(\sin t)\mathrm{d}t =$$
$$= \int_0^{2\pi} \sin^2 t + \cos^2 t\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}t = 2\pi.$$

Věta 7.7 (Greenova). *Nechť $C \subset G$ je po částech hladká, kladně orientovaná, uzavřená křivka, ležící v otevřené množině G. Dále D je jednoduše souvislá oblast ohraničená C, funkce $P, Q\colon G \to \mathbb{R}$ mají spojité parciální derivace. Potom*

$$\int_C P(x, y)\mathrm{d}x + Q(x, y)\mathrm{d}y = \int_D \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

D ů k a z. Důsledek věty 7.6. □

Důsledek 7.8.

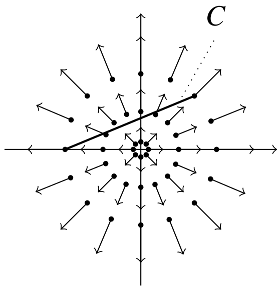
$$\operatorname{vol} D = \frac{1}{2}\int_C x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x$$

Důsledek 7.9 (nezávislost integrálu na integrační cestě). *Nechť $P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ je diferenciálem nějaké funkce $F\colon G \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $A, B \in G$, potom integrál*

$$\int_C P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = F(B) - F(A)$$

je stejný pro každou křivku C v oteřené oblasti G s počátkem v A a koncem v B.

Uvažujme vektorové pole na nějaké otevřené množině G v $\mathbb{R}^2$ (případně $\mathbb{R}^3$) tedy zobrazení $f\colon G \to \mathbb{R}^2$. Toto pole může reprezentovat magnetické, gravitační či jiné pole síly. V množině G leží křivka C s orientací z bodu A do bodu B. Integrál ze skalárního součinu přes křivku C



$f(x, y) = (x, y)$

$$\int_C f(\vec{x, y}) \cdot \vec{\tau},$$

kde τ je tečný vektor ke křivce C, nazýváme *křivkový integrál 2. druhu.* Vyjadřuje nám kolik práce je třeba vynaložit, či získáme, přesuneme-li se po křivce C.Pokud má f složky (f_1, f_2) a tečný vektor má složky (τ_1, τ_2), pak tento integrál má tvar

$$\int_C f_1(x, y)\tau_1(x, y)\mathrm{d}x + f_2(x, y)\tau_2(x, y)\mathrm{d}y.$$

Toto je ovšem integrál 1-formy, o kterém jsme se již zmínili v odstavci 7.5.

Příklad Uvažujeme vektorové pole $f(x, y) = (x, y)$ na $\mathbb{R}^2$ a úsečku C z bodu $A = (-1, 0)$ do bodu $B = (3, 3)$. Vypočítejme

$$\int_C f(x, y) \cdot \mathrm{d}\tau.$$

Nejprve $B - A = (4, 3)$, velikost $\|B - A\| = 5$. Jednotkový tečný vektor v každém bodě C je tedy $\frac{1}{5}(4, 3)$.

$$\int_C f(x, y) \cdot \mathrm{d}\tau = \int_C \frac{4}{5} x \mathrm{d}x + \frac{3}{5} y \mathrm{d}y$$

Dopočítáme ....

Plošný integrál v $\mathbb{R}^3$

Plošný element

Věta 7.10 (Gauss-Ostrogradski). *Nechť S je uzavřená plocha ohraničující krychli D orientovaná normálou ven, nechť f je hladké vektorové pole na $\mathbb{R}^3$. Potom*

$$\int_S f_1(x, y, z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + f_2(x, y, z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + f_3(x, y, z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$
$$= \int_D \frac{\partial f_1(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial f_2(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial f_3(x, y, z)}{\partial z} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

D ů k a z. Plyne z věty 7.6. □

Interpretace předchozí věty je následující: Tok vektorového pole f přes uzavřenou plochu S (směrem ven) je roven množství vznikajícího vektorového pole (divergence f) uvnitř krychle ohraničené S. Zapisujeme

$$\int_S \vec{f} \cdot \mathrm{d}S = \int_D \operatorname{div} f,$$

kde symbolem dS označujeme pole normálového vektoru.

Speciální Stokesova věta.

Věta 7.11. *Nechť C je křivka ohraničující plochu $S \subset G$, G otevřená v $\mathbb{R}^3$, nechť f je hladké vektorové pole na G. Potom*

$$\int_S \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}\right) \mathrm{d}y\mathrm{d}z + \left(\frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}\right) \mathrm{d}z\mathrm{d}x + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_C f_1\mathrm{d}x + f_2\mathrm{d}y + f_3\mathrm{d}z$$

D ů k a z. Plyne z věty 7.6. □

$$\int_S \operatorname{rot} f \mathrm{d}S = \int_C \vec{f} \mathrm{d}\tau.$$

Příklady.

Příklady.

A zase

Příklady.

8. Obyčejné diferenciální rovnice

8.1. Obecné. *Diferencíální rovnice* jsou rovnice, kde neznámou je funkce y a vyskytuje se v ní derivace neznámé funkce. Tedy například

$$F(y'(x), y(x), x) = 0. \tag{8.1.1}$$

Příklad. Do nádoby, ve ve které je roztok o koncentraci K, přitéká čistá voda rychlostí v, stejnou rychlostí odtéká i roztok (v nábobě se roztok dokonale ředí přitékající vodou).

.

.

Pod pojmem *řešení diferenciální rovnice (8.1.1) na intervalu I* (může být i neohraničený) rozumíme libovolnou diferencovatelnou funkci $y\colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, pro kterou je splněna rovnice (8.1.1).

Uvažujeme jednoduchou diferenciální rovnici na $\mathbb{R}$

$$y'(x) = x. \tag{8.1.2}$$

Řešení této rovnice dostanme integrací, tedy hledáme primitivní funkci k identitě. Jak víme na každém intervalu má taková primitivní funkce tvar $y(x) = x^2/2 + c$, kde c je libovolné reálné číslo. Vidíme, že řešení rovnice (8.1.2) není jednoznačné. Toto je pro řešení obyčejné diferenciální rovnice typické, proto se v nich vyskytuje konstanta. Její volbou získáme funkci vyhovující (8.1.1).

Tato situace nám umožňuje předepsat hodnotu neznámé funkce v jednom bodě definičního oboru. Tedy pro x_0 požadujeme, aby hledaná funkce měla hodnotu $y_0 \in \mathbb{R}$. Máme soustavu dvou rovnic

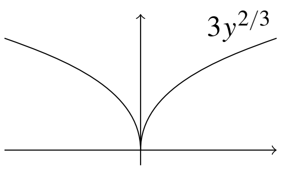
$$F(y'(x), y(x), x) = 0, \tag{8.1.3}$$
$$y(x_0) = y_0. \tag{8.1.4}$$

Takovému problému říkáme *Cauchyho počáteční problém* (případně *Cauchyho okrajová úloha*). Samozřejmě, že pod pojmem řešení Cauchyho úlohy se rozumí diferencovatelná funkce splňující rovnice (8.1.3) a (8.1.4).

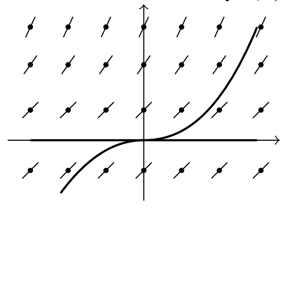
Následující věta odpovídá na základní otázku — řešitelnost diferenciálních rovnic.

Věta 8.1 (Peano). *Nechť $G, H \subset \mathbb{R}$ jsou otevřené množiny. Jestliže $F\colon G \times H \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce. Potom pro každé $x_0 \in G$ a $y_0 \in H$ existuje řešení počáteční úlohy (8.1.3, 8.1.4) na nějakém intervalu v G.*

Jistě hned čtenáře napadne, zda takové řešení existuje jen jedno. Negativní odpověď dává:



Příklad. Uvažujme rovnici $y' = 3y^{2/3}$ na $\mathbb{R}$. Pro počáteční podmínku $y(0) = 0$ dostaneme dvě řešení $y_1(x) = 0$ a $y_2(x) = x^3$. Ověřte!



Důkaz existenční věty je založen na následující myšlence takzvaných Pikardových aproximací. Uvažujme Cauchyho počáteční úlohu (8.1.3, 8.1.4). Řešení této úlohy lze obdržet jako pevný bod jistého operátoru. Přesněji $\bar{y}(x)$ bude řešením Cauchyho problému pokud pro operátor φ je $\varphi(\bar{y}) = \bar{y}$ ($\bar{y}$ je pevným bodem φ), kde φ je definováno

$$\varphi(y) = y_0 + \int_{x_0}^{x} F(y(t), t)\mathrm{d}t. \tag{8.1.5}$$

D ů k a z.

□

Řešení potom hledáme, jako limitu posloupnosti funkcí $y_0, y_1, y_2, \ldots$, kde y_0 je konstantní funkce rovna y_0 (počáteční podmínce) a každá následující je obrazem při operátoru φ.

Příklad.

$$y'(x) = y, \quad y(0) = 1.$$

Zmíněný operátor φ je pro tuto rovnici

$$\varphi(y)(x) = 1 + \int_0^x y(t)\mathrm{d}t$$

Proto $y_0 = 1$,

$$y_1(x) = 1 + \int_0^x 1\mathrm{d}t = 1 + x.$$
$$y_2(x) = 1 + \int_0^x 1 + t\mathrm{d}t = 1 + x + \frac{1}{2}x^2.$$
$$y_3(x) = 1 + \int_0^x 1 + t + \frac{1}{2}t^2\mathrm{d}t = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}t^3.$$

Řešení počáteční úlohy je limita částečných součtů

$$y_n(x) = 1 + \int_0^x 1 + t + \frac{1}{2}t^2\mathrm{d}t = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}t^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n,$$

tedy funkce $y(x) = e^x$, jak bylo jistě jasné od začátku.

Pokud je tedy zajištěna konvergence zmíněné posloupnost, pak je zajištěna existence a jednoznačnost (díky jednoznačnosti limity) řešení počáteční úlohy. Kontraktivnost operátoru a následně konvergenci alespoň na nějakém intervalu obdržíme, pokud je funkce F spojitě diferencovatelné. To nám dává následují základní větu.

Věta 8.2 (Existence a jednoznačnost). *Nechť $G, H \subset \mathbb{R}$ jsou otevřené množiny. Jestliže $F: G \times H \to \mathbb{R}$ je spojitě diferencovatelná funkce. Uvažujeme rovnici (8.1.1), potom existují intervaly $I \subset G$ a $J \subset H$, že pro každé $y_0 \in I$ existuje jedinné řešení $y(x)$ na intervalu J*

Navíc na každém uzavřeném podintevalu I je závislost řešení na počáteční podmínce spojitá.

8.2. Řešení speciálních typů diferenciálních rovnic.

Separace proměnných.

Pokud lze rovnici (8.1.1) psát ve tvaru

$$y'(x) = f(x)g(y(x)), \tag{8.2.1}$$

pak říkáme, že jsou v ní proměnné *separované.* Tuto rovnici bychom mohli přepsat do tvaru

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x)g(y).$$

Formálním vynásobením předchozí rovnice výrazem dx a podělením $f(x)$ dostaneme rovnici, kde nlevá strana závisí pouze na y a prává pouze na x. Pokud nalezneme primitivní funkce k oběma stranám (obě strany zintegrujeme podle „svých“ proměnných), dostanme řešení v implicitním tvaru.

Věta 8.3. *Nechť f, g jsou spojitě diferencovatelné na okolích bodů x_0, $y_0 \in \mathbb{R}$ a $g(y_0) \neq 0$. Dále nechť $y(x)$ je řešením počáteční úlohy (8.1.3, 8.1.4), které nám dává věta 8.2. Potom $y(x)$ je dáno implicitně rovnicí*

$$\int_{y_0}^{y} \frac{1}{g(z)}\mathrm{d}z \int_{x_0}^{x} f(t)\mathrm{d}t.$$

Příklad. Nalezněte řešení rovnice

$$y'(x) = 2xy(x).$$

Rovnici přepíšeme do tvaru se separovanými proměnnými

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2xy,$$
$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = 2x.\mathrm{d}x$$

Nyní nalezneme primitivní funkce na obou stranách.

$$\ln|y| = x^2 + c,$$

kde $c \in \mathbb{R}$ je libovolné. Obdrželi jsme řešení rovnice v implicitním tvaru. Pokud rovnici ještě upravíme, dostáváme řešení v explicitním tvaru

$$y(x) = k\mathrm{e}^{x^2},$$

kde $k \in \mathbb{R}$ je libovolné. Pokud by byla navíc přidána počáteční podmínka $x_0 = 0$, $y_0 = 2$, tedy $y(0) = 2$, dopočítali bychom konstantu k.

$$2 = y(0) = k\mathrm{e}^0 = k.$$

Speciální případy.

Nezávislost na y**.** Pokud rovnice (8.2.1) neobsahuje výraz závislý na $y(x)$, tedy $g(y) = 1$, dostáváme řešení přímo a v explicitním tvaru

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t)\mathrm{d}t.$$

Nezávislost na x**.** Obdobně, pokud (8.2.1) neobsahuje výraz závislý na x, tedy $f(x) = 1$, dostáváme řešení v implicitním tvaru

$$x - x_0 = \int_{y_0}^{y} \frac{1}{g(z)} \mathrm{d}z = G(y(x)) - G(y_0).$$

G je primitivní funkcí k $1/g$.

8.3. Lineární direfenciální rovnice. Diferenciální rovnice je *lineární* pokud je ve tvaru

$$y'(x) + p(x)y(x) = q(x). \tag{8.3.1}$$

Pokud je v (8.3.1) funkce g rovna nule jedná se o *homogenní (lineární) diferenciální rovnici.* Tedy

$$y'(x) + p(x)y(x) = 0. \tag{8.3.2}$$

Velkou výhodou lineární diferenciální rovnice je fakt, že má řešení na celý interval. Přesněji řečeno, každé řešení (8.3.1) lze rozšířit na nějaký interval.

Další užitečnou vlastností je následující:

Věta 8.4. *Nechť $y_H\colon I \to \mathbb{R}$ je řešení (8.3.2) a $y_P\colon I \to \mathbb{R}$ je řešení (8.3.1) na témže intervalu. Potom funkce $y_H + y_P$ je řešení (8.3.1).*

D ů k a z. Máme $y_H' + py_H = 0$ a $y_H' + py_P = q$. Nyní ověříme, že $y_H + y_P$ je řešení (8.3.1). Počítáme levou stranu rovnice

$$(y_H + y_P)' + p \cdot (y_H + y_P) = y_H' + py_H + y_P' + py_P = 0 + q.$$

Tím je věta dokázána. □

Z předchozí věty plyne, že máme-li jediné řešení (8.3.1) a všechna řešení homogenizované rovnice (8.3.2), pak všechna řešení na danném intervalu získáme tak, že ke všem řešením homogenizové rovnice přičteme jedno určité (*paritulární*) řešení (8.3.1).

Věta 8.5 (o prostotu řešení). *Množina řešení (8.3.2) na intervalu I tvoří vektorový prostor. Přesněji, řešení má tvar*

$$y(x) = c \cdot \mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x} p(t)\mathrm{d}t}$$

kde $x_0 \in I$ a $c \in \mathbb{R}$ je libovolné.

D ů k a z. Přímým dosazením. □

Příklad.

Homogenní lineární diferenciální rovnici lze vždy řešit separací proměnných, nalezení partikulárního řešení lze naleznout pomocí takzvané variace konstant.

8.4. Soustavy diferenciálních rovnic. Uvažujeme soustavu n diferenciálních rovnic pro n neznámých funkcí:

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= a_{1,1}(x)y_1(x) + \cdots + a_{1,n}(x)y_n(x) + b_1(x), \\ &\vdots \\ y_n'(x) &= a_{n,1}(x)y_1(x) + \cdots + a_{n,n}(x)y_n(x) + b_n(x). \end{aligned} \tag{8.4.1}$$

Vektorově lze tuto soustavu psát ve tvaru

$$\Big(y(x)\Big)' = A(x)\Big(y(x)\Big) + \Big(b(x)\Big). \tag{8.4.2}$$

Analogicky jako jako v případě jedné rovnice (viz 8.3) lze ukázat, že řešení soustavy (8.4.2) můžeme psát ve tvaru součtu řešení homogenní soustavy a partikulárního řešení. Proto se nejprve budeme věnovat řešení homogenizované soustavy, tedy kdy je vektor funkcí $b(x)$ nulový. Omezíme se na případ, pouze číselné matice A. Tedy

$$\Big(y(x)\Big)' = A\Big(y(x)\Big), \tag{8.4.3}$$

kde $A = (a_{i,j})$ a $a_{i,j} \in \mathbb{R}$. Uvědomme si, že pokud máme pouze jednu rovnici, tedy $y'(x) = a \cdot y(x)$, je jasné, že obecným řešením je $y_H(x) = ke^{ax}$, pro $k \in \mathbb{R}$. Pokud bychom použili tuto analogii na soustavu rovnic, je nutné definovat výraz e^A, pro číselnou matici A. Tento výraz definujeme stejně jako u číselné exponenciální funkce jako nekonečnou řadu

$$\mathrm{e}^A = E + A + \frac{1}{2}A^2 + \cdots + \frac{1}{n!}A^n + \cdots,$$

kde E je jednotková matice příslušného řádu a $A^n = A \cdot \ldots \cdot A$ je n-tá mocnina A. V případě, že A je diagonální matice. lze snadno odvodit, že

$$\mathrm{e}^A = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{a_{1,1}} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{a_{2,2}} & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & \mathrm{e}^{a_{n,n}} \end{pmatrix}$$

Proto se nám nyní hodí tvrzení lineární algebry, že každou matici lze psát ve tvaru $A = P^{-1}JP$, kde P je regulární matice z vlastních vektorů a J je matice v Jordanově tvaru (nejjednodušším případem je ten, kdy je J diagonální).

Definice e^A s faktem, že $A^n = (P^{-1}JP) \cdot (P^{-1}JP) \cdot \ldots \cdot (P^{-1}JP) = P^{-1}J^nP$ dává

$$\mathrm{e}^A = P^{-1}\mathrm{e}^J P.$$

Obecné řešení (8.4.3) je potom

$$y_H(x) = kP^{-1}\mathrm{e}^J P,$$

kde $k \in \mathbb{R}^n$ je libovolné. Tyto úvahy nám dávají následující tvrzení.

Věta 8.6. *Množina řešení systému (8.4.3) na intervalu I tvoří n-rozměrný vektorový prostor.*
D ů k a z. Obdobně jako v případě jedné rovnice. □

Lineárně nezávislé funkce $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, které jsou bází v prostoru řešení (8.4.3) nazveme *fundamentální systém řešení* (8.4.3). Libovolné řešení tohoto systému lze tedy vyjádřit jako lineární kombinaci prvků fundamentálního systému.

Pro systému lineárních diferenciálních rovnic lze taktéž obdržet obdobu věty 8.4, proto dostáváme následující tvrzení.

Věta 8.7. *Každé řešení $y(x)$ systému (8.4.2) lze vyjádřit ve tvaru $y(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i\varphi_i + y_P$, kde $c_i \in \mathbb{R}$ jsou libovolná, $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_i\}$ tvoří fundamentální systém řešení (8.4.3) a $y_P(x)$ je řešení (8.4.2).*

Vraťme se nyní k explicitnímu vyjádření řešení homogenní soustavy.
1. Matice J je diagonální. Tedy existují vlastní čísla $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, potom mají matice J a e^J tvar

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad \mathrm{e}^J = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\lambda_1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{\lambda_2} & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & \mathrm{e}^{\lambda_n} \end{pmatrix}.$$

Řešení homogenního systému je potom ve tvaru $y_H(x) = kP^{-1}\mathrm{e}^{Jx}P$, a jelikož jsou matice P, P^{-1}

vyjádřeny pomocí vlastních vektorů, dostaneme

$$y_H = c_1 u_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t} + \cdots + c_n u_n \mathrm{e}^{\lambda_n t},$$

kde $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ jsou libovolné a $u_i \in \mathbb{R}^n$ je vlastní vektor příslušný λ_i.
Příklad.

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= 5y_1(x) + 2y_2(x) \\ y_2'(x) &= -4y_1(x) - y_2(x). \end{aligned}$$

Matice $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$ má vlastní čísla $\lambda_1 = 1$ a $\lambda_2 = 3$ k min příslušné vlastní vektory jsou $u_1 = (1, -2)^\top$ a $u_2 = (1, -1)^\top$. Ověřte!

Fundamentální systém řešení je potom $\varphi_1(x) = (1, -2)^\top \mathrm{e}^x$ a $\varphi_2(x) = (1, -1)^\top \mathrm{e}^{3x}$. Obecné řešení je potom

$$y(x) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^x + c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{3x}.$$

Nebo-li

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= c_1 \mathrm{e}^x + c_2 \mathrm{e}^{3x} \\ y_2'(x) &= -2c_1 \mathrm{e}^x - c_2 \mathrm{e}^{3x} \end{aligned}$$

2. *Případ, kdy máme vícenásobnou vlastní hodnotu,* si ukážeme na případě, kdy $n = 3$ a máme $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ a od ní různou vlastní hodnotu λ_3. Potom

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

a

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{Jx} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda x & 1 & 0 \\ 0 & \lambda x & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 x \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \lambda^2 x^2 & 2x\lambda & 0 \\ 0 & \lambda^2 x^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2 x^2 \end{pmatrix} + \cdots + \frac{1}{n!} \begin{pmatrix} \lambda^n x^n & n\lambda^{n-1} x^n & 0 \\ 0 & \lambda^n x^n & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^n x^n \end{pmatrix} + \cdots = \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n x^n / n! & \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} x^n / (n-1)! & 0 \\ 0 & \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n x^n / n! & 0 \\ 0 & 0 & \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_3^n x^n / n! \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\lambda x} & x\mathrm{e}^{\lambda x} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{\lambda x} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{\lambda_3 x} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Je-li u vlastní vektor příslušný k λ, u_3 vlastní vektor příslušný λ_3 a v je vektor, který se zobrazí na u (zobecněný vlastní vektor), potom je řešení ve tvaru

$$y(x) = c_1 u \mathrm{e}^{\lambda x} + c_2 (v + ux) \mathrm{e}^{\lambda x} + c_3 u_3 \mathrm{e}^{\lambda_3 x}$$

Příklad.

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= 3y_1(x) + y_2(x) \\ y_2'(x) &= -y_1(x) + y_2 \end{aligned}$$

Matice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ má jediné vlastní číslo $\lambda = 2$, vlastní vektor je $u = (1, -1)^\top$, zobecněný vlastní vektor v, který se zobrazí na u, je řešením $Av = u$. Dostáváme $v = (1/2, -1/2)^\top$. Proto

$$y(x) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{2x} + c_2 \begin{pmatrix} 1/2 + 1x \\ -1/2 - 1x \end{pmatrix} \mathrm{e}^{2x}.$$

3. Případ komplexní vlastní čísla. Pokud bychom se spokojili s řešením v komplexním oboru, pak lze postupovat jako v předchozích případech. Má-li reální matice komplexní vlastní číslo, pak i číslo komplexně sdružené je vlastním číslem a vlastní vektory k těmto číslům jsou také komplexně sdružené. Jsou-li φ a $\overline{\varphi}$ komplexně sdružené prvky fundamentálního systému, pak vhodnou lineární kombinací získáme reálné lineárně nezávislé funkce, které nahradí $\varphi, \overline{\varphi}$. Například můžeme zvlolit $\frac{1}{2}(\varphi + \overline{\varphi})$ a $\frac{1}{2i}(\varphi - \overline{\varphi})$.
Příklad.

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= y_2(x) \\ y_2'(x) &= -y_1(x) \end{aligned}$$

Matice systému je $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Tato matice má vlastní hodnoty $i, -i$. k nim dostáváme vlastní vektory $u_1 = (-i, 1)^\top, u_2 = (i, 1)^\top$.

Fundamentální systém řešení je $\{\varphi_1, \varphi_2\} = \{u_1 e^{ix}, u_2 e^{-ix}\} = \{u_1(\cos x + i \sin x), u_2(\cos x - i \sin x)\}$. V prostoru řešení si zvolíme jinou lineárně nezávislou dvojic tím, že položíme $\psi_1 = \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2)$ a $\psi_2 = \frac{1}{2i}(\varphi_1 - \varphi_2)$. Máme

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \frac{1}{2}(u_1 \cos x + iu_1 \sin x + u_2 \cos x - iu_2 \sin x) = \frac{1}{2}(u_1 + u_2)\cos x + \frac{1}{2}(iu_1 - iu_2)\sin x = \\ &= \frac{1}{2}((-i, 1)^\top + (i, 1)^\top)\cos x + \frac{1}{2}((1, i)^\top - (-1, i)^\top)\sin x = (1, 0)^\top \sin x + (0, 1)^\top \cos x, \end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned} \psi_2 &= \frac{1}{2i}(u_1 \cos x + iu_1 \sin x - u_2 \cos x + iu_2 \sin x) = \frac{1}{2i}(iu_1 + iu_2)\sin x + \frac{1}{2i}(u_1 - u_2)\cos x = \\ &= (0, -1)^\top \sin x + (1, 0)^\top \cos x. \end{aligned}$$

Obecné řešení je potom

$$y(x) = c_1\psi_1 + c_2\psi_2 = c_1(\sin x, \cos x)^\top + c_2(\cos x, -\sin x)^\top.$$

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= c_1 \sin x + c_2 \cos x, \\ y_2'(x) &= c_1 \cos x - c_2 \sin x. \end{aligned}$$

Jak jsme již řekli obecné řešení soustavy (8.4.1) lze vyjádřit ve tvaru součtu obecného řešení systému homogenizované soustavy (8.4.3) a jednoho řešení s nenulovým vektorem $b(x)$. Toto partikulární řešení lze obdržet stejně jako v kapitole 8.3 variací konstant.

Věta 8.8 (variace konstant). *Uvažujme lineární diferenciální rovnici*

$$y'(x) = a(x)y(x) + b(x). \tag{8.4.4}$$

podle věty 8.5 je $y_H(x) = c e^{A(x)x}$ je pro každé $c \in \mathbb{R}$ řešením homogenizované rovnice $y'(x) = a(x)y(x)$ na intervalu $I \subset \mathbb{R}$. Potom existuje řešení y_P rovnice (8.4.4) na I ve tvaru

$$y_P(x) = C(x)e^{A(x)},$$

kde $C(x)$ je primitivní funkcí k $b(x)e^{-A(x)}$.
D ů k a z. Předpokládejme, že $y_P(x) = C(x)e^{A(p)}$, pro nějakou primitivní funkci k $b(x)e^{-A(x)}$. Platí tedy

$$\begin{aligned} y_P'(x) &= C'(x)e^{A(x)} + C(x)e^{A(x)}A'(x) \\ &= C'(x)e^{A(x)} + a(x)C(x)e^{A(x)} && (A \text{ je primitivní k } a\ ) \\ &= b(x)e^{-A(x)}e^{A(x)} + a(x)C(x)e^{A(x)} && (C \text{ je primitivní k } b(x)e^{A}) \\ &= a(x)y_P(x) + b(x). && (\text{definice } y_P) \end{aligned}$$

□

8.5. Lineární diferenciální rovnice vyššího řádu. Direfencíálním rovnicím, které obsahují derivaci vyššího než prvního řádu, se budeme věnovat pouze v případě *lineárních rovnic vyššího řádu* a to jen s konstantíntními koeficienty.

Předpokládejme, že máme rovnici ve tvaru

$$y^{(n)}(x) + a_1 y^{(n-1)}(x) \cdots + a_{n-1} y'(x) + a_n y(x) = b(x) \tag{8.5.1}$$

kde $a_i \in \mathbb{R}$. Substitucí $y_1' = y_2, y_2' = y_3, \dots, y^{(n-1)} = y_n$ je rovnice (8.5.1) ekvivalentní se systémem lineárních diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= y_2(x) \\ &\vdots \\ y_{n-1}'(x) &= y_n(x) \\ y_n'(x) &= -a_1 y_n(x) \cdots - a_{n-1} y_2(x) - a_n y_1(x) - b(x) \end{aligned} \tag{8.5.2}$$

Pokud uvažujeme homogenizovanou soustavu k předchozímu, pak matice systému je

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & -a_2 & -a_1 \end{pmatrix}, \tag{8.5.3}$$

jejíž charakteristický polynom má tvar

$$\chi(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n. \tag{8.5.4}$$

Podle počtu a násobnosti se situace rozpadá na následující případy:

n **různých (jednonásobných) vlastních hodnot** $\lambda_1, \dots, \lambda_n$**.** V tomto případě každé vlastní číslo přispívá do lineární kombinace obecného řešení jedním sčítancem. Celkové je

$$y_H(x) = c_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 x} + \cdots + c_n \mathrm{e}^{\lambda_n x},$$

kde $c_i \in \mathbb{R}$ jesiu libovolné. Vlastní vektory znát nemusíme, protože ze soustavy (8.5.2) nás zajímá pouze y_1 a první složka vlastního vektoru, kterým by se při řešení vynásobila $\mathrm{e}^{\lambda x}$, se „započítá“ do parametru c. Jinak řečeno, je-li u vlastní vektor k λ pak množina funkcí $cu_1\mathrm{e}^{\lambda x}$ je obsažena v $c\mathrm{e}^{\lambda x}$, probíhá-li c celé $\mathbb{R}$.

Některé λ_k **je** p**-násobné.** Potom sčítance v lineární kombinaci od tohoto vlastního čísla, budou kromě $\mathrm{e}^{\lambda_k x}$ obsahovat ještě $x\mathrm{e}^{\lambda_k x}, \dots, x^{p-1}\mathrm{e}^{\lambda_k x}$. Například, pokud λ_1 je p-násobné a ostatní vlastní čísla $\lambda_2, \dots, \lambda_{n-p-1}$ jsou jednonásobná, je

$$y_H(x) = c_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 x} + c_2 x \mathrm{e}^{\lambda_1 x} + \cdots + c_p x^{p-1} \mathrm{e}^{\lambda_1 x} + c_{p+1} \mathrm{e}^{\lambda_2 x} + \cdots + c_n \mathrm{e}^{\lambda_{n-p-1} x}$$

Vlastním číslem je $\lambda = \alpha + \beta i$**.** Potom je vlastním číslem i $\overline{\lambda} = \alpha - \beta i$, polynom (8.5.4) má reálné koeficienty. Funkce $\mathrm{e}^{(\alpha+\beta i)x}$ případně i $x\mathrm{e}^{(\alpha+\beta i)x}$ (v případě že je $\alpha + \beta i$ vícenásobné) by v libovolné lineární kombinaci tvořily část obecného řešení.

Příklad.

$$y'''(x) - 13y''(x) + 12y'(x) = 0.$$

Ačkoliv víme z (8.5.4), jak bude vypadat charakteristický polynom, provedeme detailně celý postup. Substituujeme $y_1 = y$, $y_2 = y_1'$, $y_3 = y_2'$. Dostáváme soustavu

$$
\begin{aligned}
y_1'(x) &= y_2(x)\\
y_2'(x) &= y_3(x)\\
y_3'(x) &= -12y_2(x) + 13y_3,
\end{aligned}
\qquad
A - \lambda E = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & -12 & 13-\lambda \end{pmatrix}.
$$

Potom

$$\det A - \lambda E = -\lambda(-\lambda(13-\lambda) + 12) = -\lambda^3 + 13\lambda^2 - 12\lambda$$

Což odpovídá (8.5.4) (Znaménko zde roli nehraje). Kořeny charakteristického polynomu jsou $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 12$. Jelikož nás zajímá pouze y_1, nemusíme počítat vlastní vektory, které určují „poměry“ mezi jednotlivými y_i. A protože jsou všechna vlastní čísla jednonásobná, budeme od každého z nich mít jeden prvek z nich se sestaví obecné řešení zadané rovnice. Tedy

$$y(x) = c_1 e^{0x} + c_2 e^{1x} + c_3 e^{12x} = c_1 + c_2 e^{x} + c_3 e^{12x}.$$

Příklad.

$$y'' - 4y' + 13y = 0.$$

Již se nebudeme zdržovat soustavou a sestavíme charakteristický polynom.

$$\chi(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 13$$

Kořeny jsou $\lambda_1 = 2 + 3i$ a $\lambda_2 = 2 - 3i$. Obecné řešení v komplexním tvaru je tedy

$$y(x) = c_1 e^{(2+3i)x} + c_2 e^{(2-3i)x}.$$

Fundamentální systém řešení $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ je $\varphi_1 = e^{(2+3i)x} = e^{2x}(\cos(3x) + i\sin(3x))$ a $\varphi_2 = e^{(2-3i)x} = e^{2x}(\cos(3x) - i\sin(3x))$. V tomto prostoru si může zvolit bázi $\{\psi_1, \psi_2\}$ z reálných funkcí tak, že položíme$\psi_1 = \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2)$,

$$\frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2) = \frac{1}{2}e^{2x}(\cos(3x) + i\sin(3x) + \cos(3x) - i\sin(3x)) = e^{2x}\cos(3x),$$

což odpovídá reálné části φ_1 nebo φ_2. A

$$\frac{1}{2i}(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{1}{2}e^{2x}(\cos(3x) + i\sin(3x) - \cos(3x) + i\sin(3x)) = e^{2x}\sin(3x),$$

to zase odpovídá imaginární části φ_1. Obecné řešení je tedy

$$y(x) = c_1 e^{2x}\cos(3x) + c_2 e^{2x}\sin(3x).$$

Obecné řešení diferenciální rovnice (8.5.1), pokud známe řešení homogenizové rovnice pro $b(x) = 0$, je samozřejmě ve tvaru součtu $y_H + y_P$. Partikulární řešení lze opět nalézt metodou variace konstant.

Rejstřík

bod stacionární: 37
derivace druhá Fréchetova: 30
— Fréchetova p-tá: 33
— Gâteauxova: 13
— parciální: 15
— — zobecněného typu: 27
— podle vektoru: 13
extrém lokální: 37
Funkce definovaná implicitně: 22
— integrovatelná: 45
funkce Lagrangeova: 40
integrál na množině: 47
Integrál na obdélníku: 45
Koule otevřená v normovaném prostoru: 1
— uzavřená v normovaném prostoru: 1
limita funkce: 3
matice Jakobiho: 16
— parciálních derivací: 16
maximum lokální funkce: 37
— — na množině: 39
— ostré lokální: 37
minimum lokální funkce: 37
— — na množině: 39
— ostré lokální: 37
množina Jordanovsky měřitelná: 48
— míry nula: 46
Množina ohraničená v normovaném prostoru: 1
Norma: 1
normy ekvivalentní: 3
Obdélník v $\mathbb{R}^n$: 43
Objem obdélníku n-rozměrný: 43
oscilace funkce na množině: 46
— — v bodě: 46
problém Cauchyho (počáteční): 57
proměnné separované: 59
Prostor normovaný: 1
rovnice diferenciální: 57
— — lineární homogenní: 60
— — lineární vyššího řádu: 63
— — lineární: 60
— se separovanými proměnnými: 59
řešení diferenciální rovnice: 57
— partikulární: 60
Složky funkce: 5
Součet dolní: 44
— horní: 44
systém fundamentální: 61
Topologie eukleidovská na $\mathbb{R}^n$: 4
— generovaná normou: 1
— přirozená na $\mathbb{R}^n$: 4
— součinová na $\mathbb{R}^n$: 4
úloha Cauchyho (počáteční): 57
zjemnění dělení: 43
— — společné: 43
zobrazení asociované: 30, 33
— definované implicitně: 28
— diferencovatelné p-krát: 33
— — dvakrát spojitě: 31
— — spojitě: 18
— dvakrát diferencovatelné: 30
— Fréchet diferencovatelné: 9
— homogenní řádu n: 33
— kvadratické: 29
— — indefinitní: 38
— — negativně definitní: 38
— — pozitivně definitní: 37
— multilineární: 32
— parciální: 15
— spojité v normovaných prostorech: 2
— symetrické: 29
— — multilineární: 33
— třídy C^2: 32