VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA

DIFERENCIÁLNÍ POČET FUNKCÍ JEDNÉ PROMĚNNÉ

Jaromír Kuben
Petra Šarmanová

Vytvořeno v rámci projektu Operačního programu Rozvoje lidských zdrojů
CZ.04.1.03/3.2.15.1/0016
Studijní opory s převažujícími distančními prvky pro předměty teoretického základu studia.

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem
a státním rozpočtem České republiky

ESF - ROVNÉ PŘÍLEŽITOSTI PRO VŠECHNY

Kuben Jaromír, Šarmanová Petra
Diferenciální počet funkcí jedné proměnné

ISBN 80-248-1192-8

Obsah

Předmluva

STUDIJNÍ OPORY S PŘEVAŽUJÍCÍMI DISTANČNÍMI PRVKY PRO PŘEDMĚTY TEORETICKÉHO ZÁKLADU STUDIA je název projektu, který uspěl v rámci první výzvy Operačního programu Rozvoj lidských zdrojů. Projekt je spolufinancován státním rozpočtem ČR a Evropským sociálním fondem. Partnery projektu jsou Regionální středisko výchovy a vzdělávání, s. r. o. v Mostě, Univerzita obrany, Brno a Technická univerzita v Liberci. Projekt byl zahájen 5. 1. 2006 a bude ukončen 4. 1. 2008.

Cílem projektu je zpracování studijních materiálů z matematiky, deskriptivní geometrie, fyziky a chemie tak, aby umožnily především samostatné studium a tím minimalizovaly počet kontaktních hodin s učitelem. Je zřejmé, že vytvořené texty jsou určeny studentům všech forem studia. Studenti kombinované a distanční formy studia je využijí k samostudiu, studenti v prezenční formě si mohou doplnit získané vědomosti. Všem studentům texty pomohou při procvičení a ověření získaných vědomostí. Nezanedbatelným cílem projektu je umožnit zvýšení kvalifikace širokému spektru osob, které nemohly ve studiu na vysoké škole z různých důvodů (sociálních, rodinných, politických) pokračovat bezprostředně po maturitě.

V rámci projektu jsou vytvořeny jednak standardní učební texty v tištěné podobě, koncipované pro samostatné studium, jednak e-learningové studijní materiály, přístupné prostřednictvím Internetu. Součástí výstupů je rovněž banka testových úloh pro jednotlivé předměty, na níž si studenti ověří, do jaké míry zvládli prostudované učivo.

Bližší informace o projektu můžete najít na adrese http://www.studopory.vsb.cz/.

Přejeme vám mnoho úspěchů při studiu a budeme mít radost, pokud vám předložený text pomůže při studiu a bude se vám líbit. Protože nikdo není neomylný, mohou se i v tomto textu objevit nejasnosti a chyby. Předem se za ně omlouváme a budeme vám vděčni, pokud nás na ně upozorníte.

ESF - ROVNÉ PŘÍLEŽITOSTI PRO VŠECHNY

Kapitola 1

Úvod

1.1 Co je to diferenciální počet a čím se zabývá

Ve chvíli, kdy jste otevřeli tento studijní materiál, si jistě kladete otázku: „Co budu po prostudování tohoto textu umět? K čemu dále použiji všechny ty matematické vzorce?“

Pokusíme se spolu s vámi na tyto otázky odpovědět. Nejdříve se však sami zamyslete nad otázkou: „Jaký má matematika význam pro přírodní a technické vědy? Jak postupujeme, když chceme poznat a popsat nějaký přírodní jev?“

Při poznávání nějakého přírodního jevu zpočátku vyšetřujeme, za jakých podmínek se jev vyskytuje, tj. které vlivy jej způsobují nebo ruší, zesilují nebo zeslabují. V dalším stupni se snažíme jev popsat, měřit, vyjadřovat velikosti a souvislosti pomocí čísel. V té chvíli vstupuje na scénu matematika. Uvědomte si, že i z historického pohledu byly pokroky v přírodních vědách provázeny objevením a využitím nových matematických metod. Jak řekl Galileo Galilei:

> *Filosofie světa je obsažena v grandiózní knize stále otevřené všem a každému — myslím tím knihu přírody. Porozumět jí však může jen ten, kdo se naučí jejímu jazyku a písmu, jímž byla napsána. Napsána je jazykem matematiky a jejím písmem jsou matematické vzorce.*

Které matematické úvahy jsou pro zkoumání jevů nejdůležitější? Z každodenní zkušenosti víme, že se v přírodě neustále dějí změny. Naším cílem je nalézt příčiny změn a jejich vzájemnou souvislost. Z tohoto pohledu jsou nejdůležitější úvahy o proměnných veličinách a studium závislostí proměnných veličin.

Při zkoumání určitého jevu chceme buď získat celkový pohled na daný jev, tj. celkový průběh, nebo okamžitý stav jevu. Mnohem častěji dovedeme matematicky vyjádřit jenom okamžitý stav úkazu a jeho celkový průběh teprve hledáme. Dospěli jsme tedy ke dvěma základním problémům: Jak z celkového průběhu jevů odvodit okamžitý stav a naopak, jak z okamžitého stavu odvodit celkový obraz. Oba uvedené problémy se matematicky řeší metodami *infinitezimálního počtu*: Odpověď na první problém dává *diferenciální počet* a druhý problém řeší *integrální počet.* Obsahem studijního materiálu, který jste právě začali číst, je počet diferenciální.

Infinitezimální počet vytvořili nezávisle na sobě v 17. století I. Newton (v Anglii) a G. W. Leibniz (v Německu). Matematika před Newtonem a Leibnizem se omezovala na statické formy počítání, měření a popisování tvarů. Díky vytvořenému diferenciálnímu a integrálnímu počtu, který umožnil zkoumání pohybu a změny, bylo možno studovat proudění kapalin, rozpínání plynů, popisovat fyzikální jevy jako elektřinu a magnetismus nebo také odhalit zákonitosti létání, růstu rostlin a živočichů, popsat průběh šíření nemocí nebo kolísání ekonomického zisku.

Uvědomte si, že většina prvotních prací, které používaly diferenciální a integrální počet, byla zaměřena na studium fyziky. Mnoho velkých matematiků té doby bylo i velkými fyziky. Teprve později se matematika oddělila od fyziky a stala se samostatnou vědou, jak ji známe dnes.

Diferenciální počet a pojem funkce

Veličina, která nabývá různých hodnot, se nazývá *proměnná*. Je to například délka úsečky, velikost úhlu, čas, teplota, cena zboží, atd. Veličina, která se nemění, je stálá, se nazývá *konstanta*. Proměnné většinou označujeme písmeny z konce abecedy ($x, y, z, \dots$) a konstanty písmeny ze začátku abecedy ($a, b, c, \dots$). Mají-li však proměnné nebo konstanty své ustálené odborné značky (např. čas t, tlak p), pak je většinou zachováváme.

Jestliže při zkoumání jevu věnujeme pozornost dvěma proměnným veličinám, zjistíme velmi často, že mezi nimi existuje souvislost. Změní-li se jedna proměnná, změní se v závislosti na ní také druhá proměnná. Proto také první veličinu nazýváme *nezávisle proměnnou* neboli *argumentem*, druhou *závisle proměnnou* nebo *funkcí* první veličiny. Funkce obvykle označujeme písmeny $f, g, h, \dots$. Pokud chceme specifikovat přímo závislost mezi y a x, píšeme $f\colon\ y = f(x)$, kde x je nezávisle proměnná a y je závisle proměnná.

Např. obsah kruhu je funkcí jeho poloměru, dráha tělesa při volném pádu je funkcí doby pohybu atd. V tomto případě mluvíme o funkci jedné (nezávisle) proměnné.

Jestliže máme proměnnou, která závisí na dvou a více dalších proměnných veličinách, mluvíme o funkci dvou a více proměnných. Např. obsah obdélníku je funkcí dvou proměnných (velikostí stran), objem kvádru je funkcí tří proměnných (velikostí hran) atd. V tomto studijním materiálu se budeme věnovat pouze funkcím jedné proměnné. S funkcemi dvou a více proměnných se seznámíte v dalším kurzu.

Závislost dvou proměnných, získaná jako výsledek experimentu, bývá vyjádřena tabulkou, v níž jsou uvedeny jednotlivé hodnoty nezávisle proměnné a k nim příslušné hodnoty funkce. Tabulkové vyjádření však udává závislost veličin jen pro omezený počet případů, není dosti přehledné a nedovoluje snadno vyvozovat důsledky. Proto se často přistupuje ke grafickému vyjádření závislosti. Zakreslíme body, jejichž první souřadnice je nezávisle proměnná a druhá souřadnice je příslušná funkční hodnota (závisle proměnná). Pak lze sousední body spojit úsečkami, čímž vznikne lomená čára jakožto grafické vyjádření závislosti. Protože však ve většině případů předpokládáme, že se změny veličin v přírodních jevech dějí spojitě, můžeme nalezené body spojit křivkou, která nám dává dobrou představu o vlastnostech vyšetřované závislosti.

Nejlepší vyjádření závislosti je však pomocí rovnice neboli analytického výrazu. Ten je mnohem obsažnější než tabulka, přesnější než grafické vyjádření a samozřejmě obecnější. Také lze využít množství matematických metod ke zkoumání funkční závislosti. Výhody analytického vyjádření funkce jsou tak velké, že lze prohlásit, že *prvotním úkolem matematiky v přírodních vědách je popsat závislosti veličin (jež vystupují v nějakém přírodním jevu) analytickým výrazem.*

1.2 Co budete po prostudování tohoto textu umět

Jak již bylo řečeno, v následujícím textu se budete věnovat diferenciálnímu počtu funkcí jedné proměnné. Postupně se naučíte vyšetřovat základní vlastnosti dané funkce jedné proměnné, na jejichž základě budete schopni zakreslit *průběh* (graf) této funkce. Konkrétněji to znamená, že budete umět

1) určovat množinu hodnot, pro něž je funkce definována,
2) rozpoznat, kde je funkce spojitá, příp. nespojitá,
3) určit, kde daná funkce roste, příp. klesá (monotonie),
4) vypočítat, ve kterých bodech funkce nabývá maximálních a minimálních hodnot (extrémy),
5) určit, zda je graf funkce na určitém intervalu „prohnutý dolů“ nebo „nahoru“ (konvexnost, konkávnost),
6) určit asymptoty, atd.

Kromě těchto úloh zaměřených na vyšetřování průběhu funkce se dále seznámíte s tím, jak danou funkci v okolí nějakého bodu aproximovat (nahradit) polynomem, jak spolu souvisí dráha a rychlost hmotného bodu atd. K tomu všemu bude třeba si osvojit mnohé nové pojmy, a to především *limitu, spojitost a derivaci.*

Ukážeme si také mnohé praktické úlohy, které jsou řešitelné metodami diferenciálního počtu. Tyto úlohy, zadané většinou slovně, je třeba nejdříve matematicky *modelovat*, tedy převést do „matematické řeči“ a pak je řešit uvedenými metodami. Uvedeme si zde zadání tří úloh, které budete po prostudování skript schopni vyřešit.

Úloha 1.1. Z břevna kruhového průřezu s poloměrem $r = 20$ cm máme vytesat trám, který bude mít průřez ve tvaru obdélníku se stranami z a v („základnou“ a „výškou“). Jak máme volit z a v, aby měl trám maximální nosnost, víme-li, že jeho nosnost je přímo úměrná první mocnině z a druhé mocnině v?

Úloha 1.2. Světelný zdroj B (např. pouliční svítilna) má vzdálenost 36 m od světelného zdroje A. Zdroj B má osmkrát větší intenzitu než zdroj A. Který bod na spojnici obou zdrojů bude nejméně osvětlený? Přitom intenzita osvětlení světelným zdrojem je přímo úměrná intenzitě zdroje a klesá s druhou mocninou vzdálenosti od uvažovaného zdroje.

Úloha 1.3. Z kanálu šířky $a = 6$ m vychází pod pravým úhlem kanál šířky $b = 4$ m. Najděte největší délku tyče, kterou je možno splavit z jednoho kanálu do druhého.

Uvedené úlohy si společně vyřešíme v kapitole 10.

1.3 Orientace v textu

Celý studijní materiál je tvořen jedenácti kapitolami. První kapitola, kterou právě čtete, je pouze úvodem ke studiu. Další tři kapitoly *Základní pojmy*, *Reálné funkce jedné reálné proměnné* a *Elementární funkce* jsou z velké části učivem střední školy. Jsme si vědomi toho, že v závislosti na typu střední školy (a vaší píli) se může velmi lišit úroveň vašich vstupních matematických znalostí. Pro některé z vás budou proto tyto kapitoly jen připomenutím toho, co již znáte. Protože je však mnoho těch, kteří danou látku již zapomněli, nebo dokonce nikdy neslyšeli, snažili jsme se tyto kapitoly zpracovat poměrně podrobně. Bez znalosti základní pojmů nelze pochopit další, složitější pojmy.

Další kapitoly jsou již věnovány diferenciálnímu počtu funkcí jedné proměnné. Jedná se o následující kapitoly: *Posloupnosti*, *Limita a spojitost*, *Derivace*, *Základní věty diferenciálního počtu*, *Průběh funkce*, *Globální extrémy* a *Aproximace funkce polynomem*. Nebudeme se nyní zmiňovat o tom, co je obsahem jednotlivých kapitol — to se dozvíte na začátku každé kapitoly v tzv. *Průvodci studiem* a přehledně v části nazvané *Cíle*.

Celý text si klade dva základní cíle — jednak seznámit čtenáře se základy diferenciálního počtu funkcí jedné reálné proměnné a jednak pomoci čtenáři, aby se naučil matematickému způsobu myšlení a přesnému formulování myšlenek.

Nové a důležité pojmy jsou uvedeny v definicích, vlastnosti a souvislosti ve větách. Velkou pozornost jsme věnovali motivaci zaváděných pojmů a správnému pochopení jejich významu. Rádi bychom, abyste měli s každým pojmem (definicí) spojen jednoduchý geometrický nebo fyzikální model. Přitom důkazy vět uvádíme jen tehdy, jsou-li pro běžného čtenáře pochopitelné.

Ke čtivosti a srozumitelnosti slouží členění textu na menší logické části, zařazení velkého množství obrázků, grafů, kontrolních otázek a řešených příkladů. Za jednotlivými tematickými celky jsou dále zařazena cvičení. Samostatné řešení v nich obsažených příkladů tvoří nedílnou součást studia. Jen tak mohou studenti získat potřebné početní návyky a hlouběji si osvojit nové pojmy. Pro usnadnění kontroly jsou všechna cvičení opatřena výsledky. Pro lepší orientaci v textu jsou konce důkazů označeny symbolem □ a konce řešených příkladů symbolem ▲.

Existují stovky učebnic různé obecnosti a obtížnosti věnovaných diferenciálnímu počtu funkcí jedné proměnné. Seznam literatury uvedený na konci těchto skript je jen malou ukázkou. V textech [7, 13] lze nalézt všechny důkazy neuvedené v těchto skriptech. Náročnějším zájemcům lze doporučit klasickou českou učebnici [9] a rovněž [23]. Popoulárnější formou se o mnoha zajímavostech z matematiky lze poučit v knihách [1, 6, 22, 24]. Zájemci o další příklady k procvičení mohou použít [8].

Každá kapitola má svou pevnou strukturu, která by vám měla pomoci k rychlejší orientaci v textu. K tomu využíváme ikony, jejichž význam si nyní vysvětlíme.

Průvodce studiem

Prostřednictvím průvodce studiem vás chceme seznámit s tím, co vás v dané kapitole čeká, které části by měly být pro vás opakováním, na co je třeba se obzvláště zaměřit atd.

Cíle

V části cíle se dozvíte, co všechno zvládnete a budete umět po prostudování dané kapitoly.

Příklad

Touto ikonou jsou označeny všechny řešené příklady. Konec řešených příkladů je označen plným trojúhelníčkem.

Pojmy k zapamatování

Pojmy zde uvedené jsou většinou nové a zcela zásadní pojmy, které je třeba umět přesně definovat. To znamená pojem nejen pochopit a umět ilustrovat na příkladech, ale také umět vyslovit jeho přesnou definici.

Kontrolní otázky

Těmito otázkami si ověříte, zda jste daným pojmům porozuměli, zda si uvědomujete rozdíly mezi zdánlivě podobnými pojmy, zda dovedete uvést příklad ilustrující danou situaci atd.

Příklady k procvičení

Tyto příklady slouží k tomu, abyste si důkladně procvičili probranou látku. Výsledky uvedených příkladů jsou zařazeny na konci studijního materiálu.

Autotest

Pomocí autotestu si otestujete své znalosti a početní dovednosti z určitého objemu učiva.

Pro zájemce

Tato část obsahuje komentáře, historické poznámky, příp. rozšíření učiva. Je nepovinná a je od ostatního textu odlišena menším typem písma.

Klíč k příkladům k procvičení

Na konci studijního materiálu je uveden klíč ke cvičením, který obsahuje výsledky neřešených příkladů.

Literatura

Jedná se o literaturu použitou autory při vytváření tohoto studijního materiálu, nikoliv o literaturu doporučenou k dalšímu studiu. Pokud některou z uvedených publikací doporučujeme zájemcům, pak je to v textu spolu s odkazem na daný titul jasně uvedeno.

Rejstřík

Rejstřík, uvedený na konci skript, poslouží ke snadné orientaci v textu.

1.4 Vstupní test

Již jsme se zmínili o tom, že každý z vás přichází z jiného typu střední školy a s jinými matematickými znalostmi. I když je v dalším textu věnována poměrně značná část právě připomenutí základních znalostí, je jasné, že se nelze věnovat všemu. Nyní si tedy uveďme seznam toho, co je nutno znát:

- Úpravy algebraických výrazů:
  - počítání se zlomky,
  - počítání s mocninami a odmocninami,
  - rozklad mnohočlenu na součin.
- Řešení následujících rovnic a nerovnic:
  - lineární,
  - kvadratické,
  - s absolutní hodnotou,
  - exponenciální,
  - logaritmické,
  - goniometrické.

To, zda danou látku opravdu zvládáte, si můžete nyní ověřit. Vyřešením následujícího testu a následnou kontrolou výsledků, které jsou uvedeny na konci v *Klíči k příkladům k procvičení*, si nejlépe ověříte, jak na tom jste. Jestliže si s některým příkladem vůbec neporadíte, prostudujte si příslušnou partii v některé středoškolské učebnici — například v [14], [15], [16], [17] nebo [18].

Autotest

1. Upravte

   a) $(8a^5b^{-4}c^{-2}) \cdot (3a^{-3}b^7c^2)$, b) $(\sqrt[6]{4})^3$,

   c) $\sqrt[3]{16\sqrt{2}}$, d) $\dfrac{\frac{3}{4}-\frac{2}{3}}{\frac{5}{6}-\frac{1}{2}}\,\pi$.

2. Upravte a stanovte podmínky, za kterých mají provedené úpravy smysl:

$$\left(\frac{2a^2-2}{a^2+ab}\cdot\frac{a+b}{1-a}\right)\cdot\frac{a}{a^3+1}.$$

3. Řešte v $\mathbb{R}$ rovnici $5+\sqrt{x^2-5}=x$.
4. Řešte v $\mathbb{R}$ rovnici $\sqrt{6+\sqrt{x}}=\sqrt{15-2\sqrt{x}}$.
5. Řešte v $\mathbb{R}$ nerovnici $\dfrac{x^2-7x+10}{x^2-10x+21}<0$.
6. Řešte v $\mathbb{R}$ nerovnici $|2x+1|\leqq|x-3|$.
7. Řešte v $\mathbb{R}$ exponenciální rovnici $2^{2x+1}+2^{x+2}=16$.
8. Řešte v $\mathbb{R}$ logaritmickou nerovnici $\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{x-3}{x+3}>0$.
9. Řešte v $\mathbb{R}$ goniometrickou rovnici $\cos x+\operatorname{cotg} x=1+\sin x$.
10. 10 ručníků se usuší na slunci za 28 minut. Za jak dlouho se usuší 20 ručníků?

1.5 Na závěr

Celý text vychází z koncepce výuky matematické analýzy pro první ročník na Fakultě elektrotechniky a informatiky VŠB–TU v Ostravě a na Fakultě vojenských technologií Univerzity obrany. Vznikl na základě dlouholetých zkušeností obou autorů s výukou této látky.

Jako podklad k vytvoření tohoto textu posloužila zejména skripta [10, 11] prvního z autorů. Jejich úpravou vznikl studijní materiál pro studenty kombinovaného studia připravený na VŠB–TU v roce 2003. Na jeho vzniku se kromě obou autorů částečně podílela Mgr. Lenka Šimonová.

Nynější text vznikl podstatným přepracováním a rozšířením zmíněného materiálu. Zcela nově byla zpracována kapitola o posloupnostech.

Současný text existuje ve dvou verzích — tištěné a obrazovkové. U obrazovkové verze se jedná o multimediální výukový text s velkým množstvím animací, interaktivních programů a testů. Vytvoření těchto studijních materiálů bylo umožněno grantem Evropského sociálního fondu v rámci projektu OP RLZ CZ.04.1.03/3.2.15.1/0016 s názvem *Studijní opory s převažujícími distančními prvky pro předměty teoretického základu studia*.

Chtěli bychom poděkovat recenzentům prof. RNDr. Zuzaně Došlé, DSc. z Přírodovědecké fakulty MU v Brně a RNDr. Jiřímu Hermanovi, Ph.D. z Gymnázia Brno, třída Kapitána Jaroše 14 za pečlivé přečtení textu a řadu cenných připomínek.

Rovněž bychom chtěli poděkovat svým kolegyním RNDr. Šárce Hoškové, Ph.D. a PhDr. Pavlíně Račkové z katedry matematiky a fyziky Fakulty vojenských technologií Univerzity obrany za pomoc s kontrolou celého textu.

Text byl vysázen sázecím systémem pdfTEX ve formátu LATEX 2$_\varepsilon$. Obrázky byly vytvořeny programem METAPOST s použitím balíku TEXovských maker `mfpic`.

*****

Žák není nádoba, jež se má naplnit, ale pochodeň, která se má zapálit.

(Starořecká moudrost)

*****

Kapitola 2

Základní pojmy

Průvodce studiem

V této kapitole si stručně připomeneme základní pojmy, bez jejichž znalosti bychom se v dalším studiu neobešli.

Nejprve to budou poznatky z teorie množin a logiky (množina, operace s množinami, výroky, operace s výroky, kvantifikátory).

Dále se budeme věnovat, už o něco podrobněji, reálným číslům. Především ukážeme, v čem se liší množina reálných čísel od množiny čísel racionálních. Představa, kterou si o reálných a především iracionálních číslech přinášíme ze střední školy, je velmi intuitivní. Se středoškolskými znalostmi jsme schopni dokázat, že $\sqrt{2}$ *(úhlopříčka čtverce o straně délky 1) není číslo racionální, ale vlastně vůbec nevíme, co to znamená. Proto tomuto tématu věnujeme o trochu více času.*

Nakonec připomeneme pojmy matematická indukce, kartézský součin a zobrazení, čímž se již připravíme na další kapitolu věnovanou funkcím.

Protože je tato kapitola z větší části opakováním ze střední školy, závisí pouze na vašich znalostech, kolik času vám zabere její prostudování.

Cíle

Po prostudování této kapitoly budete schopni

- objasnit pojem množina a definovat základní operace s množinami,
- vysvětlit rozdíl mezi výrokem a výrokovou formou,
- vytvářet výroky pomocí logických spojek a kvantifikátorů,
- vysvětlit, v čem se liší množina reálných čísel od množiny racionálních čísel,
- objasnit pojem rozšířená množina reálných čísel,
- definovat supremum a infimum množiny,
- vysvětlit princip matematické indukce a využít ho k důkazu jednoduchých tvrzení,

- definovat pojmy kartézský součin a zobrazení,
- v konkrétních případech určit, zda se jedná o zobrazení, či nikoliv.

2.1 Množiny

Pojem množiny je jedním ze základním pojmů moderní matematiky. *Množinou* rozumíme soubor (souhrn) navzájem různých (rozlišitelných) matematických či jiných objektů. O každém objektu musí být možné rozhodnout, zda do dané množiny patří, či nikoliv. Jednotlivé objekty, které patří do dané množiny, se nazývají *prvky* množiny.

Také například samy množiny mohou být prvky nějaké množiny. Nepřipouštíme však existenci množiny, která by obsahovala všechny množiny[1].

Množiny obvykle značíme velkými písmeny a prvky malými písmeny. Zde je jistá nesrovnalost v tom, že množiny mohou někdy vystupovat jako prvky jiných množin.

Zápis $a \in A$ znamená, že *a je prvkem množiny A*. Budeme také říkat, že prvek a patří do množiny A. Zápis $a \notin A$ znamená, že *a není prvkem množiny A*. Budeme také říkat, že prvek a nepatří do množiny A.

Prvky množiny dáváme do složených závorek; obsahuje-li množina A právě prvky a, b, c, píšeme $A = \{a, b, c\}$.

Poznámka 2.1. Je třeba si uvědomit, že prvek X není totéž jako jednoprvková množina obsahující prvek X, tj. $\{X\}$. Můžeme jít ještě dále a uvažovat novou jednoprvkovou množinu, jejímž jediným prvkem bude jednoprvková množina obsahující prvek X, tj. $\{\{X\}\}$. Ještě jednou zdůrazněme, že tyto jednoprvkové množiny mají různé prvky.

Nejčastěji bývá množina zadána výčtem prvků nebo pomocí charakteristické vlastnosti prvků. Zápis $B = \{x \in E : V(x)\}$ říká, že množina B je tvořena prvky z množiny E a to pouze těmi, které mají vlastnost $V(x)$.

Uvažujme například množiny $A = \{a, b, c\}$, $B = \{(1, 0), (2, 1), (4, 5)\}$ a $C = \{x \in \mathbb{N} : 3 \leqq x < 7\}$, kde $\mathbb{N}$ značí množinu všech přirozených čísel. Množiny A a B jsou zadány výčtem prvků, přičemž prvky množiny B jsou uspořádané dvojice čísel. Množina C je zadána pomocí vlastnosti prvků. Je to množina těch přirozených čísel, která jsou větší nebo rovna 3 a menší než 7, tj. $C = \{3, 4, 5, 6\}$.

Pojmy *množina*, *prvek* a *býti prvkem nějaké množiny* jsme zavedli pouze intuitivně, neboť se jedná o primitivní pojmy teorie množin[2], tj. základní, nejjednodušší pojmy, které

[1] Kdybychom připustili, že lze sestrojit množinu všech množin, dostali bychom se ke sporům, které mají podobný charakter jako tzv. *Russellův paradox*, který lze populárně formulovat takto:
Vojenský holič dostal rozkaz, aby holil jen ty vojáky, kteří se neholí sami. Chtěl-li vyhovět rozkazu, měl či neměl se sám holit?
Jestliže se oholí, tak neholí právě všechny vojáky, kteří se sami neholí. Jestliže se neoholí, tak neholí právě všechny vojáky, kteří se sami neholí. Ať se rozhodne tak či onak, rozkaz nemůže splnit.

[2] Teorie množin je matematická disciplína, která studuje obecné vlastnosti množin, tj. takové vlastnosti množin, které nezávisí na vlastnostech objektů patřících do množin. Zakladatelem teorie množin byl německý matematik **Georg Cantor** (1843–1918).

se nedefinují, ale pomocí nichž se definují ostatní pojmy. Nyní tedy můžeme definovat další pojmy, např. rovnost množin nebo pojem podmnožina.

Nechť A, B jsou množiny. Říkáme, že *množiny A, B jsou si rovny* a píšeme $A = B$, jestliže každý prvek množiny A je zároveň prvkem množiny B a každý prvek množiny B je zároveň prvkem množiny A.

Například pro množiny $A = \{1, 2\}$ a $B = \{2, 1\}$ platí $A = B$.
Zápis $A \neq B$ znamená, že množina A není rovna množině B.

Nechť A a B jsou množiny. Říkáme, že *množina B je podmnožinou množiny A* a píšeme $B \subset A$, právě když každý prvek množiny B je zároveň prvkem množiny A.

Zápisem $B \not\subset A$ budeme vyjadřovat skutečnost, že množina B není podmnožinou množiny A, tj. existuje takový prvek a, že platí $a \in B$ a zároveň $a \notin A$.

Poznámka 2.2.

1. Pro každou množinu A platí $A \subset A$.
2. Nechť A, B jsou množiny. Pak $A = B$, právě když platí: $A \subset B$ a zároveň $B \subset A$.
3. Nechť A, B, C jsou množiny, $A \subset B$ a $B \subset C$. Pak $A \subset C$.

Pro další budování teorie množin i celé matematiky je výhodné připustit existenci množiny, která neobsahuje žádný prvek. Taková množina se nazývá *prázdná* a označuje se $\emptyset$ nebo $\{\}$.

Zápis $A = \emptyset$ tedy znamená, že množina A je prázdná, a zápis $A \neq \emptyset$ značí, že množina A není rovna prázdné množině, tj. že obsahuje alespoň jeden prvek. Pak říkáme, že množina A je *neprázdná*. Uvědomte si, prosím, že $\emptyset \neq \{\emptyset\}$. První symbol značí prázdnou množinu a druhý jednoprvkovou množinu obsahující prázdnou množinu.

Jednoduchou úvahou lze ukázat, že prázdná množina je podmnožinou každé množiny, tj. $\emptyset \subset A$.

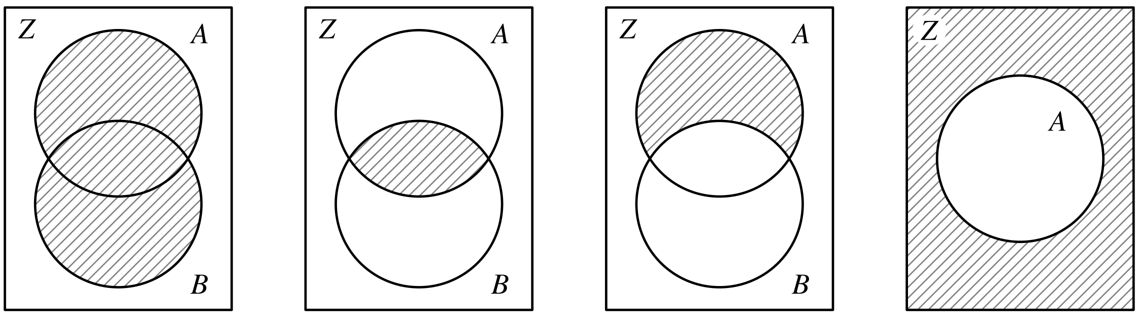
Příklad 2.3. Najděte všechny podmnožiny množiny $A = \{1, 2, 3\}$.

Řešení. Množina $A = \{1, 2, 3\}$ má následující podmnožiny: $\emptyset$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$, $\{1, 2, 3\}$. Připomeňme, že číslo 1 je prvek množiny A a $\{1\}$ je podmnožina množiny A obsahující prvek 1. ▲

Připomeňme základní množinové operace sjednocení, průnik, rozdíl a doplněk.

1. *Sjednocení množin A a B* (značíme $A \cup B$) je množina takových prvků, které patří do množiny A nebo do množiny B.
2. *Průnik množin A a B* (značíme $A \cap B$) je množina takových prvků, které patří do množiny A a zároveň do množiny B.
3. *Rozdíl množin A a B* (značíme $A \smallsetminus B$) je množina takových prvků, které patří do množiny A a současně nepatří do množiny B.
4. Předpokládejme nyní, že celá množina A je podmnožinou nějaké základní množiny Z. Pak *doplněk (komplement) množiny A vzhledem k množině Z* (značíme A', příp. A'_Z) je množina takových prvků ze Z, které nepatří do množiny A.

Množiny zobrazujeme pomocí *Vennových*[1] *diagramů:*



$A \cup B$ $\qquad$ $A \cap B$ $\qquad$ $A \smallsetminus B$ $\qquad$ A'

Analogicky zavádíme průnik a sjednocení více množin. Pro operace s množinami lze odvodit řadu početních pravidel. Uvedeme pouze několik příkladů. Zkuste si pomocí Vennových diagramů znázornit levé a pravé strany jednotlivých rovností. Rovnost platí, pokud levá i pravá strana rovnosti dává stejné grafické znázornění.

$A \cup B = B \cup A, \ A \cap B = B \cap A$	komutativní zákony
$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	asociativní zákon
$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	asociativní zákon
$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$	distributivní zákon
$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$	distributivní zákon
$(A \cap B)' = A' \cup B', \ (A \cup B)' = A' \cap B'$	de Morganovy[2] zákony
$(A')' = A, \ A \smallsetminus B = A \cap B'$	

Příklad 2.4. Nechť $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4, 5\}$. Určete $A \cup B$, $A \cap B$, $A \smallsetminus B$.

Řešení. Je $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A \cap B = \{2, 4\}$, $A \smallsetminus B = \{1, 3\}$. ▲

[1] **John Venn** (1834–1923) — anglický matematik a logik.
[2] **Augustus de Morgan** (1806–1871) — skotský matematik a logik.

Speciálními případy množin jsou tzv. *číselné množiny*. To jsou množiny, jejichž prvky jsou čísla. Protože budeme v matematické analýze pracovat téměř výhradně s číselnými množinami, připomeneme nyní některá standardní označení číselných množin, známá již ze střední školy.

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$	množina přirozených čísel,
$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$	množina celých čísel,
$\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\right\}$	množina racionálních čísel,
$\mathbb{R}$	množina reálných čísel,
$\mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$	množina iracionálních čísel,
$\mathbb{C}$	množina komplexních čísel.

Dále značíme

$\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R}\colon\ x > 0\}$	množina kladných reálných čísel,
$\mathbb{R}_0^+ = \{x \in \mathbb{R}\colon\ x \geqq 0\}$	množina kladných reálných čísel včetně nuly

a podobně $\mathbb{N}_0$, $\mathbb{R}^-$, $\mathbb{R}_0^-$, $\mathbb{Q}^+$, $\mathbb{Q}_0^+$, $\mathbb{Q}^-$, $\mathbb{Q}_0^-$, $\mathbb{Z}^+$, $\mathbb{Z}_0^+$, $\mathbb{Z}^-$, $\mathbb{Z}_0^-$.

Poznámka 2.5.

1. Platí $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.
2. Racionální čísla mají buď *ukončený* desetinný rozvoj (např. $\frac{3}{4} = 0{,}75$) nebo *neukončený periodický* desetinný rozvoj (např. $\frac{23}{11} = 2{,}\overline{09} = 2{,}090909\dots$ nebo $\frac{37}{30} = 1{,}2\overline{3} = 1{,}23333\dots$).
3. Čísla iracionální mají *neukončený neperiodický* desetinný rozvoj (např. π, $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{5}$).

Množinou reálných čísel se budeme podrobněji zabývat v dalším textu. Ještě předtím si však připomeneme základní pojmy z výrokové logiky.

2.2 Výroky a operace s výroky

Matematická logika je disciplína, která se věnuje jazyku matematiky, logické výstavbě matematických teorií, dokazování matematických vět atd. Základním pojmem matematické logiky je *výrok*.

Výrokem nazýváme jakékoliv tvrzení, o němž lze rozhodnout, zda je pravdivé nebo nepravdivé (nastává právě jedna z těchto možností). Výroky, o nichž dosud není známo, zda jsou pravdivé nebo nepravdivé, avšak jedna z těchto možností musí nastat, se nazývají *hypotézy*.

Příklad 2.6. Uveďte příklady tvrzení, která jsou a která nejsou výroky.

Řešení. Tvrzení, která jsou výroky: Číslo 3 je liché. Dnes je středa. Sudá čísla jsou dělitelná pěti. Ve vesmíru žijí další vyspělé civilizace.
Věty, které nejsou výroky: Kdo tam zajde? Podej mi ten sešit! Číslo x je sudé. Matematická analýza. ▲

U každého výroku nás bude zajímat, zda je pravdivý nebo nepravdivý. Na libovolné množině výroků proto definujeme tzv. *pravdivostní funkci* p, kterou zavedeme takto: Je-li výrok A pravdivý, pak $p(A) = 1$; je-li výrok A nepravdivý, pak $p(A) = 0$. Hodnoty 1, 0 pravdivostní funkce p se nazývají *pravdivostní hodnoty*.

Jsou-li A, B výroky, můžeme z nich pomocí logických spojek negace, konjunkce, disjunkce, implikace a ekvivalence tvořit nové výroky.

Nechť A, B jsou výroky.

1. *Negací výroku A* (značíme $\neg A$ nebo $non\,A$) rozumíme výrok, který je pravdivý, právě když je výrok A nepravdivý.
2. *Konjunkcí výroků A, B* (značíme $A \wedge B$) rozumíme výrok, který je pravdivý, právě když jsou pravdivé oba výroky A, B (tj. platí A i B).
3. *Disjunkcí výroků A, B* (značíme $A \vee B$) rozumíme výrok, který je pravdivý, právě když je pravdivý alespoň jeden z výroků A, B (tj. platí A nebo B).
4. *Implikací výroků A, B* (značíme $A \Rightarrow B$) rozumíme výrok, který je pravdivý ve všech případech s výjimkou případu, že výrok A je pravdivý a výrok B je nepravdivý. Říkáme, že „výrok A implikuje výrok B“ nebo „z A plyne B“ nebo „platí-li A, pak platí B“.
5. *Ekvivalencí výroků A, B* (značíme $A \Leftrightarrow B$) rozumíme výrok, který je pravdivý, právě když jsou oba výroky zároveň pravdivé nebo zároveň nepravdivé. Říkáme, že „výrok A je ekvivalentní s výrokem B“ nebo „A platí právě tehdy, když platí B“.

U implikace je třeba dát pozor především na případ, kdy vyjdeme od nepravdivého výroku A. Pak ať tvrdíme cokoliv (B může být pravdivý nebo nepravdivý), je výsledná implikace pravdivá. Například výrok „jestliže číslo 5 je sudé, pak číslo 2 je záporné“ je pravdivý.

Pro přehled si uveďme tabulku pravdivostních hodnot pro výroky získané z původních výroků negací, konjunkcí, disjunkcí, implikací a ekvivalencí.

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1

Ukažme si nyní, jak lze negovat výroky vytvořené pomocí logických spojek negace, konjunkce, disjunkce, implikace a ekvivalence:

$$
\begin{aligned}
&\neg(\neg A) \;\Leftrightarrow\; A,\\
&\neg(A \wedge B) \;\Leftrightarrow\; (\neg A) \vee (\neg B),\\
&\neg(A \vee B) \;\Leftrightarrow\; (\neg A) \wedge (\neg B),\\
&\neg(A \Rightarrow B) \;\Leftrightarrow\; A \wedge (\neg B),\\
&\neg(A \Leftrightarrow B) \;\Leftrightarrow\; \neg[(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)] \;\Leftrightarrow\; [(A \wedge \neg B) \vee (B \wedge \neg A)].
\end{aligned}
$$

Příklad 2.7. Nechť A a B jsou výroky. Zapište symbolicky:

1. Buď platí A i B, nebo neplatí ani A ani B.
2. Platí nejvýše jeden z výroků A, B.
3. Platí právě jeden z výroků A, B.
4. Neplatí ani jeden z výroků A, B.

Řešení.

1. $(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$, tj. $A \Leftrightarrow B$.
2. $(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$, tj. $\neg(A \wedge B)$, tj. $\neg A \vee \neg B$.
3. $(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$.
4. $\neg A \wedge \neg B$. ▲

Příklad 2.8. Pomocí tabulky pravdivostních hodnot dokažte:
$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$ (vztah pro nepřímý důkaz);
$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \neg(A \wedge \neg B)$ (vztah pro důkaz sporem).

Řešení. O ekvivalenci jednotlivých výroků svědčí shodnost pravdivostních hodnot v odpovídajících sloupcích tabulky:

A	B	$A \Rightarrow B$	$\neg A$	$\neg B$	$\neg B \Rightarrow \neg A$	$A \wedge \neg B$	$\neg(A \wedge \neg B)$
1	1	1	0	0	1	0	1
1	0	0	0	1	0	1	0
0	1	1	1	0	1	0	1
0	0	1	1	1	1	0	1

▲

Doposud jsme mluvili o výrocích, tj. o tvrzeních, o nichž lze rozhodnout, zda jsou pravdivá nebo nepravdivá. V příkladě 2.6 jsme uvedli, že tvrzení „číslo x je sudé“ není výrok. Dosadíme-li za x konkrétní hodnoty (konstanty), pak už dostaneme výrok. Obecně, jestliže se nějaké tvrzení (obsahující jednu nebo více proměnných) stane výrokem, dosadíme-li za proměnné konkrétní hodnoty, nazýváme takové tvrzení *výrokovou formou*. Výroková forma o jedné proměnné x se značí $V(x)$, výroková forma o n proměnných $x_1, x_2, \dots, x_n$ se značí $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Například výroková forma „číslo x je sudé“ se stane výrokem, dosadíme-li za x konkrétní hodnotu: „číslo 5 je sudé“, „číslo 28 je sudé“. V prvním případě se jedná o nepravdivý výrok, v druhém případě o pravdivý výrok.

Dosazení konstant za proměnné do výrokové formy není jediným způsobem, jak z ní vytvořit výroky. Další možností je vázat proměnné pomocí slovních vazeb, které nazýváme kvantifikátory.

i) *Kvantifikátor obecný* (značíme symbolem $\forall$)[1] je vazba „pro všechna“ nebo „pro každé“.
ii) *Kvantifikátor existenční* (značíme symbolem $\exists$)[2] je vazba „existuje“ (alespoň jeden).
iii) *Kvantifikátor jednoznačné existence* (značíme symbolem $\exists!$) je vazba „existuje právě jeden“.

Nechť $V(x)$ je výroková forma proměnné x. Pak pomocí zmíněných kvantifikátorů lze vytvořit následující typy kvantifikovaných výroků.

$\forall x \in A : V(x)$	čteme: pro každé x z množiny A platí $V(x)$. Někdy také zapisujeme ve tvaru $x \in A \Rightarrow V(x)$ a čteme: je-li x z množiny A, pak platí $V(x)$.
$\exists\, x \in A : V(x)$	čteme: existuje (alespoň jeden) prvek x z množiny A takový, že platí $V(x)$.
$\exists!\, x \in A : V(x)$	čteme: existuje právě jeden prvek x z množiny A takový, že platí $V(x)$.

V prvním případě mluvíme o *obecném výroku*, v druhém o *existenčním výroku* a poslední případ se nazývá *výrok o existenci a jednoznačnosti*.

Příklad 2.9. Vytvořte pomocí kvantifikátorů výrok z výrokové formy $x \leqq 1$.

Řešení. Z výrokové formy $x \leqq 1$ lze například vytvořit následující výroky:

$\forall x \in \mathbb{Z} : x \leqq 1$	je nepravdivý výrok;
$\exists\, x \in \mathbb{Z} : x \leqq 1$	je pravdivý výrok;
$\exists!\, x \in \mathbb{N} : x \leqq 1$	je pravdivý výrok. ▲

Příklad 2.10. Určete, zda jsou následující výroky pravdivé nebo nepravdivé:

1. $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geqq 0$,
2. $\forall x \in \mathbb{R}^+ : x^2 - x \geqq 0$,
3. $\exists\, n \in \mathbb{N} : n < 2$,
4. $\exists!\, x \in \mathbb{R} : x^2 = 16$,
5. $\exists!\, n \in \mathbb{N} : n^2 = 16$.

Řešení.

1. Výrok je pravdivý, neboť druhá mocnina libovolného reálného čísla je kladná nebo rovna nule.

[1] Symbol $\forall$ je obrácené písmeno A a je odvozeno z anglického „All“= všechna, každý.
[2] Symbol $\exists$ je obrácené písmeno E a je odvozeno z anglického „Exists“= existuje.

2. Výrok není pravdivý, neboť řešením uvedené nerovnice v oboru reálných čísel je sjednocení intervalů $(-\infty, 0\rangle \cup \langle 1, \infty)$, např. pro $x = \frac{1}{2}$ tedy nerovnost není splněna.
3. Výrok je pravdivý, neboť dané podmínce vyhovuje přirozené číslo jedna.
4. Výrok není pravdivý, neboť existují dvě reálná čísla, pro která je splněna podmínka $x^2 = 16$, a to čísla 4 a -4.
5. Výrok je pravdivý, neboť zde již připadá v úvahu pouze číslo 4. ▲

Chceme-li tvořit výroky pomocí kvantifikátorů z výrokové formy více proměnných, musíme přiřadit kvantifikátor každé proměnné.

Příklad 2.11. Vytvořte pomocí kvantifikátorů výroky z výrokové formy $x \geqq y$.

Řešení. Z výrokové formy $x \geqq y$ lze například vytvořit:

$\forall x \in \mathbb{N}\ \forall y \in \mathbb{N} : x \geqq y$	je nepravdivý výrok, např. pro $x = 3$ a $y = 5$ neplatí;
$\forall x \in \mathbb{N}\ \exists\, y \in \mathbb{N} : x \geqq y$	je pravdivý výrok;
$\exists\, x \in \mathbb{N}\ \forall y \in \mathbb{N} : x \geqq y$	je nepravdivý výrok, protože neexistuje žádné univerzální $x \in \mathbb{N}$ takové, že by pro všechna $y \in \mathbb{N}$ platilo, že $y \leqq x$, tj. množina $\mathbb{N}$ nemá největší prvek. Ať zvolíme jakkoli velké přirozené číslo, vždy k němu lze najít přirozené číslo o jedničku větší;
$\exists\, x \in \mathbb{N}\ \exists\, y \in \mathbb{N} : x \geqq y$	je pravdivý výrok. ▲

Již jsme mluvili o tom, jak negujeme výrok, který vznikl pomocí logických spojek negace, konjunkce, disjunkce, implikace a ekvivalence. Nyní si ukážeme, jak negujeme výroky, v nichž se vyskytují kvantifikátory.

Uvažujme výrok $\forall x \in A : V(x)$, tj. pro každé x z množiny A platí $V(x)$. Negováním dostáváme: Není pravda, že pro všechny prvky $x \in A$ je splněna $V(x)$, tj. existuje alespoň jeden prvek $x \in A$, pro který neplatí $V(x)$. Tedy

$$\neg(\forall x \in A : V(x)) \Leftrightarrow \exists\, x \in A : \neg V(x).$$

Uvažujme výrok $\exists\, x \in A : V(x)$, tj. existuje x z množiny A, pro který platí $V(x)$. Negováním dostáváme: Není pravda, že existuje $x \in A$, pro který platí $V(x)$, tj. pro žádný prvek $x \in A$ neplatí $V(x)$. Tedy

$$\neg(\exists\, x \in A : V(x)) \Leftrightarrow \forall x \in A : \neg V(x).$$

Vidíme tedy, že negaci kvantifikovaných výroků provádíme záměnou kvantifikátorů a negací výrokové formy. A to i u kvantifikovaných výroků vytvořených z výrokové formy o více proměnných.

Příklad 2.12. Negujte kvantifikované výroky z příkladu 2.10 a rozhodněte o jejich pravdivosti.

Řešení.

1. $\exists\, x \in \mathbb{R} : x^2 < 0$ je nepravdivý výrok;
2. $\exists\, x \in \mathbb{R}^+ : x^2 - x < 0$ je pravdivý výrok;
3. $\forall n \in \mathbb{N} : n \geqq 2$ je nepravdivý výrok;
4. „Není pravda, že existuje právě jedno reálné číslo x, pro které platí $x^2 = 16$“, je pravdivý výrok, neboť existují dvě reálná čísla 4 a -4, jejichž druhé mocniny jsou rovny šestnácti.
5. „Není pravda, že existuje právě jedno přirozené číslo n, jehož druhá mocnina je rovna šestnácti“, je nepravdivý výrok. ▲

Příklad 2.13. Negujte následující kvantifikované výroky a rozhodněte, zda je pravdivý původní výrok nebo jeho negace:

1. $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists\, y \in \mathbb{R} : x + y = 5.$
2. $\exists\, x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R} : y^2 \geqq x.$
3. $\forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R} : (x - y)^2 \geqq 0.$
4. $\exists\, x \in \mathbb{R}\ \exists\, y \in \mathbb{R} : x^2 + y^2 = 0.$

Řešení. Negace:

1. $\exists x \in \mathbb{R}\ \forall\, y \in \mathbb{R} : x + y \neq 5.$
2. $\forall\, x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R} : y^2 < x.$
3. $\exists x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R} : (x - y)^2 < 0.$
4. $\forall\, x \in \mathbb{R}\ \forall\, y \in \mathbb{R} : x^2 + y^2 \neq 0.$

Ve všech případech jsou pravdivé původní výroky, neboť:

1. K libovolnému číslu x lze vždy nalézt odpovídající y, tak aby byla splněna daná rovnice.
2. Máme najít alespoň jedno univerzální x takové, že nerovnost $y^2 \geqq x$ bude splněna pro všechna y; v našem případě můžeme vzít $x = 0$ (protože pro libovolné $y \in \mathbb{R}$ platí $y^2 \geqq 0$).
3. Můžeme dosadit libovolné x a libovolné y a vždy bude uvedená nerovnost platit.
4. Existuje nějaké x a nějaké y (alespoň jedno x a alespoň jedno y), pro která tento vztah platí. V našem případě vezmeme $x = 0$ a $y = 0$, jiná možnost volby zde neexistuje. ▲

Vyjádření s kvantifikátory a logickými spojkami se nepoužívá pouze v matematice. Například v relačních databázových systémech je takové vyjádření potřebné pro formulování dotazů v dotazovacích jazycích, jako jsou například SQL nebo PROLOG.

2.3 Reálná čísla

V matematické analýze budeme nejčastěji pracovat s množinou reálných čísel a jejími podmnožinami. Pokusme se proto nyní upřesnit pojem reálného čísla. Na střední škole se vychází z geometrické interpretace reálného čísla. To znamená, že reálná čísla ztotožňujeme s body na přímce (číselné reálné ose). Při přesném budování pojmů matematické analýzy však s tímto pojetím reálných čísel nevystačíme.

Existují dvě možnosti, jak reálná čísla vybudovat. První možnost je založena na postupném vybudování přirozených čísel, pak celých čísel, dále racionálních a z nich pak čísel reálných. Tato cesta je však dosti zdlouhavá a technicky značně náročná.

Druhá možnost je zavést reálná čísla axiomaticky[1] a ostatní číselné množiny specifikovat jako jisté podmnožiny množiny reálných čísel. Tuto cestu si nyní naznačíme. Uvedeme třináct axiomů, které popisují množinu reálných čísel. Na základě těchto třinácti axiomů pak můžeme odvodit všechny vlastnosti reálných čísel, se kterými běžně pracujeme.

Je třeba si uvědomit, že mluvíme-li o množině všech reálných čísel, máme na mysli složitou strukturu. Jde nejen o množinu, ale také o operace sčítání a násobení, které jsou na ní definovány, o relaci uspořádání na této množině a o celý systém axiomů. Tuto strukturu označujeme $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$ nebo stručněji $\mathbb{R}$. Poznamenejme, že axiomaticky popisovaný objekt, tj. $\mathbb{R}$, existuje a je určen jednoznačně[2].

Pro operaci sčítání $(+)$ platí:

(A1) sčítání je *komutativní*, tj. pro každé $a, b \in \mathbb{R}$ platí

$$a + b = b + a\,;$$

(A2) sčítání je *asociativní*, tj. pro každé $a, b, c \in \mathbb{R}$ platí

$$a + (b + c) = (a + b) + c\,;$$

(A3) existuje *nulový prvek* $0 \in \mathbb{R}$ takový, že pro každé $a \in \mathbb{R}$ platí

$$a + 0 = a\,;$$

(A4) ke každému $a \in \mathbb{R}$ existuje *opačný prvek* (značíme ho $-a$) tak, že

$$a + (-a) = 0\,.$$

Pro operaci násobení $(\cdot)$ platí:

[1] Při axiomatickém zavádění daného objektu nepopisujeme způsob, jak je daný objekt vytvořen, nýbrž uvádíme (co nejkratší) výčet jeho základních vlastností (axiomů), které již daný objekt jednoznačně určují.

[2] Jednoznačností rozumíme fakt, že pokud existují dvě struktury splňující všech třináct axiomů, pak jsou tzv. izomorfní, tj. z hlediska algebry jde o zcela rovnocenné nerozlišitelné kopie.

(A5) násobení je *komutativní*, tj. pro každé $a, b \in \mathbb{R}$ platí

$$a \cdot b = b \cdot a\,;$$

(A6) násobení je *asociativní*, tj. pro každé $a, b, c \in \mathbb{R}$ platí

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c\,;$$

(A7) existuje *jednotkový prvek* $1 \in \mathbb{R}$ takový, že pro každé $a \in \mathbb{R}$ platí

$$a \cdot 1 = a\,;$$

(A8) ke každému $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ existuje *inverzní prvek* (značíme ho a^{-1}) tak, že

$$a \cdot (a^{-1}) = 1\,.$$

Operace sčítání a násobení vzájemně svazuje *distributivní zákon*, tj.

(A9) pro každé $a, b, c \in \mathbb{R}$ platí

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c\,.$$

Dále musíme svázat operace sčítání a násobení s uspořádáním. Popíšeme nejprve vlastnosti relace *menší než* ($<$):

(A10) pro každé $a, b \in \mathbb{R}$ nastává právě jeden z případů

$$a < b, \qquad a = b, \qquad b < a\,;$$

(A11) pro každé $a, b, c \in \mathbb{R}$ platí

$$(a < b) \wedge (b < c) \;\Rightarrow\; a < c\,;$$

(A12) pro každé $a, b, c \in \mathbb{R}$ platí

$$a < b \;\Rightarrow a + c < b + c\,, \qquad (a < b) \wedge (0 < c) \;\Rightarrow\; a \cdot c < b \cdot c\,.$$

Pro úplnost nadefinujme ještě relaci *menší nebo rovno* ($\leqq$): Pro každé $a, b \in \mathbb{R}$ platí $a \leqq b$ právě tehdy, když $a < b$ nebo $a = b$.
A konečně relaci *větší nebo rovno* ($\geqq$): Pro každé $a, b \in \mathbb{R}$ platí $a \geqq b$ právě tehdy, když $b \leqq a$.

Zbývá nám uvést poslední, třináctý, axiom, který odliší reálná čísla od čísel racionálních. Tento axiom je možno naformulovat více způsoby. My jsme zvolili, z hlediska dalšího využití, formulaci tohoto axiomu pomocí pojmů supremum a ohraničená množina. Tyto pojmy jsme však zatím nedefinovali. I přesto nyní uvedeme třináctý axiom a po objasnění nových pojmů se k němu znovu vrátíme.

(A13) Každá neprázdná shora ohraničená množina $M \subset \mathbb{R}$ má v $\mathbb{R}$ supremum.

Kvůli vysvětlení tohoto axiomu by nám stačilo definovat pojmy supremum a ohraničenost pro libovolné podmnožiny reálných čísel. Vzhledem k dalšímu využití je však vhodné definovat tyto pojmy pro širší množinu, tzv. rozšířenou množinu reálných čísel.

2.4 Rozšířená množina reálných čísel

Přidáme-li k množině $\mathbb{R}$ dva nové prvky, a to $+\infty$ a $-\infty$, mluvíme o *rozšířené množině reálných čísel* a značíme ji $\mathbb{R}^\star$, tj.

$$\mathbb{R}^\star = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}.$$

S $+\infty$ a $-\infty$ pracujeme do jisté míry podobně jako s ostatními reálnými čísly. Pro uspořádání platí:

Pro každé $x \in \mathbb{R}$: $\quad -\infty < x < +\infty, \qquad -\infty < +\infty.$

Dále definujeme v množině $\mathbb{R}^\star$ následující operace s $+\infty$ a $-\infty$:

$$\begin{array}{ll}
\text{Pro } x > -\infty: & x + (+\infty) = +\infty + x = +\infty, \\
\text{pro } x < +\infty: & x + (-\infty) = -\infty + x = -\infty, \\
\text{pro } x \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}: & x \cdot (+\infty) = +\infty \cdot x = +\infty, \\
& x \cdot (-\infty) = -\infty \cdot x = -\infty, \\
\text{pro } x \in \mathbb{R}^- \cup \{-\infty\}: & x \cdot (+\infty) = +\infty \cdot x = -\infty, \\
& x \cdot (-\infty) = -\infty \cdot x = +\infty, \\
\text{pro } x \in \mathbb{R}: & \dfrac{x}{+\infty} = \dfrac{x}{-\infty} = 0, \\
& |-\infty| = |+\infty| = +\infty.
\end{array}$$

Uvědomte si, které operace nejsou definovány (nelze je provést):

$$\boxed{+\infty + (-\infty), \quad -\infty + (+\infty), \qquad 0 \cdot (\pm\infty), \quad (\pm\infty) \cdot 0, \qquad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \qquad \frac{x}{0},\ x \in \mathbb{R}^\star}$$

Místo symbolu $+\infty$ můžeme užívat zkrácený symbol ∞ (znaménko „+“ lze vynechat).

Podmnožiny množiny $\mathbb{R}^\star$

Všechny známé číselné množiny jako jsou $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{I}$ a $\mathbb{R}$ jsou podmnožiny $\mathbb{R}^\star$. Připomeňme nyní definici dalších důležitých podmnožin $\mathbb{R}^\star$ — intervalů.

Definice 2.14. Nechť $a, b \in \mathbb{R}^\star$, $a < b$. Pak

i) *uzavřeným intervalem* s krajními body a a b rozumíme množinu

$$\langle a, b \rangle = \{x \in \mathbb{R}^\star : a \leqq x \leqq b\},$$

ii) *otevřeným intervalem* s krajními body a a b rozumíme množinu

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R}^\star : a < x < b\},$$

iii) *zleva uzavřeným a zprava otevřeným intervalem* s krajními body a a b rozumíme množinu

$$\langle a, b) = \{x \in \mathbb{R}^\star : a \leqq x < b\},$$

iv) *zleva otevřeným a zprava uzavřeným intervalem* s krajními body a a b rozumíme množinu

$$(a, b\rangle = \{x \in \mathbb{R}^\star : a < x \leqq b\}.$$

Protože $a, b \in \mathbb{R}^\star$, mají smysl intervaly $(a, +\infty)$, $(-\infty, a)$, $\langle a, +\infty)$, $(-\infty, a\rangle$, $\langle a, +\infty\rangle$ atd. Přitom $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$ a $\langle -\infty, +\infty\rangle = \mathbb{R}^\star$.

2.5 Maximum, minimum, supremum, infimum

Pojmy supremum a infimum budeme definovat pomocí pojmů horní a dolní závora množiny.

Definice 2.15. Nechť $M \subset \mathbb{R}^\star$ a nechť $k, l \in \mathbb{R}^\star$. Řekneme, že

i) k je *horní závora množiny* M, jestliže pro každé $x \in M$ platí $x \leqq k$.

ii) l je *dolní závora množiny* M, jestliže pro každé $x \in M$ platí $x \geqq l$.

iii) k je *maximum množiny* M, jestliže k je horní závora množiny M a $k \in M$. Píšeme $k = \max M$.

iv) l je *minimum množiny* M, jestliže l je dolní závora množiny M a $l \in M$. Píšeme $l = \min M$.

Poznámka 2.16.

1. Je-li k (resp. l) horní (resp. dolní) závora množiny M, pak také každé číslo $k' > k$ (resp. $l' < l$) je horní (resp. dolní) závorou množiny M.
2. Je-li $k = \max M$, je k největším prvkem množiny M, tedy pro každý prvek $x \in M$ platí $x \leqq k$.
3. Je-li $l = \min M$, je l nejmenším prvkem množiny M, tedy pro každý prvek $x \in M$ platí $x \geqq l$.

Definice 2.17. Nechť $M \subset \mathbb{R}^\star$ a nechť $U(M)$ značí množinu všech horních závor a $L(M)$ množinu všech dolních závor množiny M. Nechť $s, i \in \mathbb{R}^\star$. Řekneme, že

i) s je *supremum množiny* M (píšeme $s = \sup M$), jestliže s je minimum množiny všech horních závor množiny M, tj.
$$s = \min U(M).$$

ii) i je *infimum množiny* M (píšeme $i = \inf M$), jestliže i je maximum množiny všech dolních závor množiny M, tj.
$$i = \max L(M).$$

Jinými slovy, supremum je nejmenší horní závora a infimum je největší dolní závora. Z předchozí definice se snadno ověří, že pokud supremum resp. infimum existuje, je určeno jednoznačně.

Příklad 2.18. Určete minimum, maximum, infimum a supremum následujících podmnožin množiny $\mathbb{R}^\star$: $A = (2, 7\rangle$, $B = \{1, 2, 3\}$, $C = \mathbb{N}$, $D = \emptyset$, $E = \mathbb{R}$, $F = \langle 3, +\infty)$, $G = \mathbb{R}^\star$.

Řešení. Platí:

$\min A$ neexistuje,	$\max A = 7$,	$\inf A = 2$,	$\sup A = 7$,
$\min B = 1$,	$\max B = 3$,	$\inf B = 1$,	$\sup B = 3$,
$\min C = 1$,	$\max C$ neexistuje,	$\inf C = 1$,	$\sup C = +\infty$,
$\min D$ neexistuje,	$\max D$ neexistuje,	$\inf D = +\infty$,	$\sup D = -\infty$,
$\min E$ neexistuje,	$\max E$ neexistuje,	$\inf E = -\infty$,	$\sup E = +\infty$,
$\min F = 3$,	$\max F$ neexistuje,	$\inf F = 3$,	$\sup F = +\infty$,
$\min G = -\infty$,	$\max G = +\infty$,	$\inf G = -\infty$,	$\sup G = +\infty$. ▲

Poznámka 2.19.

1. Na uvedených příkladech jste si jistě všimli, že pro každou z uvažovaných množin $M \subset \mathbb{R}^\star$ existovalo $\sup M$ a $\inf M$, zatímco $\max M$ a $\min M$ někdy existovalo a někdy ne. Dále, pokud existovalo $\max M$, resp. $\min M$, pak platilo $\sup M = \max M$ a $\inf M = \min M$.
2. Je-li $M \neq \emptyset$, pak platí $\inf M \leqq \sup M$. Rovnost nastane právě tehdy, je-li množina M jednoprvková.
3. Je-li $M = \emptyset$, pak platí $\inf M > \sup M$. (Protože libovolné číslo $x \in \mathbb{R}^\star$ je jak horní tak dolní závorou prázdné množiny, dostáváme $\inf \emptyset = \max \mathbb{R}^\star = +\infty$ a $\sup \emptyset = \min \mathbb{R}^\star = -\infty$.)

2.6 Existence suprema

Jak jsme viděli v předchozím příkladě, každá z uvažovaných podmnožin množiny $\mathbb{R}^\star$ měla supremum, dokonce i množina prázdná. Skutečně platí následující tvrzení:

Věta 2.20. *Každá množina $M \subset \mathbb{R}^\star$ má v $\mathbb{R}^\star$ supremum.*

Toto supremum může být buď konečné nebo nekonečné $+\infty$ resp. $-\infty$. Víme již, že supremum prázdné množiny je $-\infty$. Čím se vyznačují množiny, které mají konečné supremum, tj. $\sup M \in \mathbb{R}$? Čím se vyznačují množiny, jejichž supremum je rovno $+\infty$? Z předchozího příkladu lze usuzovat, že konečnost suprema bude souviset s tím, zda je daná množina shora ohraničená, či nikoliv. Uveďme proto definici shora a zdola ohraničených množin, abychom mohli dále diskutovat předešlé otázky.

Definice 2.21. Nechť $M \subset \mathbb{R}^\star$.

i) Existuje-li konečná horní závora množiny M, pak se množina M nazývá *shora ohraničená*.
ii) Existuje-li konečná dolní závora množiny M, pak se množina M nazývá *zdola ohraničená*.
iii) Množina M se nazývá *ohraničená*, jestliže je současně ohraničená shora i zdola.

Bod i) předchozí definice lze ekvivalentně vyjádřit takto: Množina M je shora ohraničená, právě když je $\sup M < +\infty$, tedy supremum je konečné číslo nebo $-\infty$. Přitom $\sup M = -\infty$ pouze tehdy, je-li $M = \emptyset$. Z toho vyplývá, že každá neprázdná shora ohraničená množina $M \subset \mathbb{R}^\star$ má konečné supremum, tj. $\sup M \in \mathbb{R}$. A množina M, která je neprázdná a není shora ohraničená, má supremum $\sup M = +\infty$.

Z předchozích úvah je zřejmé, že $\sup M \in \mathbb{R}$ právě tehdy, když je M neprázdná shora ohraničená množina. A to je právě axiom (A13) reálných čísel. Ještě jednou ho připomeňme:

(A13) Každá neprázdná shora ohraničená množina $M \subset \mathbb{R}$ má v $\mathbb{R}$ supremum.

Analogicky pro zdola ohraničené množiny. Bod ii) předchozí definice lze ekvivalentně vyjádřit takto: Množina M je zdola ohraničená, právě když je $\inf M > -\infty$. Tudíž každá neprázdná zdola ohraničená množina $M \subset \mathbb{R}^\star$ má konečné infimum, tj. $\inf M \in \mathbb{R}$, a každá neprázdná množina, která není zdola ohraničená, má infimum $\inf M = -\infty$.

Axiom (A13) je jediný axiom, který odlišuje reálná čísla od čísel racionálních. Množina všech racionálních čísel $\mathbb{Q}$ splňuje také axiomy (A1) – (A12) (v axiomech stačí zaměnit $\mathbb{Q}$ za $\mathbb{R}$). Poslední axiom, který platí již pouze pro $\mathbb{R}$, obdařuje $\mathbb{R}$ vlastností, která se nazývá *úplnost*. Populárně řečeno, tento axiom říká, že v $\mathbb{R}$ nejsou žádné „díry“ ani „mezery“.

Lze ukázat, že racionální i iracionální čísla jsou na číselné ose rozložená velmi *hustě*, tj. mezi každými dvěma, jakkoliv blízkými, různými reálnými čísly leží jak nekonečně mnoho racionálních, tak nekonečně mnoho iracionálních čísel.

Axiom (A13) bude pro nás mít v dalším výkladu mimořádnou důležitost. Z něj například dokážeme existenci libovolných odmocnin z kladných čísel. Abychom například definovali číslo $\sqrt{2}$, tj. kladné řešení rovnice $x^2 = 2$, položíme

$$\sqrt{2} = \sup\{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}.$$

Díky tomu, že množinu $\{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$ bereme jako podmnožinu $\mathbb{R}$ (která je navíc neprázdná a shora ohraničená), pak podle axiomu (A13) je zaručena existence suprema. Stačí tedy ukázat, že toto supremum splňuje rovnici $x^2 = 2$, tj. $(\sqrt{2})^2 = 2$.

Uvědomte si, že množina $\{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$ má supremum v $\mathbb{R}$, ale nemá supremum v $\mathbb{Q}$. To je také důvodem toho, proč pracujeme právě s reálnými čísly a ne například s čísly racionálními.

Obecná mocnina

Ukažme si dále, jak využijeme axiomu (A13) k definici mocniny a^r, kde $a \in \mathbb{R}^+$, $r \in \mathbb{R}$.

1. Pro $n \in \mathbb{N}$ je symbol a^n je zkráceným zápisem pro součin $\underbrace{a \cdots a}_{n\text{-krát}}$. Podobně symbol a^{-n} značí podíl $1/a^n$. Dále víme, že pro $n \in \mathbb{N}$, $n \geqq 2$, symbol $a^{\frac{1}{n}}$ značí n-tou odmocninu z čísla a, tj. $\sqrt[n]{a}$. Kombinací těchto označení se na střední škole zavádí tzv. *mocnina s racionálním exponentem*: pro $m \in \mathbb{Z}$ a $n \in \mathbb{N}$, $n \geqq 2$, je $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$. Máme tedy definován symbol a^r pro libovolné racionální číslo $r = m/n$ (připomeňme, že $a^0 = 1$). S použitím známých vzorců pro úpravy odmocnin například máme
$$27^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{27^2} = 9, \qquad 4^{-\frac{5}{2}} = \sqrt{4^{-5}} = \sqrt{\frac{1}{4^5}} = \frac{1}{32} \qquad \text{atd.}$$
Pro mocniny s racionálním exponentem se odvozuje řada početních pravidel. Zejména platí: $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$, $a^r/a^s = a^{r-s}$, $(a^r)^s = a^{rs}$ pro libovolná racionální r, s. Dále pro $r < s$ a $a > 1$ je $a^r < a^s$ a pro $0 < a < 1$ je $a^r > a^s$.
2. Nyní s pomocí axiomu (A13) rozšíříme definici symbolu a^r pro libovolné reálné, tedy i iracionální r.
Nechť $r \in \mathbb{I}$, $a > 1$. Vezmeme množinu $A \subset \mathbb{Q}$ všech racionálních čísel s menších než dané číslo r. Snadno se ověří, že množina čísel a^s, $s \in A$, s racionálními exponenty je shora ohraničená (je-li $t > r$, t racionální, je a^t horní závora). Supremum množiny všech těchto čísel (podle zmíněné věty existuje) označíme a^r. Tedy
$$a^r = \sup\{a^s : s < r, s \in \mathbb{Q}\}.$$
Pro $r \in \mathbb{I}$, $0 < a < 1$ se postupuje obdobně, jen se použije infimum (jestliže se s zvětšuje, pak se a^s zmenšuje).

Čím je racionální číslo s bližší iracionálnímu číslu r, tím je hodnota a^s lepší aproximací hodnoty a^r. Např. pro $a = 3$ a $r = \sqrt{2} = 1{,}414\,213\ldots$ můžeme zvolit $s = 1{,}4 = 7/5$. Je tedy $3^{\sqrt{2}} \doteq 3^{7/5} = \sqrt[5]{3^7}$. Zvolíme-li $s = 1{,}41 = 141/100$, dostaneme lepší aproximaci $3^{\sqrt{2}} \doteq 3^{141/100} = \sqrt[100]{3^{141}}$. Tak můžeme mocninu s iracionálním mocnitelem aproximovat s libovolnou přesností mocninou s racionálním mocnitelem.

Důležité:
Pro takto definované mocniny a^r s libovolným reálným mocnitelem r lze dokázat, že platí stejná početní pravidla a nerovnosti, která byla výše uvedena pro racionální mocnitele. Od této chvíle pro nás mají tudíž smysl výrazy jako 2^{π}, $\pi^{\sqrt{2}}$, $\left(\sqrt{2}\right)^{-\sqrt{3}}$ atd.

2.7 Matematická indukce

V předchozím textu jsme axiomaticky zavedli množinu reálných čísel $\mathbb{R}$. Podívejme se nyní, jak lze definovat další známé číselné množiny — $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ a $\mathbb{Q}$.

Na otázku, co je množina přirozených čísel $\mathbb{N}$, zřejmě všichni odpoví, že je to množina obsahující prvky $1, 2, 3, 4, 5, \dots$, tj.

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}.$$

Zamyslíme-li se o něco déle, řekneme, že $\mathbb{N}$ je množina, pro kterou platí: $1 \in \mathbb{N}$ a s každým $n \in \mathbb{N}$ také $n+1 \in \mathbb{N}$. Tato podmínka však sama o sobě nestačí, neboť ji splňují i mnohem širší množiny, například i množina racionálních čísel $\mathbb{Q}$ nebo množina reálných čísel $\mathbb{R}$. Snadno se ověří, že průnik libovolného systému množin splňujících tuto podmínku je opět množina splňující uvedenou podmínku. Zřejmě množina přirozených čísel $\mathbb{N}$ je nejmenší množina s touto vlastností.

Definice 2.22. Množina $A \subset \mathbb{R}$, pro kterou platí

i) $1 \in A$,
ii) pro každé $n \in A$ platí $n + 1 \in A$.

se nazývá *induktivní*.
Průnik všech induktivních podmnožin $\mathbb{R}$ nazýváme *množinou přirozených čísel* a značíme $\mathbb{N}$.

Nyní, máme-li zavedené množiny $\mathbb{N}$ a $\mathbb{R}$, lze jednoduše definovat zbývající číselné množiny takto:

$$\mathbb{Z} = \{x \in \mathbb{R}\colon\ (x \in \mathbb{N}) \vee (x = 0) \vee (-x \in \mathbb{N})\},$$
$$\mathbb{Q} = \{x \in \mathbb{R}\colon\ x = \tfrac{m}{n},\ m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}\}.$$

Věnujme se dále pouze množině přirozených čísel. Množinu $\mathbb{N}$ jsme definovali jako nejmenší množinu splňující podmínky i) a ii). To znamená, že pokud nějaká množina $M \subset \mathbb{N}$ splňuje podmínky i) a ii), pak musí nutně platit $M = \mathbb{N}$. Tohoto faktu se využívá při důkazech vztahů (vzorců, rovností) platících pro všechna přirozená čísla.

Předpokládejme například, že zkoumáme součty lichých přirozených čísel a všimli jsme si určité zákonitosti:

$$\begin{aligned}
1 + 3 &= 4 = 2^2,\\
1 + 3 + 5 &= 9 = 3^2,\\
1 + 3 + 5 + 7 &= 16 = 4^2,\\
1 + 3 + 5 + 7 + 9 &= 25 = 5^2
\end{aligned}$$

atd. Zdá se, že by obecně mohla platit následující rovnost (označme ji $P(n)$):

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2.$$

Podaří se nám dokázat platnost hypotézy, že rovnost $P(n)$ platí pro každé přirozené číslo n? Můžeme nyní vzít počítač a ověřit platnost rovnosti $P(n)$ pro všechna n od jedné až do miliardy. Ovšem tyto numerické výpočty, které platnosti hypotézy nasvědčují, samy o sobě žádným důkazem nejsou. Ve skutečnosti se již mnohokrát stalo, že se platnost řádově miliardy dílčích případů ukázala jako nespolehlivá informace. Problém spočívá v tom, že dokazovaná vlastnost musí platit pro nekonečně mnoho přirozených čísel. Tuto vlastnost nelze ověřit výčtem jednotlivých případů.

A zde se dostává ke slovu matematická indukce, která je jedním z nejmocnějších matematických nástrojů. Dovoluje nám totiž odvodit obecnou platnost určitého tvrzení pro všechna přirozená čísla, pokud dokážeme platnost pouze dvou stanovených kroků. Shrňme tyto poznatky do následující věty.

Věta 2.23 (princip matematické indukce). *Nechť je dána množina $M \subset \mathbb{N}$ taková, že platí:*

i) $1 \in M$,
ii) *pro každé* $n \in M$ *platí* $n + 1 \in M$.

Pak $M = \mathbb{N}$.

Příklad 2.24. Pomocí matematické indukce dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2.$$

Řešení. Označme $M = \{k \in \mathbb{N} \colon 1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) = k^2\}$. Pak:

i) $1 \in M$, neboť platí $1 = 1^2$.
ii) Předpokládejme, že $n \in M$, tj. platí $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 3) + (2n - 1) = n^2$, a ukažme, že potom $n + 1 \in M$. Chceme tedy ukázat platnost vztahu

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2(n + 1) - 3) + (2(n + 1) - 1) = (n + 1)^2.$$

Při důkazu vyjdeme z levé strany rovnosti, kterou za pomoci předpokladu, že $n \in M$, postupně upravíme na požadovaný tvar:

$$\begin{aligned} L &= 1 + 3 + 5 + \cdots + (2(n + 1) - 3) + (2(n + 1) - 1) = \\ &= 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) + (2n + 1) = \\ &= n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2 = P. \end{aligned}$$

To znamená, že i $n + 1 \in M$, a tudíž $M = \mathbb{N}$. Tedy zmíněná rovnost platí pro všechna přirozená čísla. ▲

V předchozím příkladu jsme na základě důkazů dvou dílčích tvrzení dokázali platnost rovnosti $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$ pro nekonečně mnoho přirozených čísel a můžeme s absolutní jistotou říci, že každá taková rovnost platí.

Příklad 2.25. Užitím matematické indukce dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2.$$

Řešení. Označme $M = \left\{k \in \mathbb{N}\colon\ 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3 = \frac{1}{4}k^2(k+1)^2\right\}$.

i) $1 \in M$, neboť platí $1^3 = \frac{1}{4} \cdot 1^2 \cdot (1+1)^2$.

ii) Předpokládejme, že $n \in M$, tj. platí $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$, a ukažme, že pak $n+1 \in M$. Chceme tedy ukázat platnost vztahu

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 + (n+1)^3 = \frac{1}{4}(n+1)^2(n+2)^2.$$

Při důkazu vyjdeme z levé strany rovnosti, kterou za pomoci předpokladu, že $n \in M$, postupně upravíme na požadovaný tvar

$$L = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 + (n+1)^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 + (n+1)^3 =$$
$$= \frac{1}{4}(n+1)^2[n^2 + 4(n+1)] = \frac{1}{4}(n+1)^2(n^2 + 4n + 4) = \frac{1}{4}(n+1)^2(n+2)^2 = P.$$

To znamená, že i $n+1 \in M$, a tudíž $M = \mathbb{N}$. Tedy zmíněná rovnost platí pro všechna přirozená čísla, což jsme chtěli dokázat. ▲

2.8 Kartézský součin a zobrazení

V matematice, stejně jako v běžném životě, je někdy třeba sdružovat objekty do dvojic.

Představme si množinu hráčů nějakého turnaje. Vylosujeme dvojici hráčů, kteří se utkají spolu. V některých sportech (např. běhu) nezáleží na tom, kdo byl vylosován jako první a kdo druhý. Naopak, u některých her (např. šachu), může rozlosování hráčů hrát značnou roli. Losujeme totiž nejen kdo hraje s kým, ale i kdo má bílé figurky, a tedy zahajuje hru. V prvním případě se jedná o neuspořádané dvojice, v druhém případě o uspořádané dvojice.

Uspořádaná dvojice prvků (x, y) je tedy dvojice prvků x, y, přičemž prvek x je první a y druhý (záleží na pořadí prvků) a zřejmě $(x, y) \neq (y, x)$ pro $x \neq y$. Tím se uspořádaná dvojice liší od dvouprvkové množiny $\{x, y\}$, neboť u množin nezáleží na pořadí prvků, tj. $\{x, y\} = \{y, x\}$.

Přísně matematicky definujeme uspořádanou dvojici (x, y) jako množinu, jejímiž prvky jsou jednoprvková množina $\{x\}$ a dvouprvková množina $\{x, y\}$, tj.

$$(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\},$$

přičemž jednoprvková množina obsahuje první prvek uspořádané dvojice. Pak má smysl pojem rovnosti uspořádané dvojice, neboť zápis $(x, y) = (z, u)$ je vlastně rovností dvou množin.

Na základě pojmu uspořádané dvojice budeme nyní definovat tzv. kartézský součin množin, jenž je jedním ze základních pojmů v celé matematice. Uvidíme, že na pojmu kartézského součinu jsou založeny důležité pojmy zobrazení a funkce.

Definice 2.26. Nechť A, B jsou množiny. *Kartézským součinem množin A a B* nazýváme množinu všech uspořádaných dvojic (x, y) takových, že $x \in A$ a $y \in B$. Značíme jej $A \times B$. Tedy
$$A \times B = \{(x, y) : x \in A \wedge y \in B\}.$$

Uvažujme například množiny $A = \{1, 2, 3\}$ a $B = \{-1, 0\}$. Pak

$$A \times B = \{(1, -1), (1, 0), (2, -1), (2, 0), (3, -1), (3, 0)\}$$

a

$$B \times A = \{(-1, 1), (-1, 2), (-1, 3), (0, 1), (0, 2), (0, 3)\},$$

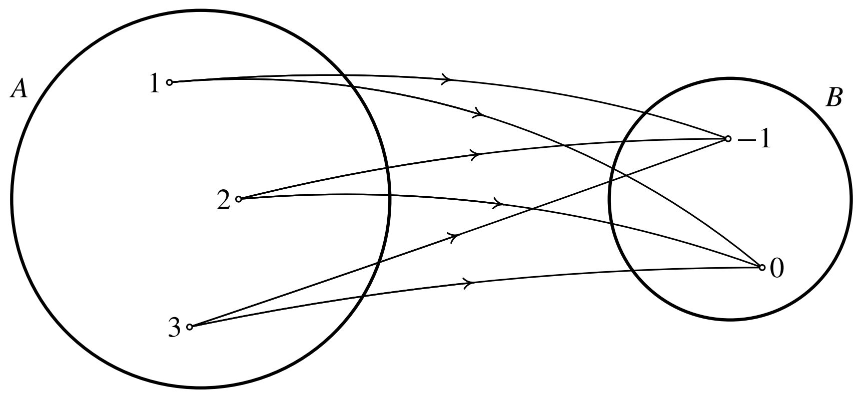
tedy obecně $A \times B$ a $B \times A$ jsou různé množiny. Lze ukázat, že $A \times B = B \times A$ právě tehdy, když $A = B$ nebo $A = \emptyset$ nebo $B = \emptyset$. Pro úplnost poznamenejme, že $A \times \emptyset = \emptyset \times A = \emptyset$.

Uvedeme nyní několik způsobů *znázornění kartézského součinu*.

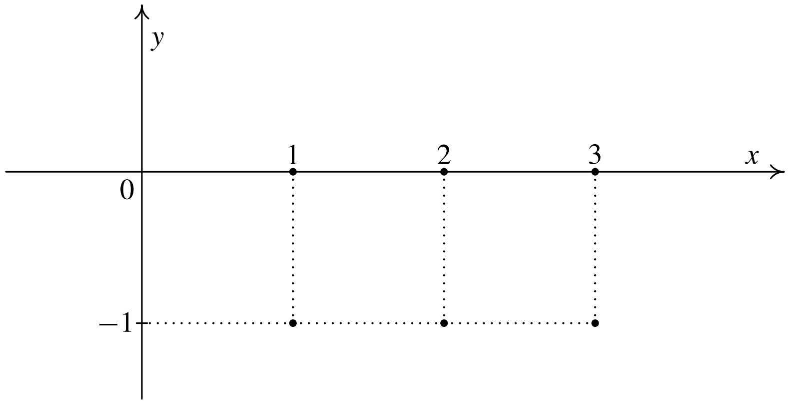
a) Jsou-li A a B konečné a malé, můžeme $A \times B$ znázornit pomocí *tabulky*. Např. pro $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{-1, 0\}$ — viz předchozí příklad — je podoba tabulky následující:

$A \backslash B$	-1	0
1	$(1, -1)$	$(1, 0)$
2	$(2, -1)$	$(2, 0)$
3	$(3, -1)$	$(3, 0)$

b) Výhodné (především pro zavedení pojmu zobrazení) je znázornění pomocí *šipek*, kdy dvojici (x, y) znázorníme jako šipku z x do y. Pro předchozí příklad dostaneme:



c) Jsou-li A a B číselné množiny, můžeme uspořádanou dvojici (x, y) zobrazit jako *bod v rovině*. Čísla x a y pak mají význam souřadnic. Tento způsob budeme používat nejčastěji. Pro předchozí příklad dostaneme:



Tím vlastně zavádíme kartézskou[1] soustavu souřadnic v rovině. Každému bodu roviny odpovídá uspořádaná dvojice reálných čísel, které udávají souřadnice tohoto bodu.

Dalším velmi důležitým pojmem je *zobrazení*. Na střední škole se většinou definuje zobrazení takto: Nechť jsou dány množiny A a B. Předpokládejme, že je dáno pravidlo, podle kterého je každému prvku x z množiny A přiřazen právě jeden prvek y z množiny B. Potom řekneme, že je definováno zobrazení f množiny A do množiny B.

Potíž je však v použití nedefinovaného pojmu „pravidlo“. Nové pojmy lze definovat pouze na základě již dříve definovaných pojmů. Proto je následující definice zobrazení postavena na množinových pojmech.

Definice 2.27. *Zobrazením f množiny A do množiny B* nazýváme takovou podmnožinu kartézského součinu $A \times B$ ($f \subset A \times B$), že platí: ke každému prvku x množiny A existuje právě jeden prvek y z množiny B takový, že $(x, y) \in f$, tj.

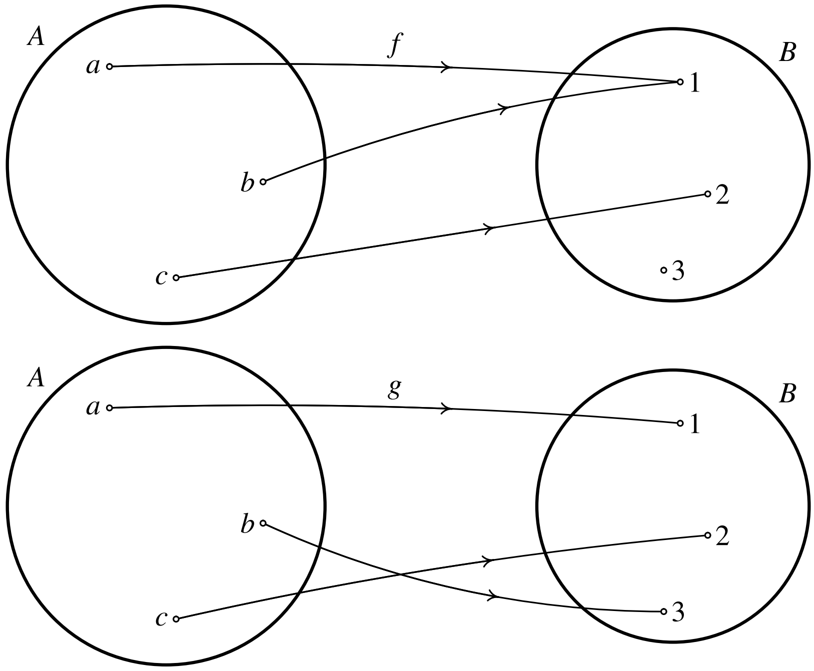
$$\forall x \in A\ \exists!\, y \in B : (x, y) \in f.$$

Příklad 2.28. Nechť $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ a $f, g \subset A \times B$ jsou znázorněny na obrázku 2.1. Ověřte, že jde o zobrazení.

Příklad 2.29. Nechť $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{3, 4\}$. Určete, zda jsou následující množiny zobrazeními množiny A do množiny B.

1. $f = \{(0, 3), (1, 3), (2, 3)\}$,
2. $g = \{(0, 3), (1, 3), (1, 4), (2, 4)\}$,
3. $h = \{(0, 3), (1, 4)\}$,
4. $u = \{(0, 3), (1, 4), (3, 4)\}$.

[1]Kartézská soustava souřadnic se nazývá podle svého objevitele, slavného francouzského filosofa a matematika Reného Descarta (1596–1650). Latinský přepis jeho jména totiž zní Cartesius. Zavedením souřadnic založil analytickou geometrii, která umožňuje řešit geometrické problémy výpočtem, nikoliv jen konstrukcí.



Obr. 2.1

Řešení.

1. f je zobrazení A do B, protože $f \subset A \times B$ a k prvku 0 existuje právě jeden prvek množiny B (a to prvek 3) tak, že $(0, 3) \in f$. Obdobně pro prvky 1 a 2 množiny A.
2. g není zobrazení A do B, protože k prvku 1 množiny A existují prvky 3 a 4 z množiny B takové, že $(1, 3) \in g$ a zároveň $(1, 4) \in g$.
3. h není zobrazení A do B, protože k prvku 2 množiny A není přiřazen žádný prvek množiny B.
4. u není zobrazení A do B, protože $(3, 4) \notin A \times B$. ▲

V případě, že $f \subset A \times B$ je zobrazení a množiny A, B jsou číselné množiny (nebo aspoň množina B), používáme často místo pojmu zobrazení pojem *funkce*. Například zobrazení množiny A do množiny B, kde

- $A \subset \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R}$ nazýváme *reálnou funkcí jedné reálné proměnné*,
- $A \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R}$ nazýváme *reálnou funkcí dvou reálných proměnných*,
- $A \subset \mathbb{R}$, $B = \mathbb{C}$ nazýváme *komplexní funkcí reálné proměnné*,
- $A = \mathbb{N}$, $B = \mathbb{R}$ nazýváme *posloupností reálných čísel*.

Tím jsme matematicky upřesnili pojem funkce, který byl intuitivně popsán v úvodu na str. 2.

2.9 O logické výstavbě matematiky

Vraťme se nyní na chvíli k definici uspořádané dvojice. Jsou-li x, y dva prvky, pak uspořádanou dvojicí (x, y) rozumíme množinu $\{\{x\}, \{x, y\}\}$. Uvědomte si, že tato množina je při $x \neq y$ dvouprvková a při $x = y$ jednoprvková. Tedy pojem uspořádané dvojice jsme převedli na pojmy jednoprvková a dvouprvková množina. Přitom jednoprvková množina $\{x\}$ je množina, do níž patří prvek x a nepatří žádný jiný prvek, a dvouprvková množina $\{x, y\}$ je množina, do níž patří prvek x a prvek y a nepatří žádný jiný prvek. Tím jsme převedli pojem uspořádané dvojice na tři základní pojmy: „množina“, „prvek“ a pojem „být prvkem nějaké množiny“.

To, co jsme nyní uvedli, je společným znakem všech definic. Nový pojem je definován pomocí jednoho nebo několika jednodušších (již dříve definovaných) pojmů. Z faktu, že každá definice převádí definovaný pojem na jednodušší pojmy, plyne ta nepříjemná skutečnost, že mezi všemi pojmy vyšetřovanými v dané teorii existuje jeden nebo několik pojmů, které definovány nejsou. Kdyby totiž měl každý pojem definici, pak by byl systém definic nekonečný nebo by se vyskytovala definice kruhem, tj. pojem R by byl definován pomocí pojmu T a naopak pojem T pomocí pojmu R. Snaha je, aby takových nedefinovaných (primitivních) pojmů bylo co nejméně, byly co nejjednodušší a aby pomocí nich bylo možno definovat každý jiný pojem dané teorie.

Ukázali jsme, že pojem uspořádané dvojice lze převést na tři základní pojmy: „množina“, „prvek“ a pojem „být prvkem nějaké množiny“. Již jsme se zmínili o tom, že tyto pojmy jsou primitivními pojmy teorie množin a pomocí nich lze definovat ostatní pojmy. Viděli jsme například, že funkce je speciální případ zobrazení, zobrazení je podmnožinou kartézského součinu, kartézský součin je množinou uspořádaných dvojic a uspořádaná dvojice je definována pomocí primitivních pojmů.

Již Aristoteles vyslovil myšlenku, jak budovat nějakou vědeckou teorii.

1. Na počátku uvedeme *axiomy*, tj. výroky, jejichž pravdivost se předpokládá. V axiomech se vyskytují tzv. primitivní pojmy, které nedefinujeme. Axiomy vypovídají o primitivních pojmech vše, co je možno říci.
2. Pak následují *věty*, tj. pravdivé výroky, které lze odvodit pomocí pravidel logiky z axiomů nebo z vět předcházejících. Nedílnou součástí každé věty je její *důkaz*.
3. Další pojmy zavádíme pomocí *definic*, přičemž definice je vymezením obsahu a rozsahu nového pojmu.

Poznamenejme, že z hlediska vybudování nějaké matematické teorie je stanovení množiny axiomů to nejdůležitější. Na množině axiomů je závislá funkčnost celého systému (odvozování a dokazování dalších tvrzení). Jeden nevhodný axiom způsobí nepoužitelnost celého systému. Jakmile máme stanoveny axiomy, vše se dále odvíjí na základě logických důkazů, které se provádí v čistě abstraktním prostředí.

Definice mají z logického hlediska vždy tvar ekvivalence. Je-li $\alpha \Leftrightarrow \beta$ definice, pak α představuje nový pojem a β vymezení obsahu a rozsahu tohoto nového pojmu. Přitom β musí obsahovat pouze „známé“ pojmy.

Věty mají z pohledu logiky tvar implikace nebo ekvivalence. Protože však lze každou ekvivalenci převést na implikaci, stačí se omezit na věty ve tvaru implikace. Jestliže $\alpha \Rightarrow \beta$ je věta, potom α jsou *předpoklady* věty a β *tvrzení* věty. Slovně takovou větu vyjádříme některým z následujících způsobů:

Nechť platí α. Potom platí β.
Jestliže platí α, potom platí β.
Když platí α, pak platí β.

Již jsme uvedli, že nedílnou součástí každé věty je její důkaz. Důkazem rozumíme logické deduktivní odvození výroku z jiných pravdivých výroků. Používáme následující typy důkazů: Přímý důkaz, nepřímý důkaz, důkaz sporem a důkaz matematickou indukcí. Ukažme si postupně princip těchto důkazů.

Uvažujme větu $\alpha \Rightarrow \beta$.

1. *Přímý důkaz* vychází z pravdivosti předpokladů α a má tvar řetězce na sebe navazujících implikací, tj.
$$\alpha \Rightarrow \gamma_1 \Rightarrow \gamma_2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow \gamma_n \Rightarrow \beta.$$
2. *Nepřímý důkaz* využívá vztahu
$$(\alpha \Rightarrow \beta) \Leftrightarrow (\neg\beta \Rightarrow \neg\alpha).$$
Vyjdeme z $\neg\beta$ a přímým důkazem dokážeme $\neg\alpha$, tj.
$$\neg\beta \Rightarrow \delta_1 \Rightarrow \delta_2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow \delta_n \Rightarrow \neg\alpha.$$
3. *Důkaz sporem* využívá vztahu
$$(\alpha \Rightarrow \beta) \Leftrightarrow \neg(\alpha \wedge \neg\beta).$$
Chceme tedy ukázat, že není pravda, že platí α a zároveň neplatí β. Předpokládáme tedy současnou platnost α a $\neg\beta$ a postupně dojdeme k tzv. sporu. Spor je stav, kdy pro nějakou formuli γ ukážeme, že současně platí γ a $\neg\gamma$
4. *Důkaz matematickou indukcí* jsme dostatečně popsali v oddílu 2.7.

Pro zájemce:

O logické výstavbě matematiky a především teorie množin by bylo možno hovořit velmi dlouho. Zajímavé jsou především otázky bezespornosti a úplnosti teorie množin. *Bezespornost* znamená, že nelze dospět ke sporu, tj. nelze dokázat zároveň nějaký výrok i jeho negaci. *Úplnost* znamená, že libovolný výrok této teorie lze buď dokázat nebo vyvrátit. Snahou tedy bylo najít takový systém axiomů teorie množin, který by byl bezpodmínečně bezesporný a pokud možno úplný. Mnoho matematiků se snažilo dokázat bezespornost systému axiomů teorie množin.

Velmi významné výsledky v této oblasti přinesl rakouský matematik (rodák z Brna) Kurt Gödel (1906–1978). Dokázal dvě tzv. *věty o neúplnosti*. Z první vyplývá, že systém axiomů libovolné tzv. rekursivně axiomatizovatelné matematické teorie, v níž se dá vybudovat aritmetika přirozených čísel (taková je např. teorie množin), je buď sporný, nebo neúplný. Předpokládáme-li tedy, že je daný systém bezesporný, pak je neúplný, tj. existuje tvrzení, které nelze logickou dedukcí vyvodit z axiomů (nelze ho dokázat ani vyvrátit).

Z druhé věty vyplývá, že postulát bezespornosti axiomů teorie množin je nedokazatelné tvrzení v rámci teorie množin. Tedy důkaz bezespornosti systému axiomů teorie množin by musel být proveden v rámci nějaké jiné teorie.

Stručně řečeno, nezbývá nám než věřit, že systém axiomů je bezesporný, a smířit se s tím, že vždy budou existovat tvrzení, která z axiomů nedokážeme.

Tyto nedostatky však nic neubírají na významu teorie množin, neboť Gödelova věta o neúplnosti zároveň říká, že žádná teorie nemůže nahradit teorii množin v těch směrech, kde teorie množin zklamává. Zájemce o tuto zajímavou, ale nesmírně složitou a abstraktní problematiku (Gödelovy výsledky bývají považovány za jeden z vrcholných výsledků lidského rozumu) odkazujeme na publikace [2] a [6], které nevyžadují žádné speciální matematické znalosti a velmi poutavě o této problematice hovoří.

S jistou nadsázkou citujme z [1]:

„*Kdybychom tedy měli definovat náboženství jako systém myšlení, který obsahuje neprokazatelná tvrzení, čímž obsahuje element víry, pak podle Gödela nejenže je matematika náboženstvím, ale je to také jediné náboženství, které to o sobě může dokázat.*“

Na závěr poznamenejme, že matematická logika má velmi blízko k informatice a bude jí proto věnován samostatný předmět. Hodně se využívá např. v oblasti umělé inteligence. Také teorie vyčíslitelnosti a složitosti, jenž vznikla ve 30. letech 20. století, byla významně ovlivněna Gödelovými výsledky.

Σ

Pojmy k zapamatování

— výrok,

— kvantifikátor,

— horní a dolní závora množiny,

— supremum a infimum množiny,

— ohraničená množina,

— axiom (A13) o supremu,

— princip matematické indukce,

— kartézský součin,

— zobrazení.

Průvodce studiem

Právě jste dočetli kapitolu 2, v níž byly shrnuty a připomenuty základní pojmy, s nimiž budeme dále pracovat. Mezi nejobtížnější části jistě patřily partie týkající se suprema a infima podmnožin rozšířené množiny reálných čísel. Tyto pojmy je třeba pořádně promyslet.

Při studiu matematiky je podstatné, abyste každé definici dobře porozuměli. Neměli byste se ji jen bezmyšlenkovitě naučit, ale měli byste si ji „vyzkoušet“ na *zvolených příkladech. Třeba tak, že budete hledat příklady objektů, které ji splňují, a také příklady objektů, které jí nevyhovují. Učit se definice zpaměti a nerozumět jim nemá vůbec žádný smysl. Pozor, ať se nedostanete do situace, kdy sice čtete stránku 35, ale vůbec nevíte, co je na stranách předcházejících. To si ostatně můžete nyní ověřit. Čekají vás kontrolní otázky a příklady k procvičení.*

Kontrolní otázky

?

1. Jak jsou definovány sjednocení, průnik a rozdíl množin A a B?
2. Co se rozumí výrokem a jeho pravdivostní hodnotou?
3. Jaký výrok nazýváme hypotézou?
4. Které jsou základní logické spojky?
5. Jak lze z výrokové formy vytvořit výrok?
6. Udejte příklad množiny $M \subset \mathbb{R}^\star$, jejíž supremum v $\mathbb{R}^\star$ neexistuje.
7. Udejte příklad množiny M takové, že platí $\sup M = \max M$.
8. Objasněte rozdíl mezi množinou všech racionálních čísel a množinou všech reálných čísel.
9. Platí vždy vztah $\inf M \leqq \sup M$?
10. Udejte příklad množiny M takové, že platí $\inf M = \sup M$.
11. Jaké znáte základní druhy důkazů matematických vět?

Příklady k procvičení

!

1. Určete výčtem prvků množinu M všech přirozených čísel, která jsou dělitelná číslem 8 a zároveň jsou větší než 5 a menší než 50.

2. Určete minimum, maximum, infimum a supremum následujících množin:

   a) $A = (0, 5) \cup \{7\} \cup (8, 9\rangle$,
   b) $B = \mathbb{Q}$,
   c) $C = \{n!, n \in \mathbb{N}\}$,
   d) $D = (-\infty, -3) \cup (5, \infty)$,
   e) $E = \{x \in \mathbb{R} : x^2 > 4\}$,
   f) $F = \{x \in \mathbb{R} : 6x - x^2 - 9 < 0\}$.

3. Jsou dány množiny $A = \{1, 2\}$, $B = \{x \in \mathbb{N}, x < 4\}$. Určete výčtem prvků kartézské součiny $A \times B$ a $B \times A$.

4. Užitím matematické indukce dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí:

   a) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$,
   b) $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$,
   c) $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$.

5. Najděte chybu v následující úvaze:
   Uvažujme rovnici
   $$x = y.$$
   Vynásobíme obě strany rovnice číslem x. Dostaneme
   $$x^2 = xy.$$
   Pak k oběma stranám rovnice přičteme $x^2 - 2xy$:
   $$x^2 + x^2 - 2xy = xy + x^2 - 2xy.$$
   To lze upravit na tvar
   $$2(x^2 - xy) = x^2 - xy.$$
   Nakonec vydělíme obě strany rovnice výrazem $x^2 - xy$ a dostaneme
   $$2 = 1.$$

*****

Nedomnívejte se, že znáte fakt, víte-li jen, že se stal, ale nevíte, jak se stal.

(J. S. Blackie)

*****

Kapitola 3

Reálné funkce jedné reálné proměnné

Průvodce studiem

Již v úvodní kapitole jsme se zmínili o tom, že základním objektem, který je zkoumán diferenciálním počtem, je funkce. Nyní tento pojem upřesníme a všimneme si základních vlastností funkcí a základních operací, které lze s funkcemi provádět.

Z hlediska historie matematiky trvalo dosti dlouho, než se dospělo k dnešnímu chápání funkce. V době, kdy byl vytvořen diferenciální počet, se uvažovaly pouze reálné nebo komplexní funkce a funkce musela být vyjádřena nějakým vzorcem nebo součtem nekonečné řady. Příkladem jsou funkce dané předpisy $f(x) = x^3 - 2$, $f(x) = \ln \sin x$ *nebo* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(x^n/n!)$. *Dnes funkci chápeme obecněji jako jistou podmnožinu kartézského součinu. Funkcí tedy budeme rozumět jednak funkce výše zmíněného typu, ale i mnohem obecnější množiny bodů. Například* $f = \{(1, 2), (-3, 8)\}$ *je funkce, která přiřazuje číslu* 1 *číslo* 2 *a číslu* -3 *přiřazuje číslo* 8 *a jejímž grafem jsou dva izolované body. Tedy reálná funkce může přiřazovat každému reálnému číslu nějaké zcela libovolné reálné číslo. Poznamenejme však, že funkce, se kterými budeme pracovat my, budou převážně právě ony „pěkné“ funkce — tak, jak je chápali matematikové 17. a 18. století.*

Protože v této chvíli ještě nemáme k dispozici dostatek konkrétních funkcí, budeme ilustrovat nové pojmy na velmi jednoduchých příkladech. Obtížnější příklady jsou pak zařazeny do další kapitoly Elementární funkce.

Cíle

Po prostudování této kapitoly byste měli být schopni definovat a pomocí obrázků vysvětlit následující pojmy:

- funkce, definiční obor a obor hodnot funkce, graf funkce,
- funkce zdola, shora ohraničená,
- funkce rostoucí, klesající, nerostoucí, neklesající, monotónní,
- funkce prostá,

- funkce sudá, lichá, periodická,
- funkce složená a inverzní.

Přistupme nyní k definici pojmu funkce.

Definice 3.1. Nechť $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$. Zobrazení f množiny A do množiny $\mathbb{R}$ ($f: A \to \mathbb{R}$) nazýváme *reálnou funkcí jedné reálné proměnné* (dále jen *funkcí*). Množina A se nazývá *definiční obor* funkce f a značí se $D(f)$.

Podle definice 3.1 tedy je funkce zobrazením množiny $A \subset \mathbb{R}$ do množiny $\mathbb{R}$. Toto zobrazení je podle definice 2.27 takovou podmnožinou kartézského součinu $A \times \mathbb{R}$, že platí: ke každému prvku $x \in A$ existuje právě jeden prvek $y \in \mathbb{R}$ takový, že $(x, y) \in f$.

Úmluva: Dále budeme místo zápisu $(x, y) \in f$ používat pružnější označení $y = f(x)$. Říkáme, že *funkce f přiřazuje prvku x prvek y* nebo že *y je hodnotou funkce f v bodě x*.

Množinu všech takových $y \in \mathbb{R}$, k nimž existuje $x \in D(f)$ tak, že $y = f(x)$, pak nazýváme *obor hodnot* funkce f a označujeme $H(f)$. Tj.

$$H(f) = \{y \in \mathbb{R} : \exists x \in D(f) \text{ takové, že } y = f(x)\}.$$

Zadání funkce

K zadání funkce f je nutné uvést jednak definiční obor $D(f)$ a jednak pravidlo (předpis), pomocí něhož je každému $x \in D(f)$ přiřazen právě jeden prvek $y \in H(f)$.

Ukažme si, s jakými formami zápisu konkrétní funkce se můžeme setkat. Například funkci f, která každému $x \in \langle -2, 5\rangle$ přiřazuje číslo $x^2 + 1$, lze zapsat takto:

$$\begin{aligned} &f: \; y = x^2 + 1, \; x \in \langle -2, 5\rangle, \\ &f(x) = x^2 + 1, \; x \in \langle -2, 5\rangle, \\ &f: \; x \mapsto x^2 + 1, \; x \in \langle -2, 5\rangle. \end{aligned}$$

Často se stává, že je funkce zadána pouze předpisem a definiční obor není výslovně uveden. Pak pokládáme za definiční obor množinu všech takových $x \in \mathbb{R}$, pro která má daný předpis „smysl".

Poznámka 3.2. Je-li funkce zadána jedním z předchozích tří způsobů, říkáme že je zadána *explicitně*. Kromě toho lze funkci zadat *parametricky* rovnicemi $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ nebo *implicitně* rovnicí $F(x, y) = 0$ (podmínky, za kterých je rovnicí $F(x, y) = 0$ skutečně dána nějaká funkce, budeme vyšetřovat v diferenciálním počtu funkcí více proměnných). Nyní se budeme zabývat pouze funkcemi zadanými explicitně. Nakonec poznamenejme, že v experimentálních úlohách se často funkce zadává slovně, tabulkou funkčních hodnot nebo prostřednictvím grafu.

Rovnost funkcí

Z definice 3.1 plyne, že dvě funkce f a g jsou si rovny (píšeme $f = g$) právě tehdy, když mají stejný definiční obor a v každém bodě tohoto definičního oboru platí $f(x) = g(x)$. Symbolicky zapsáno:

$$(f = g) \quad \Leftrightarrow \quad [(D(f) = D(g)) \wedge (\forall x \in D(f)\colon\ f(x) = g(x))]$$

Příklad 3.3. Rozhodněte, zda se následující funkce rovnají

$$f\colon\ y = x + 1,\ x \in (-\infty, 0); \qquad g\colon\ y = \frac{x^2 - 1}{x - 1},\ x \in (-\infty, 0).$$

Řešení. Definiční obory zadaných funkcí se rovnají a pro každé $x \in (-\infty, 0)$ platí

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1.$$

Tedy pro každé $x \in (-\infty, 0)$ platí $f(x) = g(x)$. Proto $f = g$. ▲

Příklad 3.4. Rozhodněte, zda se následující funkce rovnají

$$f\colon\ y = 2 \ln x; \qquad g\colon\ y = \ln x^2.$$

Řešení. Funkce je zadána pouze předpisem, definiční obor je tedy množina takových $x \in \mathbb{R}$, pro která má daný předpis smysl.

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R}\colon\ 2 \ln x \text{ „má smysl“}\} = \{x \in \mathbb{R}\colon\ x > 0\} = (0, \infty).$$

$$D(g) = \{x \in \mathbb{R}\colon\ \ln x^2 \text{ „má smysl“}\} = \{x \in \mathbb{R}\colon\ x^2 > 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Definiční obory $D(f) = (0, \infty)$, $D(g) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ se nerovnají, tedy se nerovnají ani zadané funkce. ▲

Graf funkce

U reálných funkcí jedné proměnné hraje velkou roli grafické znázornění funkce. To samozřejmě souvisí s geometrickou interpretací pojmů uspořádaná dvojice, kartézský součin atd.

Geometricky lze uspořádanou dvojici (x, y) chápat jako bod o souřadnicích x a y. Libovolnou množinu uspořádaných dvojic lze pak geometricky chápat jako množinu bodů v rovině. Všimněme si s pomocí následující tabulky rozdílu mezi „množinovým a geometrickým chápáním“ téhož zápisu.

	množinově	geometricky
$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon\ x^2 + y^2 = 1\}$	množina uspořádaných dvojic $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ takových, že platí $x^2 + y^2 = 1$,	množina bodů (x, y) v rovině, jejichž souřadnice x a y vyhovují rovnici $x^2 + y^2 = 1$.
$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon\ y = x^2\}$	množina uspořádaných dvojic $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ takových, že platí $y = x^2$,	množina bodů (x, y) v rovině, jejichž souřadnice x a y vyhovují rovnici $y = x^2$.

Všimněte si, že první množina není funkcí, neboť obsahuje uspořádané dvojice typu (x, y_1), (x, y_2), $y_1 \neq y_2$. Druhá množina je funkcí, neboť ke každému $x \in \mathbb{R}$ existuje právě jedno $y \in \mathbb{R}$ takové, že $y = f(x)$.

V případě funkcí zavádíme pro množinu bodů v rovině souhrnný název graf funkce.

Grafem funkce $f\colon\ D(f) \to \mathbb{R}$ rozumíme množinu bodů

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon\ x \in D(f) \wedge y = f(x)\},$$

kde (x, y) značí bod roviny o souřadnicích x a y.

Graf funkce f je tedy množina bodů, jejichž první souřadnice je $x \in D(f)$ a pro druhou souřadnici platí rovnost $y = f(x)$. Mluvíme-li o grafu funkce, pak tuto rovnici budeme nazývat *rovnice grafu funkce* f.

V mnoha případech byly pro množiny bodů jistých vlastností zavedeny speciální názvy. Připomeňme například, že *kružnicí* nazýváme množinu všech bodů (x, y) v rovině, které jsou od pevného bodu — středu S — stejně vzdáleny, tj.

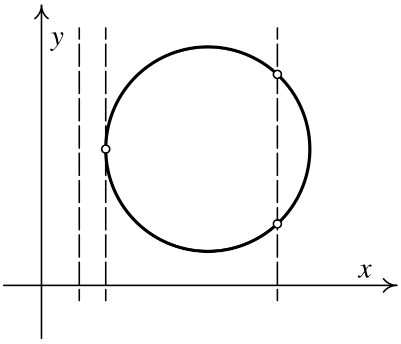
$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon\ (x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2\}, \quad m, n, r \in \mathbb{R},\ r > 0,$$

kde bod (m, n) je střed kružnice a r poloměr. Dále *parabolou* nazýváme množinu všech bodů (x, y) v rovině, které jsou stejně vzdáleny od pevného bodu — ohniska F — a pevné přímky d. Obdobně lze definovat *elipsu*, *hyperbolu*, *přímku*, atd.

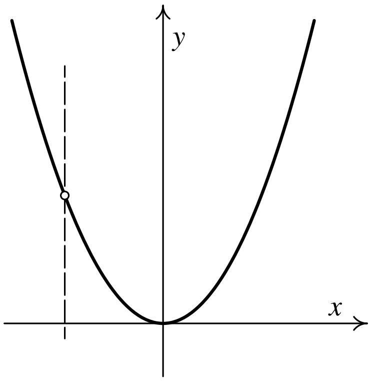
Pak například říkáme, že grafem funkce $f\colon\ y = 5x+3$ je přímka o rovnici $y = 5x+3$.

V předchozí tabulce jsme si ukázali, že ne každá množina uspořádaných dvojic je funkcí. Tomu geometricky odpovídá, že ne každá množina bodů v rovině je grafem funkce. Např. množina bodů $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon\ x^2 + y^2 = 1\}$ (kružnice) není grafem funkce.

Jak poznáme, že je nějaká množina bodů v rovině grafem funkce? Aby se jednalo o graf funkce, nesmí množina obsahovat body tvaru (x, y_1), (x, y_2), $y_1 \neq y_2$, tj. body, které leží nad sebou. Tedy množina bodů v rovině je grafem nějaké funkce f právě tehdy, když libovolná rovnoběžka s osou y protne tuto množinu nejvýše jednou (tedy jednou nebo vůbec). Situaci ilustrují následující obrázky:



Kružnice není grafem funkce

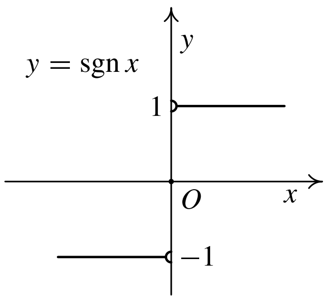


Parabola je grafem funkce

Příklad 3.5. Nakreslete graf funkce

$$f:\ y=\begin{cases}-1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ 1, & x>0.\end{cases}$$

Řešení. Graf:

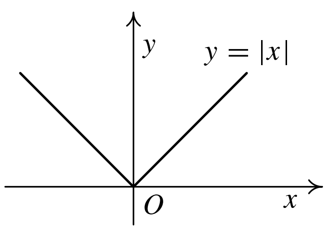


Tato funkce se nazývá *signum* a dále ji budeme značit sgn, tj. $f:\ y=\operatorname{sgn} x$. Přitom $D(f)=\mathbb{R}$ a $H(f)=\{-1,0,1\}$. ▲

Příklad 3.6. Nakreslete graf funkce

$$f:\ y=\begin{cases}-x, & x<0,\\ x, & x\geqq 0.\end{cases}$$

Řešení. Graf:



Tato funkce se nazývá *absolutní hodnota* a dále budeme používat zápis $f\colon\ y = |x|$. Přitom $D(f) = \mathbb{R}$ a $H(f) = \langle 0, \infty)$. ▲

Poznámka 3.7. S funkcí $f\colon\ y = |x|$ se budeme dále často setkávat. Uveďme si proto její nejdůležitější vlastnosti. Pro $x,\ x_1,\ x_2 \in \mathbb{R}$ platí:

1. $|x| \geqq 0, \qquad |x| \geqq x, \qquad |-x| = |x|,$
2. $|x_1 + x_2| \leqq |x_1| + |x_2|,$
3. $|x_1 x_2| = |x_1||x_2|,$
4. $\left|\dfrac{x_1}{x_2}\right| = \dfrac{|x_1|}{|x_2|} \qquad \text{pro} \quad x_2 \neq 0.$

Z předchozích příkladů by se mohlo zdát, že graf funkce jedné proměnné lze vždy nakreslit. Není tomu ale tak. Uvažujme například funkci

$$f\colon\ y = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{I}. \end{cases}$$

Tato funkce nabývá pouze dvou hodnot a to nuly a jedničky podle toho, zda je $x \in \mathbb{Q}$ nebo $x \in \mathbb{I}$. Tedy například $f(1) = f(\frac{3}{2}) = f(\frac{18}{17}) = 1$ a $f(\pi) = f(\sqrt{2}) = 0$. Vzhledem k tomu, že racionální i iracionální čísla jsou na číselné ose rozložená velmi *hustě*, tj. mezi každými dvěma, jakkoliv blízkými, různými reálnými čísly leží jak nekonečně mnoho racionálních, tak nekonečně mnoho iracionálních čísel, graf této funkce nelze dosti dobře nakreslit.

Tato funkce se nazývá *Dirichletova funkce* a dále ji budeme značit χ, tj. $f\colon\ y = \chi(x)$. Přitom $D(f) = \mathbb{R}$ a $H(f) = \{0, 1\}$.

3.1 Některé vlastnosti funkcí

V této kapitole si zopakujeme pojmy ohraničená funkce, monotónní funkce, prostá funkce, sudá, lichá a periodická funkce.

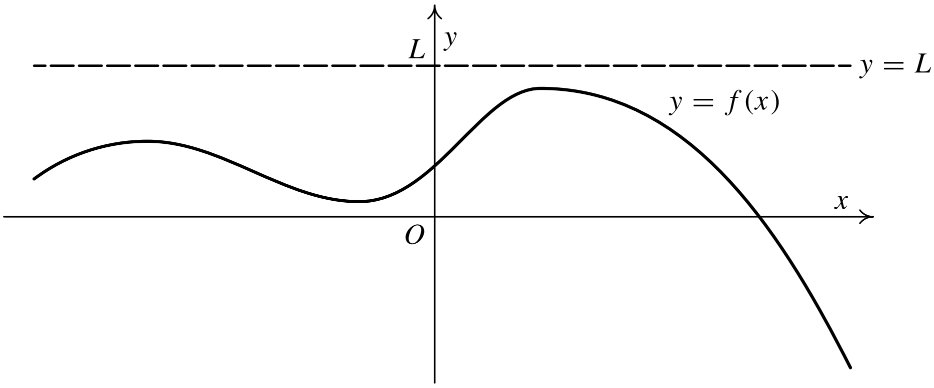
Ohraničená funkce

V kapitole 2.6 jsme definovali pojem ohraničená množina. Nyní si pojem ohraničenosti zavedeme také pro funkce.

Definice 3.8. Řekneme, že funkce f je *shora* (resp. *zdola*) *ohraničená na množině* $M \subset D(f)$, je-li shora (resp. zdola) ohraničená množina $\{f(x)\colon\ x \in M\}$.
Řekneme, že funkce f je *shora* (resp. *zdola*) *ohraničená*, je-li shora (resp. zdola) ohraničená na $D(f)$. Funkce se nazývá *ohraničená*, je-li současně ohraničená zdola i shora.

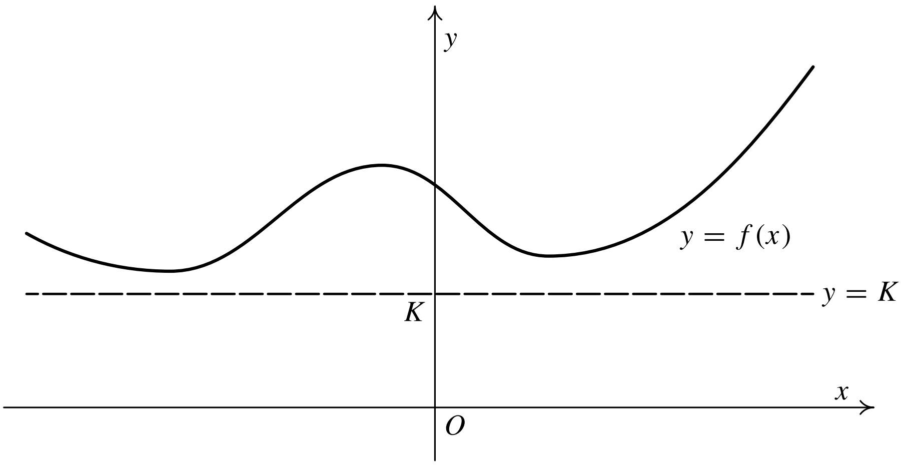
Poznámka 3.9.

1. Definice říká, že funkce f je shora ohraničená, právě když je shora ohraničená množina $\{f(x)\colon\ x \in D(f)\}$. Dále, množina $\{f(x)\colon\ x \in D(f)\}$ je shora ohraničená (podle definice 2.21), právě když existuje konečná horní závora této množiny. Tedy funkce f je shora ohraničená, jestliže lze najít konstantu $L \in \mathbb{R}$ tak, že $f(x) \leqq L$ pro každé $x \in D(f)$. Graf shora ohraničené funkce tedy leží celý pod přímkou $y = L$ — viz obr. 3.1



Obr. 3.1: Funkce ohraničená shora

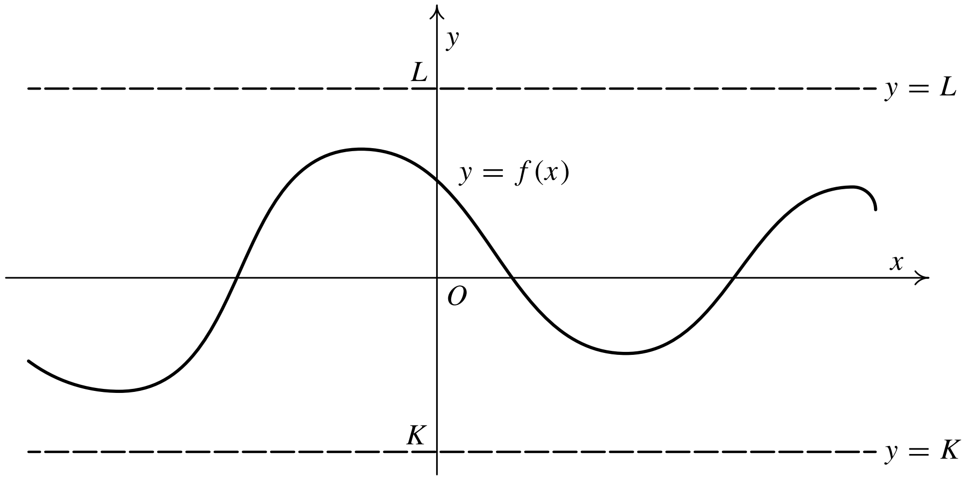
2. Obdobně si rozmyslete, že funkce f je ohraničená zdola, jestliže lze najít konstantu $K \in \mathbb{R}$ tak, že $f(x) \geqq K$ pro každé $x \in D(f)$. Graf funkce ohraničené zdola leží celý nad přímkou $y = K$ — viz obr. 3.2.



Obr. 3.2: Funkce ohraničená zdola

3. Funkce je ohraničená, jestliže lze najít konstanty K a L tak, že $K \leqq f(x) \leqq L$ pro každé $x \in D(f)$. Graf ohraničené funkce leží mezi dvěma rovnoběžkami ve výškách K a L. Jedná se tedy o ohraničení funkčních hodnot (nikoli definičního oboru) — viz obr. 3.3.

Často budeme používat ekvivalentní vyjádření ohraničenosti: Funkce je ohraničená, jestliže existuje konstanta $C \in \mathbb{R}^+$ taková, že pro každé $x \in D(f)$ platí $|f(x)| \leqq C$. Můžeme například zvolit $C = \max\{K, L\}$.



Obr. 3.3: Ohraničená funkce

Příklad 3.10. Určete, zda je funkce $f\colon\ y = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$, $x \in \mathbb{R}$, ohraničená.

Řešení. Upravme nejprve předpis funkce. Pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí

$$\frac{x^2-1}{x^2+1} = \frac{x^2+1-2}{x^2+1} = 1 + \frac{-2}{x^2+1}.$$

Využijeme toho, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $x^2 \geqq 0$ a tedy $x^2 + 1 \geqq 1$. Dále postupně dostáváme

$$0 \leqq \frac{1}{x^2+1} \leqq 1 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \geqq \frac{-2}{x^2+1} \geqq -2 \quad \Leftrightarrow \quad 1 \geqq \frac{-2}{x^2+1} + 1 \geqq -1.$$

Vidíme tedy, že je funkce f ohraničená. ▲

Pro zájemce:

Příklad 3.11. Zjistěte, zda je funkce $f\colon\ y = \dfrac{x}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$, ohraničená.

Řešení. Pro libovolné $x \in \mathbb{R}$ platí, že $(|x|-1)^2 \geqq 0$, tedy $|x|^2 - 2|x| + 1 \geqq 0$. Z této nerovnosti dostaneme (protože $|x|^2 = x^2$), že $x^2 + 1 \geqq 2|x|$. Vydělením kladným výrazem $2(x^2+1)$, což nemění znaménko nerovnosti, dostaneme

$$\frac{1}{2} \geqq \frac{|x|}{x^2+1}.$$

Protože podle pravidel pro počítání s absolutními hodnotami (absolutní hodnota součinu je součin absolutních hodnot, absolutní hodnota podílu je podíl absolutních hodnot) je

$$\frac{|x|}{x^2+1} = \frac{|x|}{|x^2+1|} = \left|\frac{x}{x^2+1}\right| = |f(x)|\,,$$

dostáváme, že

$$|f(x)| \leqq \frac{1}{2} \quad \text{neboli} \quad -\frac{1}{2} \leqq f(x) \leqq \frac{1}{2}\,.$$

Tedy funkce f je ohraničená. Graf této funkce si můžete prohlédnout na straně 49. ▲

Monotónní funkce

Definice 3.12. Řekneme, že funkce f je

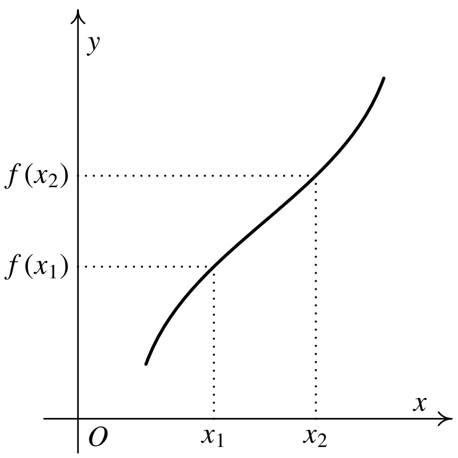
i) *rostoucí* (resp. *klesající*) *na množině* $M \subset D(f)$, jestliže pro každé $x_1,\ x_2 \in M$ takové, že $x_1 < x_2$, platí $f(x_1) < f(x_2)$ (resp. $f(x_1) > f(x_2)$).

ii) *neklesající* (resp. *nerostoucí*) *na množině* $M \subset D(f)$, jestliže pro každé $x_1,\ x_2 \in M$ takové, že $x_1 < x_2$, je $f(x_1) \leqq f(x_2)$ (resp. $f(x_1) \geqq f(x_2)$).

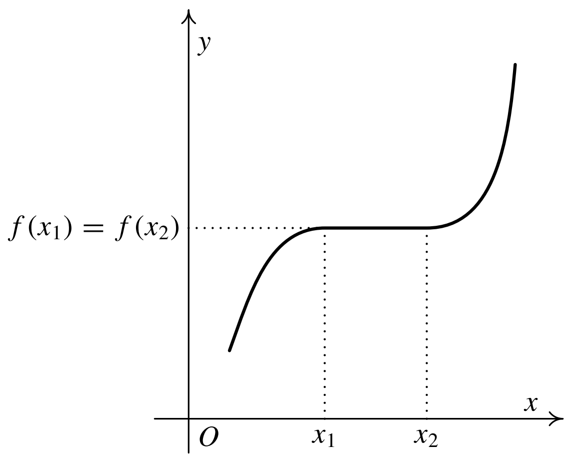
iii) *rostoucí* (resp. *klesající, neklesající, nerostoucí*), je-li rostoucí (resp. klesající, neklesající, nerostoucí) na celém svém definičním oboru.

Je-li funkce rostoucí, klesající, neklesající nebo nerostoucí, říkáme, že je *monotónní*. Speciálně, je-li rostoucí nebo klesající, říkáme, že je *ryze monotónní*.

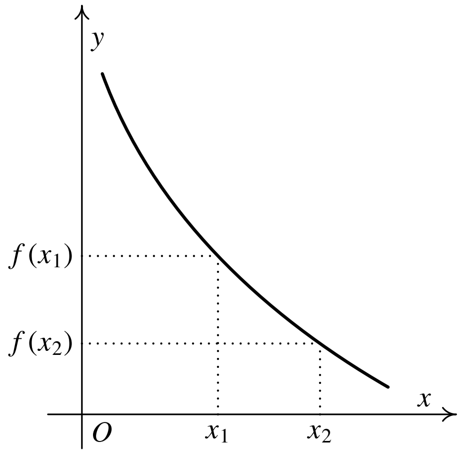
Zřejmě každá rostoucí funkce je i neklesající a každá klesající funkce je i nerostoucí. Opak ovšem neplatí (monotónní funkce mohou být na nějakém intervalu konstantní). Situace je znázorněna na následujících obrázcích.



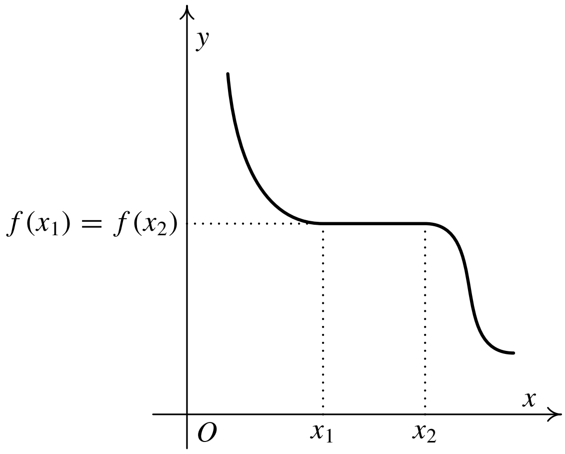
graf rostoucí funkce



graf neklesající funkce
(která není rostoucí)



graf klesající funkce

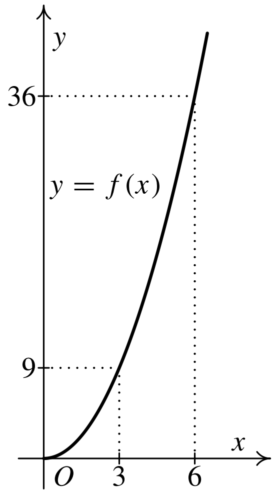


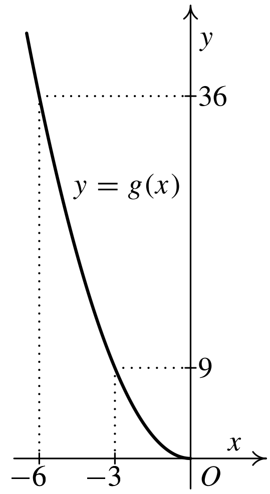
graf nerostoucí funkce (která není klesající)

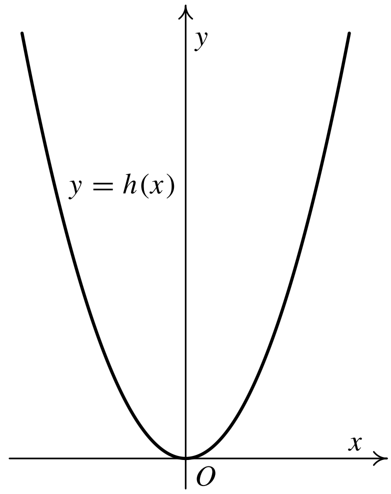
Zatím nemáme vhodné prostředky na ověřování monotonie (ty budeme mít k dispozici až v kapitole týkající se průběhu funkce), a proto uvedeme pouze několik velmi jednoduchých příkladů, kde situace bude zřejmá.

Příklad 3.13. Vyšetřete monotonii následujících funkcí:
a) $f\colon y = x^2,\ x \in \langle 0, \infty)$, b) $g\colon y = x^2,\ x \in (-\infty, 0\rangle$, c) $h\colon y = x^2,\ x \in \mathbb{R}$,
d) $k\colon y = \dfrac{1}{x},\ x \in (0, \infty)$, e) $l\colon y = \dfrac{1}{x},\ x \in (-\infty, 0)$, f) $m\colon y = \dfrac{1}{x},\ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Řešení. a) Nechť $x_1, x_2 \in \langle 0, \infty)$, $x_1 < x_2$. Pak (vzhledem k tomu, že x_1, x_2 jsou nezáporná čísla) je $x_1^2 < x_2^2$, tj. $f(x_1) < f(x_2)$, a tedy f je rostoucí.
b) Nechť $x_1, x_2 \in (-\infty, 0\rangle$, $x_1 < x_2$. Pak je $x_1^2 > x_2^2$, tj. $g(x_1) > g(x_2)$, a tedy g je klesající.
c) Vzhledem k předešlým výsledků víme, že funkce h je na $(-\infty, 0\rangle$ klesající a na $\langle 0, \infty)$ rostoucí. Z toho vyplývá, že na $(-\infty, \infty)$ funkce h není monotónní. Grafem funkce h je parabola — viz následující obrázek.



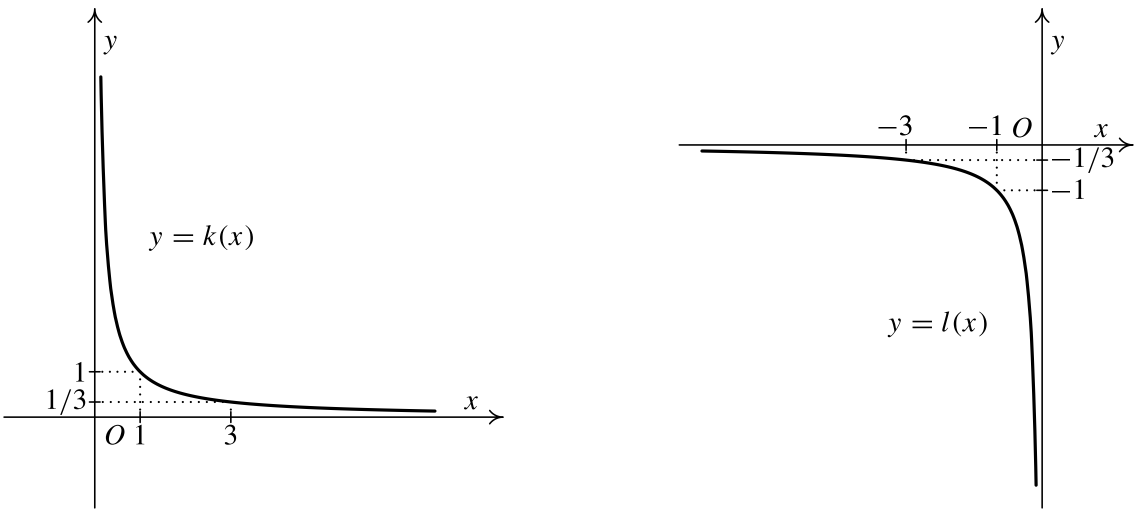


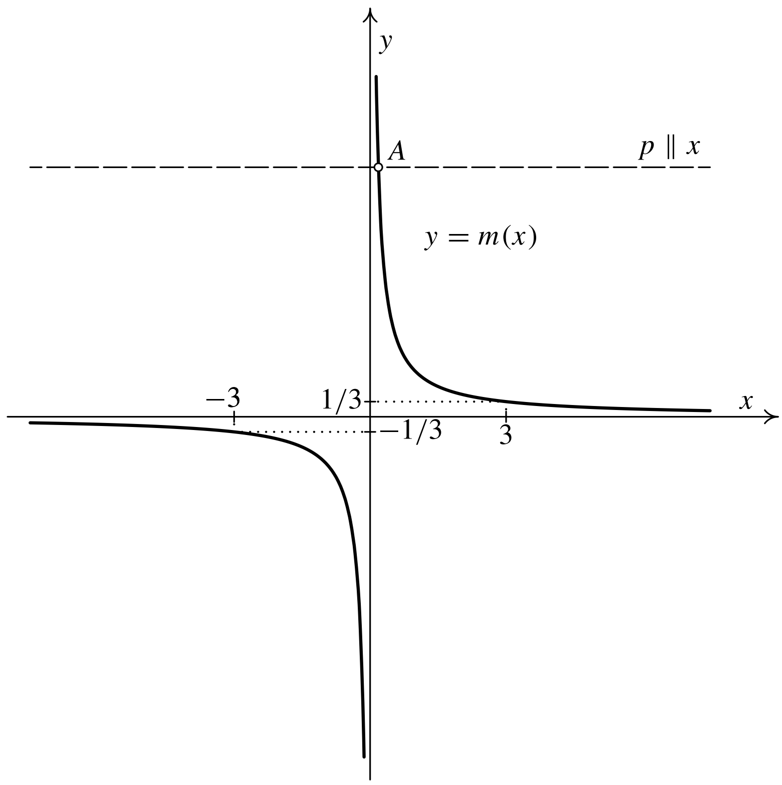


d) Nechť $x_1, x_2 \in (0, \infty)$, $x_1 < x_2$. Pak je $\dfrac{1}{x_1} > \dfrac{1}{x_2}$, tj. $k(x_1) > k(x_2)$, a tedy k je klesající.

e) Nechť $x_1, x_2 \in (-\infty, 0)$, $x_1 < x_2$. Pak je $\dfrac{1}{x_1} > \dfrac{1}{x_2}$, tj. $l(x_1) > l(x_2)$, a tedy l je klesající.

f) Vzhledem k předchozím výsledkům víme, že funkce m je na $(-\infty, 0)$ klesající a na $(0, \infty)$ také klesající. Na množině $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ ale není klesající (např. dvojice bodů -3, 3 nesplňuje podmínku v definici klesající funkce neboť platí $-3 < 3$, ale $-\frac{1}{3} < \frac{1}{3}$). Grafem funkce m je rovnoosá hyperbola, viz následující obrázek. ▲





Prostá funkce

Definice 3.14. Řekneme, že funkce f je *prostá*, jestliže pro každé $x_1, x_2 \in D(f)$, $x_1 \neq x_2$, platí $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Z definice plyne, že funkce je prostá právě tehdy, když libovolná rovnoběžka s osou x protne graf funkce f nejvýše jednou, tj. vůbec neprotne nebo protne právě jednou. Ověřujeme-li, zda je funkce prostá, využíváme často ekvivalentní podmínku: Jestliže pro $x_1, x_2 \in D(f)$ platí, že $f(x_1) = f(x_2)$, pak musí být $x_1 = x_2$.

Všimněme si, že každá ryze monotónní funkce je prostá (nemůže mít v různých bodech stejnou funkční hodnotu), ale opak neplatí, tj. ne každá prostá funkce musí být nutně monotónní. To ukazuje např. funkce m z předchozího příkladu. Zjistili jsme, že není monotónní, ale očividně libovolná rovnoběžka s osou x protne její graf nejvýše jednou (osa x jej vůbec neprotne, každá jiná rovnoběžka jej protne přesně v jednom bodě — viz bod A v předchozím obrázku). Jde tedy o prostou funkci.

Příklad 3.15. Dokažte, že funkce $f\colon\ y = (x-1)^2 + 7,\ x \in \langle 1, \infty)$ je prostá.

Řešení. K důkazu použijeme zmíněnou ekvivalentní podmínku (tzn. nepřímý důkaz): Jestliže pro $x_1, x_2 \in D(f)$ platí, že $f(x_1) = f(x_2)$, pak musí být $x_1 = x_2$.

Nechť $x_1, x_2 \in \langle 1, \infty)$, $f(x_1) = f(x_2)$. Pak postupnými úpravami dostáváme

$$\begin{aligned}
(x_1-1)^2 + 7 &= (x_2-1)^2 + 7,\\
(x_1-1)^2 &= (x_2-1)^2,\\
x_1 - 1 &= x_2 - 1, \qquad (\text{protože } x_1 - 1 \geqq 0,\ x_2 - 1 \geqq 0)\\
x_1 &= x_2.
\end{aligned}$$

Tím jsme dokázali, že funkce f je prostá. ▲

Pozor! Vezmeme-li funkci se stejným předpisem a jiným definičním oborem, tak již nemusí být prostá. Například funkce $g\colon\ y = (x-1)^2 + 7,\ x \in \mathbb{R}$ není prostá, protože lze najít dvě hodnoty $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_1 \neq x_2$, takové, že platí $f(x_1) = 8 = f(x_2)$.

Sudá a lichá funkce

Další dvě vlastnosti se týkají určité souměrnosti grafu. Budeme uvažovat takovou funkci f, jejíž definiční obor $D(f)$ je souměrný vzhledem k počátku, tj. s každým číslem x současně obsahuje i opačné číslo $-x$. Pak má smysl porovnávat funkční hodnoty $f(x)$ a $f(-x)$.

Definice 3.16. Funkce f se nazývá *sudá* (resp. *lichá*), jestliže platí

i) je-li $x \in D(f)$, pak $-x \in D(f)$,

ii) $f(-x) = f(x)$ (resp. $f(-x) = -f(x)$) pro každé $x \in D(f)$.

Z definice vyplývá, že graf sudé funkce je souměrný podle osy y a graf liché funkce je souměrný podle počátku. Obecně nemusí být funkce ani sudá ani lichá. Všimněte si, že funkce $f\colon\ y = 0$ je zároveň sudá i lichá.

Příklad 3.17. Zjistěte, zda jsou následující funkce sudé nebo liché.

a) $f: y = \dfrac{x}{x^2+1}$, $x \in \mathbb{R}$, b) $g: y = \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$, c) $h: y = \dfrac{1+x}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

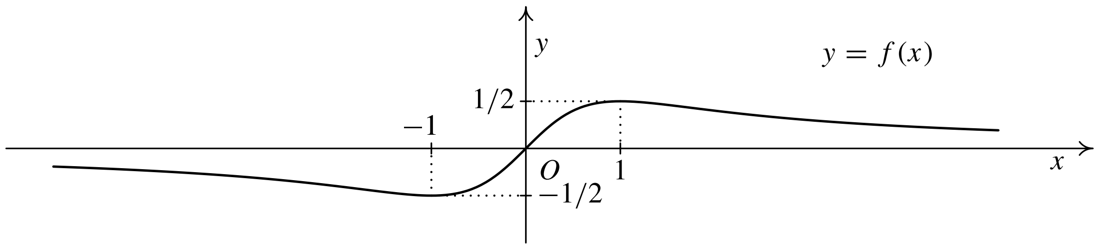
Řešení. Nechť $x \in \mathbb{R}$. Pak

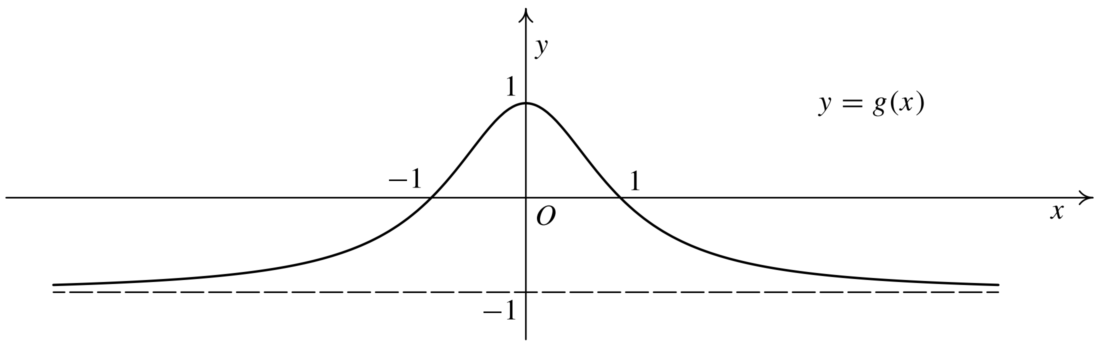
a) $f(-x) = \dfrac{-x}{(-x)^2+1} = \dfrac{-x}{x^2+1} = -\dfrac{x}{x^2+1} = -f(x)$. Tedy f je lichá funkce.

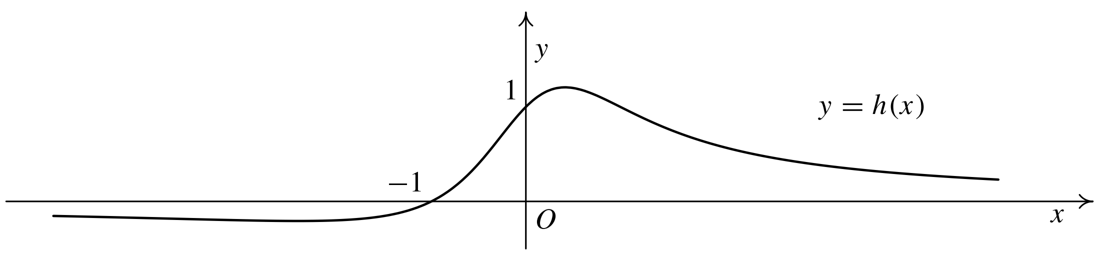
b) $g(-x) = \dfrac{1-(-x)^2}{1+(-x)^2} = \dfrac{1-x^2}{1+x^2} = g(x)$. Tedy g je sudá funkce.

c) $h(-x) = \dfrac{1+(-x)}{1+(-x)^2} = \dfrac{1-x}{1+x^2}$, což není rovno ani předpisu původní funkce $h(x) = \dfrac{1+x}{1+x^2}$ ani výrazu $-h(x) = \dfrac{-1-x}{1+x^2}$. Proto h není ani sudá ani lichá funkce.

Pro ilustraci uvádíme grafy funkcí f, g a h. (Grafy podobných, i složitějších funkcí budete po prostudování tohoto studijního materiálu schopni sami zakreslit.) ▲

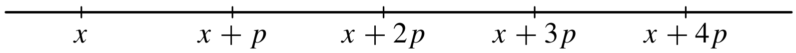






Periodická funkce

Nechť f je funkce a $p > 0$ je reálné číslo. Předpokládejme, že definiční obor $D(f)$ s každým číslem x obsahuje i číslo $x + p$. Pak ovšem musí obsahovat i číslo $(x + p) + + p = x + 2p$, $(x + 2p) + p = x + 3p$ atd.



Definice 3.18. Řekneme, že funkce f je *periodická* s periodou p, $p \in \mathbb{R}^+$, jestliže platí

i) je-li $x \in D(f)$, pak také $x + p \in D(f)$,
ii) $f(x + p) = f(x)$ pro každé $x \in D(f)$.

Jinými slovy, v bodech majících od sebe vzdálenost p jsou stejné funkční hodnoty. Tedy stačí znát graf f na nějakém intervalu délky p a celý graf f dostaneme „kopírováním“ této části, kterou posouváme o p vpravo nebo vlevo (vlevo jen pokud to definiční obor připouští).

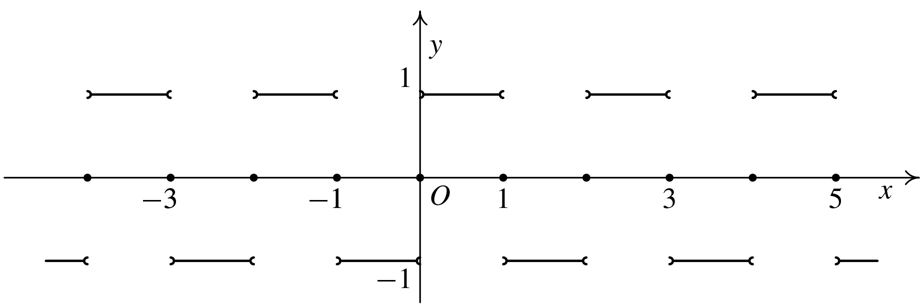
Funkce periodická s periodou p je též periodická s periodou $k \cdot p$, $k \in \mathbb{N}$. Pokud existuje nejmenší perioda, nazývá se *základní perioda*.

Nejznámější periodické funkce jsou funkce goniometrické. Např. sinus a kosinus mají základní periodu 2π, funkce $f\colon\ y = \sin 3x$ má základní periodu $\frac{2}{3}\pi$, obecně funkce $f\colon\ y = \sin ax$, $a > 0$, má základní periodu $\frac{2}{a}\pi$. Funkce $f\colon\ y = c$, $c \in \mathbb{R}$ je periodická funkce, která nemá základní periodu.

Příklad 3.19. Nakreslete graf periodické funkce f, jejíž perioda je $p = 2$ a $D(f) = \mathbb{R}$, jestliže víte, že

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{pro} \quad x \in (-1, 0), \\ \ \ 0 & \text{pro} \quad x = -1 \text{ a } x = 0, \\ \ \ 1 & \text{pro} \quad x \in (0, 1). \end{cases}$$

Řešení. Jelikož je funkce f periodická s periodou $p = 2$, stačí nakreslit graf f na intervalu $\langle -1, 1)$ a dále jej kopírovat vpravo a vlevo vždy po posunutí o 2. Uvědomte si, že $f(1)$ už nelze zadat libovolně, protože musí být $f(-1) = f(1)$, neboť vzdálenost 1 a -1 je právě 2.



▲

S obdobnými funkcemi (tzv. periodickými signály) se velmi často setkáváme při číslicovém zpracování signálů.

3.2 Operace s funkcemi

V této kapitole si stručně zopakujeme základní operace s funkcemi, jako je součet, rozdíl, součin, podíl, absolutní hodnota a skládání funkcí. Podrobněji se budeme věnovat inverzní funkci a skládání navzájem inverzních funkcí. Příklady k procvičení této problematiky jsou zařazeny do kapitoly Elementární funkce.

Součet, rozdíl, součin a podíl funkcí

Definice 3.20. Nechť f a g jsou funkce. *Součtem $f+g$, rozdílem $f-g$, součinem $f\cdot g$ a podílem f/g funkcí f a g* nazveme funkce definované následujícími předpisy:

$$\begin{aligned}
(f+g)(x) &= f(x)+g(x) && \text{pro } x\in D(f)\cap D(g),\\
(f-g)(x) &= f(x)-g(x) && \text{pro } x\in D(f)\cap D(g),\\
(f\cdot g)(x) &= f(x)\cdot g(x) && \text{pro } x\in D(f)\cap D(g),\\
\left(\frac{f}{g}\right)(x) &= \frac{f(x)}{g(x)} && \text{pro } x\in D(f)\cap D(g)\setminus\{z\in\mathbb{R}: g(z)=0\}.
\end{aligned}$$

Absolutní hodnotou funkce f nazýváme funkci $|f|$ definovanou předpisem:

$$|f|(x)=|f(x)| \ \textit{pro}\ x\in D(f).$$

Je třeba si uvědomit, že například ve vztahu $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$ vystupuje stejný symbol „+“ ve dvou různých významech. Na levé straně rovnosti znamená operaci mezi funkcemi (funkcím f a g je přiřazena funkce $f+g$) a na pravé straně má „+“ význam součtu dvou reálných čísel $f(x)$ a $g(x)$. Obdobně pro ostatní operace. Dále poznamenejme, že v případě součinu dvou funkcí budeme často místo $f\cdot g$ psát fg.

Speciálním případem součinu dvou funkcí je součin konstanty a funkce, tj. pro $c\in\mathbb{R}$ dostáváme

$$(c\cdot f)(x)=c\cdot f(x),\qquad x\in D(f).$$

Skládání funkcí

Věnujme se nyní další operaci s funkcemi — skládání funkcí. Uvažujme dvě funkce f a g. Funkce f každému prvku $x\in D(f)$ přiřadí prvek $y=f(x)\in H(f)$. Jestliže tento prvek y náleží definičnímu oboru funkce g ($y\in D(g)$), pak jej funkce g zobrazí na prvek $z=g(y)\in H(g)$. Přitom platí

$$z=g(y)=g\left(f(x)\right).$$

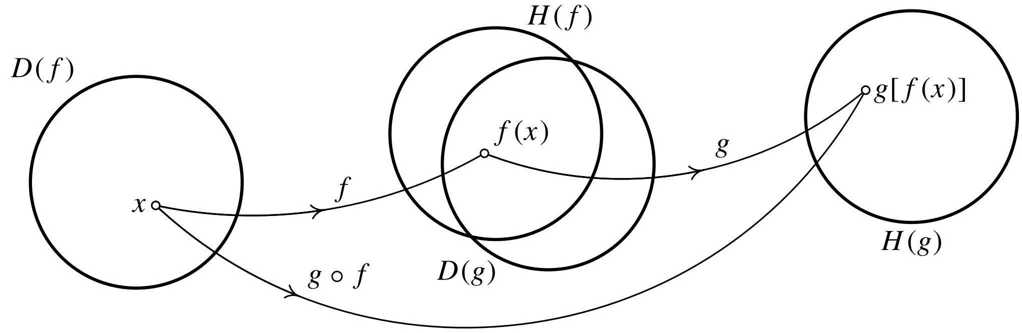
Dostáváme tedy novou funkci, která prvku x přiřazuje prvek $z=g\left(f(x)\right)$.

Definice 3.21. Nechť f, g jsou funkce. *Složenou funkcí* $g \circ f$ nazýváme funkci definovanou předpisem

$$(g \circ f)(x) = g\left(f(x)\right), \qquad \textit{kde } x \in D(f) \wedge f(x) \in D(g).$$

Funkci f nazýváme *vnitřní složka* a funkci g *vnější složka* složené funkce $g \circ f$.

Zápis $g \circ f$ čteme „g po f“ nebo „g složena s f“ (nejprve bereme funkci f a pak funkci g). Situace je znázorněna na následujícím obrázku.



Jsou-li složky složené funkce samy o sobě složenými funkcemi, dostáváme vícenásobně složenou funkci. Např. pro trojnásobně složenou funkci, jejíž složky jsou f, g a h, platí:

$$(h \circ g \circ f)(x) = h\left(g\left(f(x)\right)\right).$$

Při určování $D(g \circ f)$ (který je zřejmě obecně pouze částí $D(f)$) musíme vždy zvážit, „která x je možno vzít, abychom mohli $f(x)$ dosadit do předpisu pro funkci g“.

Příklad 3.22. Jsou dány funkce $f\colon\ y = 3 - 2x$, $g\colon\ z = \ln y$. Určete složenou funkci $g \circ f$ a její definiční obor.

Řešení. Přímo z definice složené funkce dostáváme

$$(g \circ f)(x) = g\left(f(x)\right) = g(3 - 2x) = \ln(3 - 2x).$$

Hledaná funkce je tedy $g \circ f\colon\ z = \ln(3 - 2x)$.

Nyní určeme definiční obor funkce $g \circ f$. Víme, že $D(f) = \mathbb{R}$ a $D(g) = (0, \infty)$ (přirozený logaritmus je definován jen pro kladná čísla). Chceme najít taková $x \in D(f)$, aby platilo, že $f(x) \in D(g)$, tj. hledáme $x \in \mathbb{R}$ taková, že $3 - 2x \in (0, \infty)$. Dostáváme tedy jedinou podmínku:

$$3 - 2x > 0 \implies 3 > 2x \implies \frac{3}{2} > x.$$

Tudíž $D(g \circ f) = (-\infty, 3/2)$. ▲

Další příklady k procvičení definičních oborů složených funkcí jsou zařazeny v následující kapitole.

Poznámka 3.23.

1. Lze jednoduše dokázat, že složením dvou prostých funkcí dostaneme funkci prostou. Speciálně, složením dvou rostoucích funkcí dostáváme rostoucí funkci, složením dvou klesajících funkcí dostáváme rostoucí funkci, složením funkce rostoucí a klesající (v libovolném pořadí) dostáváme funkci klesající.
2. Složením dvou sudých funkcí dostáváme sudou funkci. Složením dvou lichých funkcí dostáváme lichou funkci. Složíme-li sudou a lichou funkci (v libovolném pořadí), dostáváme sudou funkci.

Inverzní funkce

Definice 3.24. Nechť f je funkce. Funkce f^{-1} se nazývá *funkce inverzní k funkci* f, jestliže

i) $D(f^{-1}) = H(f)$,
ii) pro každé $y \in D(f^{-1})$ platí $\quad f^{-1}(y) = x \;\Leftrightarrow\; f(x) = y.$

V definici inverzní funkce vystupují funkce f a f^{-1}. Kvůli praktickým výpočtům inverzní funkce označujeme nezávisle proměnnou ve funkci f stále x a nezávisle proměnnou ve funkci f^{-1} písmenem y. To ovšem samo o sobě není podstatné. Fakt, že funkce f^{-1} je inverzní k funkci f, závisí na tvaru těchto funkcí a ne na písmenu, kterým označujeme nezávisle proměnnou. Poznamenejme, že f^{-1} je označení pro inverzní funkci. Pozor: $f^{-1} \neq \frac{1}{f}$!

Věta 3.25. *Nechť f je funkce. Pak f^{-1} existuje právě tehdy, když f je prostá.*

Je-li f funkce, pak ke každému $x \in D(f)$ existuje právě jedno $y \in H(f)$ tak, že $y = f(x)$. Je-li navíc f prostá funkce, pak také ke každému $y \in H(f)$ existuje právě jedno $x \in D(f)$ tak, že $y = f(x)$. Jinak řečeno, je-li f prostá, pak se lze jednoznačně dostat nejen z bodu x do bodu y (funkce f), ale také naopak z bodu y do bodu x (funkce f^{-1}); viz obrázek 3.4.

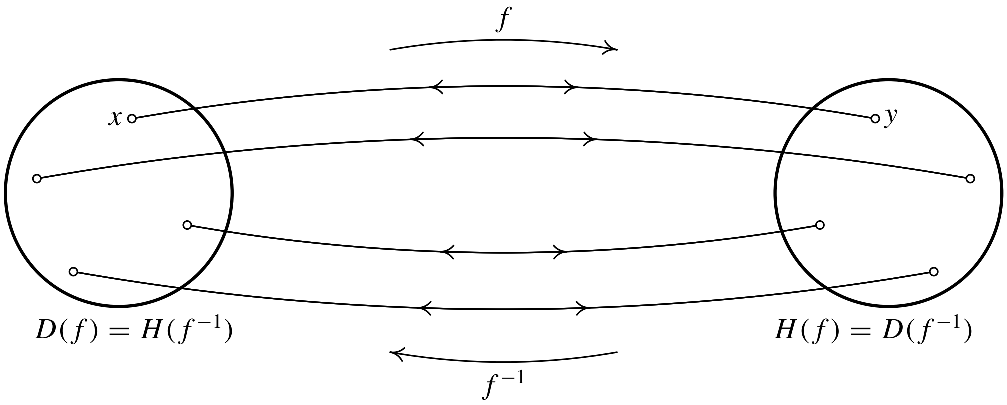
Věnujme se nyní skládání funkcí f a f^{-1}. Zřejmě, složíme-li f a f^{-1}, vrátíme se na stejné místo v množině $D(f)$. Dostaneme tudíž:

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}[f(x)] = x \qquad \text{pro } x \in D(f).$$

Podobně můžeme složit f^{-1} a f a vrátíme se na stejné místo v $D(f^{-1})$. Tedy:

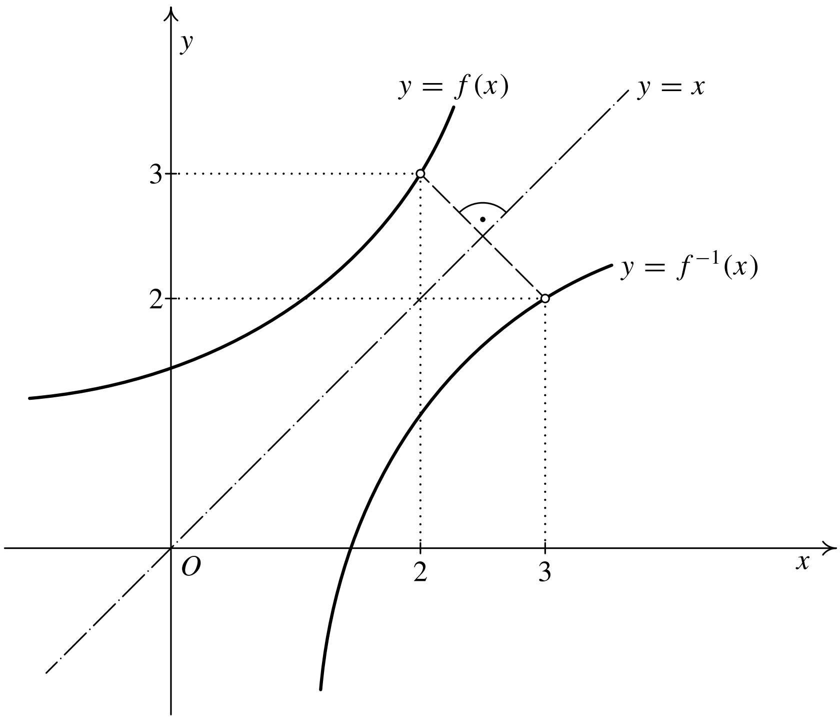
$$(f \circ f^{-1})(x) = f[f^{-1}(x)] = x \qquad \text{pro } x \in D(f^{-1}).$$

Dále nás bude zajímat vztah mezi grafem f a grafem f^{-1}. Graf f je tvořen body v rovině tvaru $(x, f(x)) = (x, y)$, kdežto graf f^{-1} je tvořen body $(y, f^{-1}(y)) = (y, x)$. Jestliže např. graf f obsahuje bod $(2, 3)$, tj. $f(2) = 3$, bude graf f^{-1} obsahovat bod $(3, 2)$,



Obr. 3.4

tj. $f^{-1}(3) = 2$. Vyneseme-li hodnotu x funkce f a funkce f^{-1} na osu x a hodnotu y obou funkcí na osu y, dostaneme vlastně dvakrát totéž. Často ale chceme vynášet první složku ve dvojici na vodorovnou osu (obvykle osu x) a druhou složku ve dvojici na svislou osu (obvykle osu y). Za tímto účelem většinou provádíme vzájemné přeznačení x a y a místo $x = f^{-1}(y)$ pak píšeme (v novém označení) $y = f^{-1}(x)$. Protože body (x, y) a (y, x) jsou souměrné podle osy I. a III. kvadrantu (přímky $y = x$), jsou také grafy f a f^{-1} souměrné podle této přímky.



Obr. 3.5

Věta 3.26. *Nechť f je prostá funkce a f^{-1} funkce k ní inverzní. Potom platí:*

1. *f^{-1} je prostá funkce.*
2. *Je-li f rostoucí, resp. klesající, potom je i f^{-1} rostoucí, resp. klesající.*
3. *Pro každé $x \in D(f)$ platí $(f^{-1} \circ f)(x) = x$.*
   Pro každé $x \in D(f^{-1})$ platí $(f \circ f^{-1})(x) = x$.
4. *Inverzní funkce k f^{-1} je f, tj. $(f^{-1})^{-1} = f$.*
5. *Grafy funkcí f a f^{-1} jsou (v téže kartézské soustavě souřadnic) navzájem souměrné podle přímky $y = x$.*

Příkladem dvojice vzájemně inverzních funkcí jsou funkce exponenciální a logaritmická, mocninná funkce a funkce n-tá odmocnina, funkce sinus a arkussinus, kosinus a arkuskosinus atd. Podrobněji se těmto funkcím budeme věnovat v následující kapitole. Nyní si uvedeme postup nalezení inverzní funkce f^{-1} k zadané funkci f a jeden ilustrační příklad.

Jak postupujeme, chceme-li k zadané funkci f nalézt funkci inverzní f^{-1}:

1. Určíme definiční obor $D(f)$ zadané funkce.
2. Ověříme, že je funkce f prostá. Přitom buď využijeme ekvivalentní podmínku uvedenou za definicí 3.14 nebo vyjdeme z poznámky 3.23. Podle této poznámky je například funkce $f(x) = \ln(x^3 + 1)$ prostá, neboť vznikla složením funkcí $f_1(x) = x^3 + 1$ a $f_2(x) = \ln x$, které jsou obě rostoucí a tedy prosté.
3. Najdeme funkci f^{-1}:
   i) Určíme definiční obor $D(f^{-1})$ funkce inverzní pomocí oboru hodnot funkce původní. Platí totiž $D(f^{-1}) = H(f)$.
   ii) Nalezneme předpis funkce f^{-1}. Přitom využijeme vztah $f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$, který platí pro každé $y \in D(f^{-1})$. Vyjdeme tedy z rovnice $y = f(x)$ a vyjádříme x v závislosti na y.

Příklad 3.27. Ověřte, že k funkci $f\colon y = \dfrac{x+2}{x-3}$ existuje inverzní funkce, a najděte ji.

Řešení.

1. Zřejmě ze zadání $D(f) = \mathbb{R} \smallsetminus \{3\}$.
2. Ověříme, zda je funkce f prostá. Chceme tedy ukázat, že jestliže pro $x_1, x_2 \in D(f)$ platí, že $f(x_1) = f(x_2)$, pak musí být $x_1 = x_2$.
   Nechť tedy $x_1, x_2 \in \mathbb{R} \smallsetminus \{3\}$ a $f(x_1) = f(x_2)$. Pak postupnými úpravami dostáváme

$$\begin{aligned} \frac{x_1+2}{x_1-3} &= \frac{x_2+2}{x_2-3}, \\ x_1x_2 + 2x_2 - 3x_1 - 6 &= x_1x_2 + 2x_1 - 3x_2 - 6, \\ 5x_1 &= 5x_2, \\ x_1 &= x_2. \end{aligned}$$

Dokázali jsme, že funkce f je prostá, a proto existuje funkce f^{-1} inverzní k funkci f.

3. K nalezení funkce f^{-1} využijeme definici 3.24, která říká, že funkce f^{-1} je funkcí inverzní k funkci f, jestliže platí:
   i) $D(f^{-1}) = H(f)$,
   ii) pro každé $y \in D(f^{-1})$ platí $\qquad f^{-1}(y) = x \;\Leftrightarrow\; f(x) = y$.

   Postupujme podle této definice.

   i) Určíme definiční obor funkce inverzní, který je roven oboru hodnot $H(f)$ funkce f. Nejprve si upravíme předpis funkce f. Platí

   $$\frac{x+2}{x-3} = \frac{x-3+5}{x-3} = 1 + \frac{5}{x-3}\,.$$

   Hledáme obor hodnot $H(f) = \{f(x)\colon\ x \in D(f)\}$. Vezmeme $x \in D(f)$ a zkoumáme, jakých hodnot (graficky ve směru osy y) nabývá $f(x)$.

   $$x \in \mathbb{R} \smallsetminus \{3\} \quad\Leftrightarrow\quad x-3 \in \mathbb{R} \smallsetminus \{0\} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{1}{x-3} \in \mathbb{R} \smallsetminus \{0\} \quad\Leftrightarrow$$

   $$\Leftrightarrow\quad \frac{5}{x-3} \in \mathbb{R} \smallsetminus \{0\} \quad\Leftrightarrow\quad 1+\frac{5}{x-3} \in \mathbb{R} \smallsetminus \{1\} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{x+2}{x-3} \in \mathbb{R} \smallsetminus \{1\}.$$

   Tedy celkem

   $$D(f^{-1}) = H(f) = \mathbb{R} \smallsetminus \{1\}.$$

   ii) K určení předpisu funkce f^{-1} využijeme vztah $f^{-1}(y) = x \;\Leftrightarrow\; f(x) = y$, který platí pro každé $y \in D(f^{-1})$. Vyjděme tedy z rovnice $y = f(x)$ a vyjádřeme x v závislosti na y.
   Pro každé $y \in \mathbb{R} \smallsetminus \{1\}$ platí

   $$\begin{aligned} y = \frac{x+2}{x-3} \quad &\Leftrightarrow\quad (x-3)y = x+2 \quad\Leftrightarrow\quad xy - 3y = x+2 \quad\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow\quad xy - x = 3y+2 \quad\Leftrightarrow\quad x(y-1) = 3y+2 \quad\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow\quad x = \frac{3y+2}{y-1}\,. \end{aligned}$$

   Tedy

   $$f^{-1}\colon x = \frac{3y+2}{y-1}\,, \qquad y \in \mathbb{R} \smallsetminus \{1\}.$$

   Po přeznačení proměnných

   $$f^{-1}\colon y = \frac{3x+2}{x-1}\,, \qquad x \in \mathbb{R} \smallsetminus \{1\}.$$

   ▲

3.3 Transformace grafu funkce

Nechť je dána funkce $f\colon\ y = f(x),\ x \in D(f)$. Připomeňme si, jak lze pomocí grafu funkce f sestrojit grafy následujících funkcí:

a) $f_1\colon\ y = -f(x)$, b) $f_2\colon\ y = f(-x)$, c) $f_3\colon\ y = f(x) + b$,
d) $f_4\colon\ y = f(x - a)$, e) $f_5\colon\ y = k \cdot f(x)$, f) $f_6\colon\ y = f(mx)$,

kde $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $k \in \mathbb{R}^+$, $m \in \mathbb{R}^+$ jsou konstanty.

a) $f_1\colon y = -f(x)$.
Zřejmě $D(f_1) = D(f)$. Pro každé $x \in D(f_1)$ platí $f_1(x) = -f(x)$, tj. funkční hodnotu funkce f_1 v bodě x dostaneme tak, že funkční hodnotu funkce f v bodě x vynásobíme číslem -1. Tedy grafy funkcí f a f_1 jsou symetrické podle osy x — viz obr. 3.6 a).

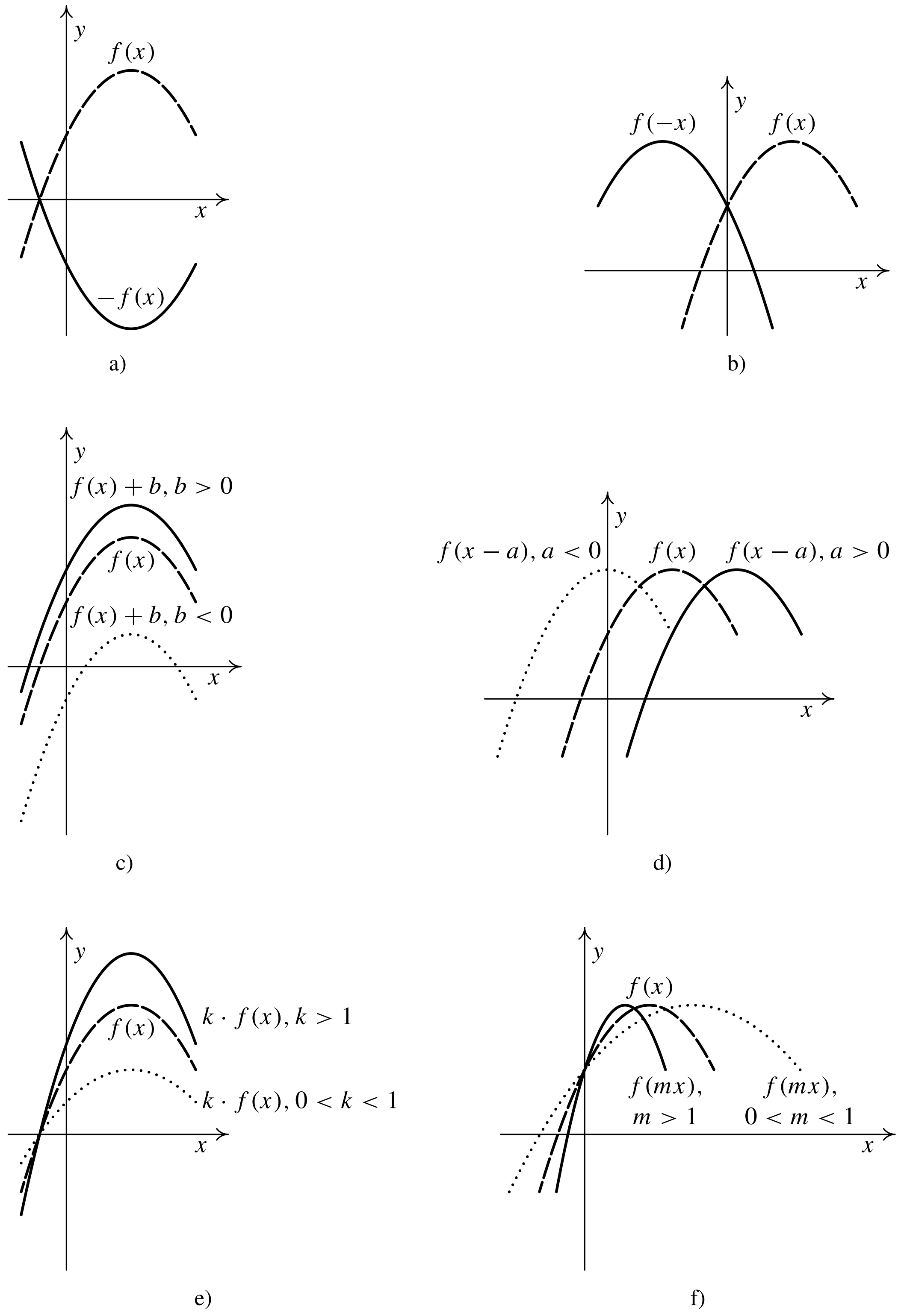
b) $f_2\colon y = f(-x)$.
Zřejmě $D(f_2) = \{x \in \mathbb{R} : -x \in D(f)\}$. Pro každé $x \in D(f_2)$ platí $f_2(x) = f(-x)$, tj. funkční hodnota funkce f_2 v bodě x je stejná jako funkční hodnota funkce f v bodě $-x$. Tedy grafy funkcí f a f_2 jsou symetrické podle osy y — viz obr. 3.6 b).

c) $f_3\colon y = f(x) + b,\ b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Zřejmě $D(f_3) = D(f)$. Pro každé $x \in D(f_3)$ platí $f_3(x) = f(x) + b$, tj. funkční hodnotu funkce f_3 v bodě x dostaneme tak, že k funkční hodnotě funkce f v bodě x přičteme číslo b. Tedy graf funkce f_3 je posunutím grafu funkce f o vzdálenost $|b|$ ve směru osy y. Konkrétně, je-li $b > 0$, jde o posunutí v kladném směru osy y (nahoru), a je-li $b < 0$, v záporném směru osy y (dolů) — viz obr. 3.6 c).

d) $f_4\colon y = f(x - a),\ a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Zřejmě $D(f_4) = \{x \in \mathbb{R} : x - a \in D(f)\}$. Pro každé $x \in D(f_4)$ je $f_4(x) = f(x - a)$, tj. funkční hodnota funkce f_4 v bodě x je stejná jako funkční hodnota funkce f v bodě $x - a$. Tedy graf funkce f_4 je posunutím grafu funkce f o vzdálenost $|a|$ ve směru osy x. Konkrétně, je-li $a > 0$, jde o posunutí v kladném směru osy x (doprava), a je-li $a < 0$, v záporném směru osy x (doleva) — viz obr. 3.6 d).

e) $f_5\colon y = k \cdot f(x),\ k \in \mathbb{R}^+$.
Zřejmě $D(f_5) = D(f)$. Pro každé $x \in D(f_5)$ platí $f_5(x) = k \cdot f(x)$, tj. funkční hodnotu funkce f_5 v bodě x dostaneme tak, že funkční hodnotu funkce f v bodě x vynásobíme číslem k. Tedy graf funkce f_5 je deformací grafu funkce f ve směru osy y. Konkrétně, je-li $k > 1$, jde o k-násobné „zvětšení“ ve směru osy y, a je-li $0 < k < 1$, jde o k-násobné „zmenšení“ ve směru osy y — viz obr. 3.6 e).

f) $f_6\colon y = f(mx),\ m \in \mathbb{R}^+$.
Zřejmě $D(f_6) = \{x \in \mathbb{R} : mx \in D(f)\}$. Pro každé $x \in D(f_6)$ platí $f_6(x) = f(mx)$, tj. funkční hodnota funkce f_6 v bodě x je stejná jako funkční hodnota funkce f v bodě mx. Tedy graf funkce f_6 je deformací grafu funkce f ve směru osy x. Konkrétně, je-li $m > 1$, jde o $1/m$-násobné „zmenšení (zúžení)“ ve směru osy x, a je-li $0 < m < 1$, jde o $1/m$-násobné „zvětšení (roztažení)“ ve směru osy x — viz obr. 3.6 f).



Obr. 3.6: Transformace grafu funkce

Příklad 3.28. Nakreslete graf funkce $f\colon\, y = \dfrac{1}{2}\,x^2 - 4x + 5$.

Řešení. Jedná se o kvadratickou funkci, jejímž definičním oborem je $\mathbb{R}$ a grafem je parabola.

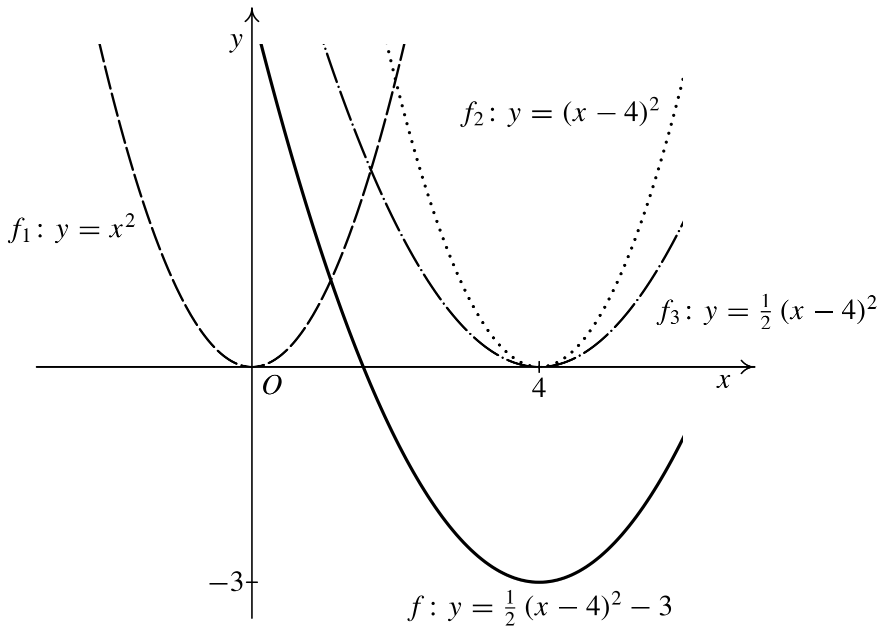
Doplněním kvadratického trojčlenu $\frac{1}{2}x^2 - 4x + 5$ na druhou mocninu lineárního dvojčlenu („doplnění na čtverec“) získáme

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\,x^2 - 4x + 5 &= \frac{1}{2}\,(x^2 - 8x + 10) = \frac{1}{2}\,(x^2 - 8x + 16 - 6) = \\ &= \frac{1}{2}\,(x^2 - 8x + 16) + \frac{1}{2}\,(-6) = \frac{1}{2}\,(x - 4)^2 - 3. \end{aligned}$$

Graf funkce f lze sestrojit postupně takto:

1. Vyjdeme ze základní kvadratické funkce $f_1\colon\, y = x^2$, jejímž grafem je parabola s vrcholem v bodě $(0, 0)$.
2. Graf funkce $f_2\colon\, y = (x - 4)^2$ dostaneme posunutím grafu funkce f_1 ve směru osy x o hodnotu 4 (doprava). Vrchol paraboly je v bodě $(4, 0)$.
3. Graf funkce $f_3\colon\, y = \frac{1}{2}(x - 4)^2$ sestrojíme takto: Funkční hodnotu funkce f_3 v každém bodě x dostaneme vynásobením funkční hodnoty funkce f_2 v bodě x hodnotou $\frac{1}{2}$. Vrchol paraboly zůstává v bodě $(4, 0)$.
4. Graf funkce $f\colon\, y = \frac{1}{2}(x - 4)^2 - 3$ dostaneme posunutím grafu funkce f_3 ve směru osy y o hodnotu -3 (dolů). Vrchol paraboly je v bodě $(4, -3)$.

Výsledná funkce f i pomocné funkce f_1, f_2, f_3 jsou znázorněny na obr. 3.7 ▲



Obr. 3.7: Graf funkce $f\colon\, y = \frac{1}{2}\,x^2 - 4x + 5$

$\sum$

Pojmy k zapamatování

— reálná funkce jedné reálné proměnné,
— graf funkce,
— ohraničená funkce,
— monotónní funkce,
— prostá funkce,
— sudá a lichá funkce,
— periodická funkce,
— složená funkce,
— inverzní funkce.

?

Kontrolní otázky

1. Jak poznáme, že je daná množina bodů v rovině grafem nějaké funkce?
2. Nakreslete graf libovolné ohraničené funkce.
3. Jaký je rozdíl mezi rostoucí a neklesající funkcí?
4. Uveďte příklad funkce, která není prostá.
5. Jaké vlastnosti mají grafy sudých, resp. lichých, funkcí?
6. Uveďte příklad funkce, jejíž základní perioda je π.
7. Kdy existuje k dané funkci f funkce inverzní f^{-1}?

!

Příklady k procvičení

1. Zakreslete grafy následujících funkcí a rozhodněte o monotonii a sudosti, resp. lichosti, těchto funkcí.

a) $f: y = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \geqq 0, \\ -1 & \text{pro } x < 0, \end{cases}$ b) $f: y = \begin{cases} x & \text{pro } x \geqq 0, \\ -x & \text{pro } x < 0, \end{cases}$

c) $f: y = \begin{cases} -1 & \text{pro } x \leqq -1, \\ x & \text{pro } x \in (-1, 1), \\ 1 & \text{pro } x \geqq 1, \end{cases}$ d) $f: y = \begin{cases} 1+x & \text{pro } x \leqq -1, \\ 0 & \text{pro } x \in (-1, 1), \\ 1-x & \text{pro } x \geqq 1. \end{cases}$

2. Rozhodněte, zda je daná funkce sudá nebo lichá.

a) $f: y = 2$, b) $f: y = 3x^2$, c) $f: y = \dfrac{x^2+1}{x}$, d) $f: y = x^2 + x$,

e) $f: y = -1$, f) $f: y = \operatorname{sgn} x$, g) $f: y = \dfrac{5x}{2x^2+1}$, h) $f: y = \dfrac{x+1}{x-1}$.

3. Rozhodněte, zda se následující funkce rovnají:

$$f:\ y = x^2, \qquad g:\ y = |x|^2.$$

4. Nakreslete grafy následujících funkcí.

   a) $f\colon y = |x| + 1$, b) $f\colon y = |x + 1| + 2$, c) $f\colon y = 2|x - 1| + |x| + 2$,
   d) $f\colon y = |x - 1|$, e) $f\colon y = 2|x + 3| - 2$, f) $f\colon y = -2|x - 1| + |2x - 1| - 3$.

5. Nakreslete graf periodické funkce s periodou $p = 1$, která je pro $x \in \langle 0, 1)$ definována následovně:

   a) $f\colon y = \dfrac{x}{2}$, b) $f\colon y = x^2$.

6. Nakreslete grafy následujících funkcí:

   a) $f\colon y = 2x^2 + 4x - 1$, b) $f\colon y = \frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{11}{2}$.

7. Necht f je libovolná nekonstantní funkce. Vyberte z nabízených možností právě jednu tak, aby bylo tvrzení pravdivé.

   a) Grafy funkcí $f\colon\ y = f(x)$ a $g\colon\ y = f(-x)$ jsou $\left\{\begin{array}{l}\text{souměrné podle počátku}\\ \text{souměrné podle osy } y\end{array}\right\}$.

   b) Graf liché funkce je $\left\{\begin{array}{l}\text{souměrný podle počátku}\\ \text{souměrný podle osy } x\\ \text{souměrný podle osy } y\end{array}\right\}$.

   c) Grafy funkcí $f\colon\ y = f(x)$ a $g\colon\ y = |f(x)|$ jsou totožné, je-li $\left\{\begin{array}{l}f \text{ sudá funkce}\\ D(f) = \langle 0, \infty)\\ H(f) = \langle 0, \infty)\end{array}\right\}$.

   d) Grafy funkcí $f\colon\ y = f(x)$ a $g\colon\ y = -f(-x)$ jsou $\left\{\begin{array}{l}\text{souměrné podle počátku}\\ \text{souměrné podle osy } y\end{array}\right\}$.

   e) Je-li funkce $f\colon\ y = f(x)$ rostoucí, pak je funkce $g\colon\ y = -f(x)$ $\left\{\begin{array}{l}\text{rostoucí}\\ \text{klesající}\end{array}\right\}$.

   f) Je-li funkce f ryze monotónní, pak $\left\{\begin{array}{l}\text{je vždy prostá}\\ \text{nemusí být prostá}\end{array}\right\}$.

   g) Je-li funkce $f\colon\ y = f(x)$ lichá, pak funkce $g\colon\ y = -f(x)$ je $\left\{\begin{array}{l}\text{lichá}\\ \text{sudá}\\ \text{není lichá ani sudá}\end{array}\right\}$.

8. Rozhodněte, které z následujících tvrzení jsou pravdivá.

   a) Každá prostá funkce je ryze monotónní.
   b) Jestliže funkce není sudá, pak je lichá.
   c) Funkce f je rostoucí právě tehdy, když je funkce $-f$ klesající.
   d) Je-li f ryze monotónní na $\mathbb{R}$, pak existuje funkce f^{-1}.
   e) Jestliže pro každé $x \in D(f)$ platí $f(x) = |f(x)|$, pak je funkce f sudá.
   f) Složením dvou prostých funkcí vznikne prostá funkce.
   g) Jestliže platí $|f(0)| + |f(1)| = 0$, pak funkce f není rostoucí na intervalu $\langle 0, 1\rangle$.
   h) Je-li funkce f lichá, pak existuje inverzní funkce f^{-1}.
   i) Je-li funkce f sudá, pak není periodická.
   j) Jestliže pro každé $x \in D(f)$ platí $f(x) = -|f(x)|$, pak je funkce f prostá.

9. Najděte všechny funkce f, jejichž graf je souměrný vzhledem k ose x s grafem funkce

   a) $g(x) = f(-x)$, b) $g(x) = -f(-x)$, c) $g(x) = -f(x)$.

10. Dva přátelé šli na výlet a každý z nich vzal svého syna. Cestou museli překonat řeku na přenosné loďce, která unese jen 100 kg. Každý z přátel váží i s batohem 100 kg, každý z chlapců právě polovinu. Jak se dostali všichni přes řeku?

*****

Vědomosti vaší dcery se rovnají nule; pro postup do vyššího ročníku je třeba, aby je minimálně zdvojnásobila.

(Poznámka v žákovské knížce)

*****

Kapitola 4

Elementární funkce

Základními elementárními funkcemi budeme nazývat funkce exponenciální a logaritmické, mocninné, goniometrické a cyklometrické, hyperbolické a hyperbolometrické.

Elementárními funkcemi budeme nazývat funkce, které lze vytvořit ze základních elementárních funkcí pomocí konečného počtu operací sčítání, odčítání, násobení, dělení a skládání funkcí.

Průvodce studiem

Většina základních elementárních funkcí je probírána na střední škole, a proto lze tuto kapitolu považovat z velké části za opakování a souhrnné připomenutí základních vlastností těchto funkcí. Rozšířením oproti střední škole budou zřejmě pro většinu z vás pouze funkce cyklometrické, hyperbolické a hyperbolometrické.

Kapitola je rozdělena na menší oddíly (podkapitoly) věnované jednotlivým funkcím. Teorie je doplněna o velké množství řešených i neřešených příkladů k procvičení nových pojmů, se kterými jsme se seznámili v minulé kapitole. Jde především o určování definičního oboru, sudosti, lichosti a periodičnosti funkce a nalezení funkce inverzní. Další vlastnosti, např. monotonii, budeme vyšetřovat, až budeme mít k dispozici prostředky diferenciálního počtu.

Cíle

Po prostudování této kapitoly budete schopni

- určit definiční obor dané funkce,
- najít k dané funkci funkci inverzní,
- načrtnout grafy základních elementárních funkcí.

4.1 Funkce exponenciální a logaritmická

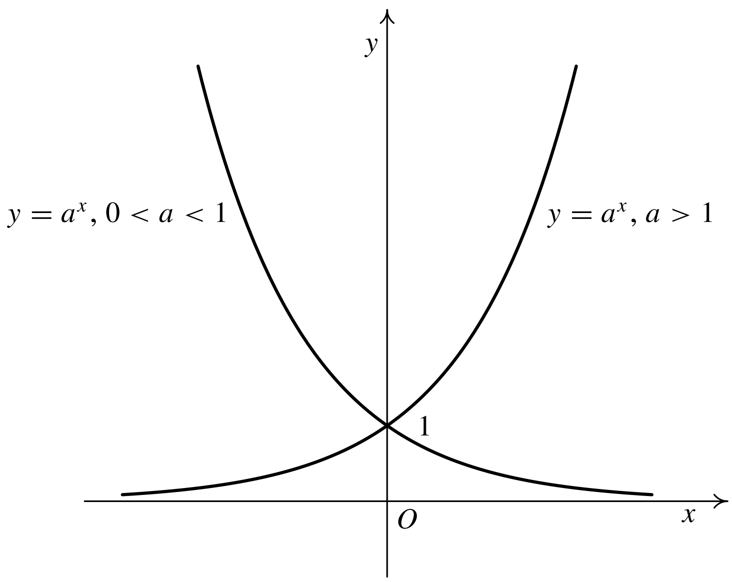
Existuje několik způsobů, jak zavést exponenciální a logaritmickou funkci. Jedním z nejčastějších způsobů je definovat exponenciální funkci pomocí součtu nekonečné mocninné řady a funkci logaritmickou zavést jako funkci inverzní k funkci exponenciální. Jiná možnost je nejdříve definovat logaritmickou funkci pomocí primitivní funkce, a pak funkci exponenciální zavést jako funkci k ní inverzní. V této chvíli však nemůžeme použít ani jednu ze zmíněných možností, neboť první případ předpokládá znalost nekonečných řad a druhý případ znalost integrálního počtu.

My vyjdeme z toho, co již známe. V kapitole 2.6 na str. 25 jsme definovali symbol a^r pro a kladné reálné a r libovolné reálné. Zvolíme-li číslo a pevné a měníme r, dostaneme funkci, kterou nazýváme exponenciální. Pokud naopak bereme r pevné a měníme a, pak dostáváme tzv. mocninnou funkci.

Exponenciální funkce

Nechť $a \in \mathbb{R}^+$. Funkci $f\colon\ y = a^x$, $x \in \mathbb{R}$, nazýváme *exponenciální funkcí o základu a*.

Graf:



Obr. 4.1

Vlastnosti:

- Definiční obor: $(-\infty, \infty)$.
- Obor hodnot: $(0, \infty)$.
- Funkce není ani sudá, ani lichá.
- Funkce není periodická pro $a \neq 1$.

- Funkce je rostoucí pro $a > 1$, klesající pro $0 < a < 1$, konstantní pro $a = 1$.

Pravidla pro počítání s exponenciální funkcí:

Nechť $a \in \mathbb{R}^+$. Pak pro každé $x, y \in \mathbb{R}$ platí:

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y, \qquad a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}, \qquad (a^x)^y = a^{xy}.$$

Poznámka 4.1.

1. Velmi významné místo mezi exponenciálními funkcemi zaujímá tzv. *přirozená exponenciální funkce* $f\colon\ y = \mathrm{e}^x$, kde e je tzv. Eulerovo číslo[1] ($\mathrm{e} = 2{,}718\,281\,828\,45\ldots$). Později, v kapitole o posloupnostech, si definujeme číslo e pomocí limity posloupnosti: $\mathrm{e} = \lim\limits_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n$.
2. Již jsme se zmínili o tom, že funkci $f\colon\ y = \mathrm{e}^x$ lze definovat pomocí součtu nekonečné mocninné řady. Jen pro zajímavost tuto řadu uveďme:
$$\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots.$$
3. Exponenciální funkce o základu 10 se nazývá *dekadická exponenciální funkce*.
4. Exponenciální funkce je důležitá pro modelování přírodních jevů, protože vyjadřuje „zákon přirozeného růstu“. Sem patří organický růst (např. množství dřeva v lese, počet obyvatelstva), vyrovnávání rozdílů (např. ochlazování, rozpouštění, vybíjení kondenzátoru), některé chemické reakce atd. Typickým příkladem přirozeného růstu je tzv. nepřetržité či spojité úrokování.

Logaritmická funkce

Uvažujme funkci $f\colon\ y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$, $x \in \mathbb{R}$. Tato funkce je prostá, proto k ní existuje funkce inverzní. Inverzní funkce f^{-1} k funkci f se nazývá *logaritmická funkce o základu a*. Přitom $D(f^{-1}) = H(f) = (0, \infty)$.

Označení: $\quad f^{-1}\colon\ y = \log_a x,\ a > 0,\ a \neq 1,\ x \in \mathbb{R}^+$.

Dle definice 3.24 tedy platí:

$$y = \log_a x \quad \Leftrightarrow \quad x = a^y, \qquad \text{kde} \quad x \in \mathbb{R}^+,\ y \in \mathbb{R},\ a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}.$$

[1] Označení e pro toto iracionální číslo zavedl roku 1731 L. Euler. Významem se Eulerovo číslo e vyrovnává Ludolfovu číslu π.

Vlastnosti:

- Definiční obor: $(0, \infty)$.
- Obor hodnot: $(-\infty, \infty)$.
- Funkce není ani sudá, ani lichá.
- Funkce není periodická.
- Funkce je rostoucí pro $a > 1$ a klesající pro $0 < a < 1$.

Pravidla pro počítání s logaritmy:

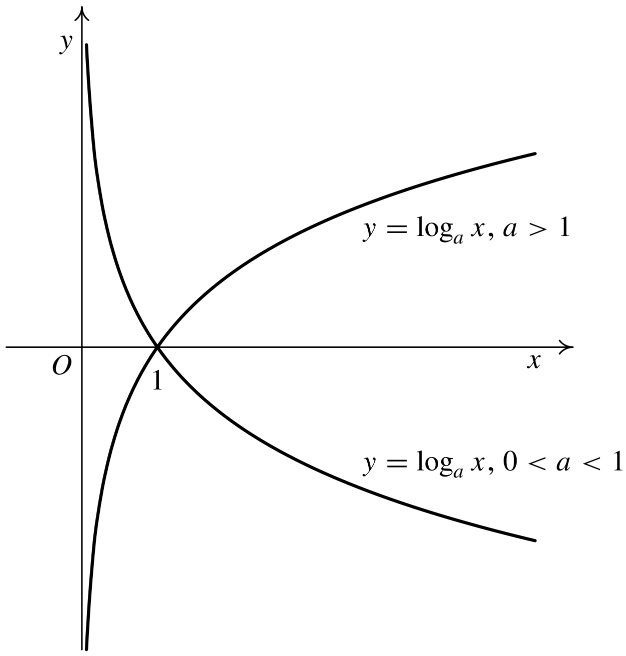
1. Nechť $a > 0$, $a \neq 1$. Pak platí:

$$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y \qquad \text{pro } x, y \in \mathbb{R}^+,$$
$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y \qquad \text{pro } x, y \in \mathbb{R}^+,$$
$$\log_a x^s = s \log_a x \qquad \text{pro } x \in \mathbb{R}^+,\ s \in \mathbb{R}.$$

2. Nechť $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$. Pak platí:

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} \qquad \text{pro } x \in \mathbb{R}^+.$$

Graf:



Obr. 4.2

Poznámka 4.2.

1. Funkční hodnoty logaritmické funkce se nazývají *logaritmy*. Symbol $\log_a x$ čteme: logaritmus čísla x o základu a.
2. Logaritmickou funkci o základu $a = \mathrm{e}$ (Eulerovo číslo) nazýváme *přirozenou logaritmickou funkcí* a označujeme $f\colon\ y = \ln x$. Její funkční hodnoty se nazývají *přirozené logaritmy*.
3. Logaritmickou funkci o základu $a = 10$ nazýváme *dekadickou logaritmickou funkcí* a označujeme $f\colon\ y = \log_{10} x$ nebo $f\colon\ y = \log x$. Její funkční hodnoty se nazývají *dekadické logaritmy*.
4. Všimněme si nyní složení funkce exponenciální a logaritmické. Je-li

$$\begin{aligned} f\colon y &= a^x,\ a > 0,\ a \neq 1, && D(f) = (-\infty, +\infty),\ H(f) = (0, +\infty),\\ f^{-1}\colon y &= \log_a x,\ a > 0,\ a \neq 1, && D(f^{-1}) = (0, +\infty),\ H(f^{-1}) = (-\infty, +\infty), \end{aligned}$$

pak platí:

$$\begin{aligned} (f \circ f^{-1})(x) &= a^{\log_a x} = x && \text{pro } x \in \mathbb{R}^+,\\ (f^{-1} \circ f)(x) &= \log_a a^x = x && \text{pro } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

5. Vztah mezi exponenciální funkcí o základu a a o základu e je dán rovností

$$a^x = \mathrm{e}^{x \cdot \ln a} \qquad \text{pro } a > 0,\ a \neq 1,\ \ x \in \mathbb{R}.$$

Příklad 4.3. Určete definiční obor funkce $f\colon\ y = \log_{\frac{1}{3}} \dfrac{x-3}{x+3}$.

Řešení. Aby měl logaritmus smysl, musí platit $\frac{x-3}{x+3} > 0$. Zlomek je kladný, jestliže je současně čitatel i jmenovatel kladný nebo současně čitatel i jmenovatel záporný, tj.

$$\begin{aligned} (x - 3 > 0 \quad \wedge \quad x + 3 > 0) \quad &\vee \quad (x - 3 < 0 \quad \wedge \quad x + 3 < 0),\\ (x > 3 \quad \wedge \quad x > -3) \quad &\vee \quad (x < 3 \quad \wedge \quad x < -3),\\ (x > 3) \quad &\vee \quad (x < -3). \end{aligned}$$

Odtud $D(f) = (-\infty, -3) \cup (3, \infty)$. ▲

Příklad 4.4. Určete definiční obor funkce $g\colon\ y = \log_{\frac{1}{3}}(x-3) - \log_{\frac{1}{3}}(x+3)$.

Řešení. Rozdíl funkcí je definován na průniku definičních oborů jednotlivých funkcí. Tedy dostáváme dvě podmínky

$$x - 3 > 0 \qquad \wedge \qquad x + 3 > 0.$$

Z toho $D(f) = (3, \infty)$. ▲

Poznámka 4.5. Uvažujme funkci $f\colon\ y = \log_{\frac{1}{3}} \frac{x-3}{x+3}$ z příkladu 4.3, jejíž definiční obor je $D(f) = (-\infty, -3) \cup (3, \infty)$ a funkci $g\colon\ y = \log_{\frac{1}{3}}(x-3) - \log_{\frac{1}{3}}(x+3)$ z příkladu 4.4, jejíž definiční obor je $D(g) = (3, \infty)$.

Podle pravidel pro počítání s logaritmy platí

$$\log_{\frac{1}{3}} \frac{x-3}{x+3} = \log_{\frac{1}{3}}(x-3) - \log_{\frac{1}{3}}(x+3).$$

Jak je možné, že platí uvedená rovnost a funkce f a g, jež vystupují na levé a pravé straně rovnosti, se nerovnají (mají jiný definiční obor)?

Podívejme se znovu na tabulku pravidel pro počítání s logaritmy. Vidíme, že vztah pro logaritmus podílu

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

platí pro $x, y \in \mathbb{R}^+$.

Tedy funkce f je sice definována pro každé $x \in (-\infty, -3) \cup (3, \infty)$, ale daná rovnost platí pouze pro $x \in (3, \infty)$.

Zapamatujte si proto, upravíme-li nějaký vztah užitím pravidel pro počítání s logaritmy, může dojít ke změně definičního oboru. Tyto podmínky je třeba hlídat například při řešení logaritmických rovnic a nerovnic.

Příklad 4.6. Určete definiční obor funkce $f\colon\ y = \sqrt{\ln(x^2-1)}$.

Řešení. Definiční obor je množina takových $x \in \mathbb{R}$, pro něž má výraz smysl.

$$\begin{aligned} D(f) &= \left\{x \in \mathbb{R}\colon\ \sqrt{\ln(x^2-1)} \text{ „má smysl“}\right\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R}\colon\ \ln(x^2-1) \geqq 0\}. \end{aligned}$$

Najděme nyní řešení podmínky $\ln(x^2-1) \geqq 0$. Vzhledem k tomu, že přirozený logaritmus je rostoucí funkce a $\ln 1 = 0$, musí být $x^2 - 1 \geqq 1$. Tedy

$$\begin{aligned} D(f) &= \{x \in \mathbb{R}\colon\ x^2 - 1 \geqq 1\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R}\colon\ x^2 - 2 \geqq 0\} = \\ &= \left(-\infty, -\sqrt{2}\right\rangle \cup \left\langle\sqrt{2}, +\infty\right). \end{aligned}$$ ▲

Příklad 4.7. Určete definiční obor funkce $f\colon\ y = \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{\ln(2x-3)}$.

Řešení. Víme, že definiční obor je množina takových $x \in \mathbb{R}$, pro něž má výraz smysl. Zlomek má smysl, jestliže je jmenovatel různý od nuly a mají smysl funkce v čitateli a jmenovateli, tj.

$$
\begin{aligned}
D(f) &= \{x \in \mathbb{R}\colon\ \ln(2x-3) \neq 0 \ \wedge\ \sqrt{x^2-1} \text{ „má smysl“ } \wedge\ \ln(2x-3) \text{ „má smysl“}\}\\
&= \{x \in \mathbb{R}\colon\ 2x-3 \neq 1 \ \wedge x^2-1 \geqq 0 \ \wedge\ 2x-3 > 0\} =\\
&= \left\{x \in \mathbb{R}\colon\ x \neq 2 \ \wedge\ (x-1)(x+1) \geqq 0 \ \wedge\ x > \frac{3}{2}\right\}.
\end{aligned}
$$

Podmínka $(x+1)(x-1) \geqq 0$ je splněna, jestliže oba činitelé $x+1$ a $x-1$ mají stejné znaménko. Postupně dostáváme:

$$
\begin{aligned}
(x+1 \geqq 0 \wedge x-1 \geqq 0) \quad &\vee \quad (x+1 \leqq 0 \wedge x-1 \leqq 0),\\
(x \geqq -1 \ \wedge\ x \geqq 1) \quad &\vee \quad (x \leqq -1 \ \wedge\ x \leqq 1),\\
(x \geqq 1) \quad &\vee \quad (x \leqq -1).
\end{aligned}
$$

Tedy $x \in (-\infty, -1\rangle \cup \langle 1, +\infty)$. Celkově definiční obor

$$
\begin{aligned}
D(f) &= \left\{x \in \mathbb{R}\colon\ x \neq 2 \ \wedge\ x \in (-\infty,-1\rangle \cup \langle 1, +\infty) \ \wedge\ x > \frac{3}{2}\right\} =\\
&= \left(\frac{3}{2}, 2\right) \cup (2, \infty).
\end{aligned}
$$

▲

Příklad 4.8. Je dána funkce $f\colon\ y = \sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}$. Určete funkci f^{-1} inverzní k funkci f.

Řešení.

1. Určeme nejprve definiční obor funkce f.

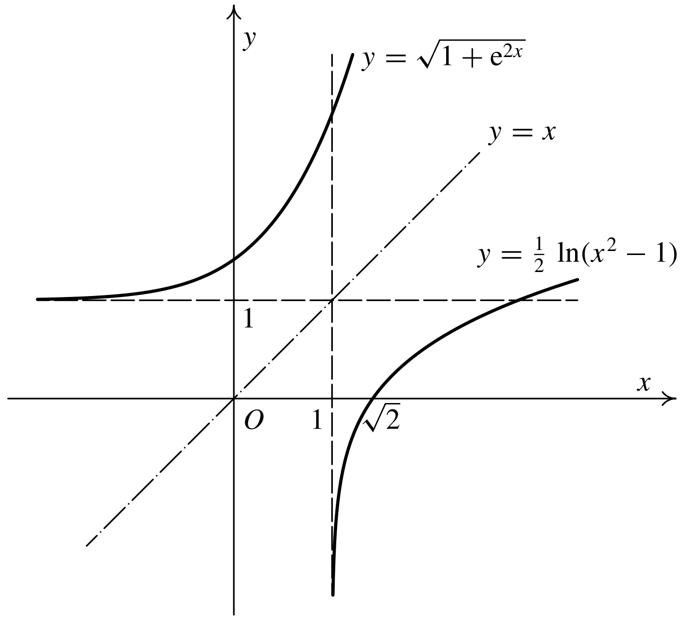
$$
\begin{aligned}
D(f) &= \left\{x \in \mathbb{R}\colon\ \sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}} \text{ „má smysl“}\right\} =\\
&= \{x \in \mathbb{R}\colon\ 1+\mathrm{e}^{2x} \geqq 0\}.
\end{aligned}
$$

   Podmínka $1+\mathrm{e}^{2x} \geqq 0$ je splněna vždy, neboť pro každé $x \in \mathbb{R}$ je $\mathrm{e}^{2x} > 0$, a tedy i $1+\mathrm{e}^{2x} > 0$. Proto $D(f) = \mathbb{R}$.

2. Ověříme, zda je funkce f prostá. Funkce f vznikla složením následujících funkcí

$$f_1\colon\ u = 2x, \quad f_2\colon\ v = 1+\mathrm{e}^u, \quad f_3\colon\ y = \sqrt{v}.$$

   Funkce f_1, f_2 i f_3 jsou prosté (rostoucí nebo klesající). Podle poznámky 3.23 víme, že složením prostých funkcí dostaneme zase funkci prostou. Tedy funkce f je prostá, a tudíž existuje funkce f^{-1} inverzní k funkci f.



3. K nalezení funkce f^{-1} využijeme definici 3.24:

   i) Nejprve určíme definiční obor funkce inverzní, který je roven oboru hodnot $H(f)$ funkce f. Zřejmě

   $$x \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad e^{2x} \in (0, \infty) \quad \Leftrightarrow \quad 1 + e^{2x} \in (1, \infty).$$

   Dále víme, že funkce odmocnina zobrazí interval $(1, \infty)$ na interval $(1, \infty)$, tedy $\sqrt{1 + e^{2x}} \in (1, \infty)$. Celkem

   $$D(f^{-1}) = H(f) = (1, \infty).$$

   ii) K určení předpisu funkce f^{-1} využijeme vztah $f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$, který platí pro každé $y \in D(f^{-1})$. Vyjdeme z rovnice $y = f(x)$, tj. $y = \sqrt{1 + e^{2x}}$, a vyjádříme x v závislosti na y.
   Pro každé $y \in (1, \infty)$ platí

   $$y = \sqrt{1 + e^{2x}} \quad \Leftrightarrow \quad y^2 = 1 + e^{2x} \quad \Leftrightarrow \quad y^2 - 1 = e^{2x} \quad \overset{(\star)}{\Leftrightarrow}$$
   $$\overset{(\star)}{\Leftrightarrow} \quad \ln(y^2 - 1) = 2x \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{2}\ln(y^2 - 1).$$

   $(\star)$: Protože $y > 1$, je $y^2 - 1 > 0$, a je tedy možno logaritmovat ($\ln z = u \Leftrightarrow z = e^u,\ u \in \mathbb{R}$).

Inverzní funkce f^{-1} k funkci f je

$$f^{-1}\colon\ x = \frac{1}{2}\ln(y^2 - 1), \quad y \in (1, \infty).$$

Po přeznačení proměnných

$$f^{-1}\colon\ y = \frac{1}{2}\ln(x^2 - 1), \quad x \in (1, \infty).$$

▲

Pojmy k zapamatování

Σ

— exponenciální funkce,
— logaritmická funkce.

Kontrolní otázky

?

1. Pro které hodnoty základu a je exponenciální funkce rostoucí a pro které je klesající?
2. Jakých hodnot může nabývat základ logaritmické funkce?
3. Pro které hodnoty základu a je logaritmická funkce rostoucí a pro které je klesající?
4. Vyslovte základní pravidla pro počítání s logaritmy.
5. Co rozumíme pojmy dekadický a přirozený logaritmus?
6. Jak se změní logaritmus čísla $x > 0$, jestliže místo základu $a > 0$, $a \neq 1$ vezmeme jiný základ $b > 0$, $b \neq 1$?

Příklady k procvičení

!

1. Určete.

a) $\log_3 9$, b) $\log_5 25$, c) $\log_{10} \dfrac{1}{10}$, d) $\log_7 1$, e) $\log_2 \dfrac{1}{4}$.

2. Stanovte n tak, aby platily následující rovnosti:

a) $\log_2 n = 5$, b) $\log_2 n = 0$, c) $\log_2 n = \dfrac{1}{3}$,
d) $\log_5 n = -3$, e) $\log_3 n = -2$, f) $\log_3 n = -\dfrac{1}{4}$.

3. Stanovte z tak, aby platily následující rovnosti:

a) $\log_z 5 = \dfrac{1}{2}$, b) $\log_z 4 = 2$, c) $\log_z 100 = 2$,
d) $\log_z 1 = 0$, e) $\log_z \dfrac{1}{10000} = 2$.

4. Určete definiční obory funkcí.

a) $f\colon y = \ln(2 - x)$, b) $f\colon y = \ln(x^2 - 4)$,
c) $f\colon y = \mathrm{e}^{\sqrt{x^2-1}}$, d) $f\colon y = \ln(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})$,
e) $f\colon y = \ln\left|\sqrt{1 - |x|}\right| + \dfrac{1}{\sqrt{x + \frac{1}{2}}}$, f) $f\colon y = \log_a (x - 4)(x - 1)$,
g) $f\colon y = \ln \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x}$, h) $f\colon y = \ln \mathrm{e}^x + \ln \sqrt{3 - 2x - x^2}$,
i) $f\colon y = \log_a (1 - x^2)$, j) $f\colon y = \log_a \sqrt{x + 2}$,
k) $f\colon y = \log_a \dfrac{x - 3}{x + 2}$.

5. Zjistěte, zda je daná funkce sudá nebo lichá.

   a) $f\colon y = \ln \dfrac{2-x}{2+x}$, b) $f\colon y = \dfrac{a^x+1}{a^x-1}$.

6. K daným funkcím sestrojte inverzní funkce a určete $D(f^{-1})$.

   a) $f\colon y = \ln(2-x)$, b) $f\colon y = 1 + \sqrt{3+\mathrm{e}^{2x}}$, c) $f\colon y = \dfrac{4+\mathrm{e}^x}{4-\mathrm{e}^x}$,

   d) $f\colon y = \ln(5-2x)$, e) $f\colon y = \sqrt{3-\mathrm{e}^x}$, f) $f\colon y = \dfrac{2+\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x}$.

7. Pomocí grafu funkce $f\colon y = 2^x$ nakreslete grafy následujících funkcí:

   a) $f\colon y = 2^{-x}$, b) $f\colon y = 2^{|x|}$, c) $f\colon y = 1 + 2^{-x}$,

   e) $f\colon y = -2^x$, f) $f\colon y = 2^{x^2}$, g) $f\colon y = 2^{\frac{1}{x}}$.

8. Pomocí grafu funkce $f\colon y = \ln x$ nakreslete grafy následujících funkcí:

   a) $f\colon y = \ln(-x)$, b) $f\colon y = -\ln x$, c) $f\colon y = \ln|x|$,

   d) $f\colon y = \ln x^2$, e) $f\colon y = \ln \dfrac{1}{x}$.

4.2 Funkce mocninné

A) Mocninná funkce s přirozeným exponentem a funkce *n*-tá odmocnina

Nechť $n \in \mathbb{N}$. Funkci

$$f\colon\ y = x^n,\ x \in \mathbb{R}, \qquad \text{kde } x^n = \underbrace{x \cdot x \cdots x}_{n\text{-krát}},$$

nazýváme *mocninnou funkcí s přirozeným exponentem.*

Vlastnosti:

Funkce $f\colon\ y = x^n$, kde n je sudé, má definiční obor $D(f) = \mathbb{R}$ a obor hodnot $H(f) = \langle 0, \infty)$. Je to sudá funkce, zdola ohraničená, klesající na intervalu $(-\infty, 0\rangle$ a rostoucí na intervalu $\langle 0, \infty)$.

Funkce $f\colon\ y = x^n$, kde n je liché, má definiční obor $D(f) = \mathbb{R}$ a obor hodnot $H(f) = \mathbb{R}$. Je to lichá funkce, není zdola ani shora ohraničená, je rostoucí na $D(f)$.

Pro n liché je funkce $f\colon\ y = x^n$ prostá na celém $\mathbb{R}$. Existuje tedy funkce f^{-1} inverzní k funkci f.

Pro n sudé funkce $f\colon\ y = x^n$ není prostá. Pokud však funkci f budeme uvažovat jen na intervalu $\langle 0, \infty)$, pak je tato nová funkce prostá a existuje k ní funkce inverzní.

Funkci *n-tá odmocnina* ($n \in \mathbb{N}, n \geqq 2$) definujeme:

1. pro n sudé jako funkci inverzní k funkci $f\colon\ y = x^n$, $x \in \langle 0, \infty)$,
2. pro n liché jako funkci inverzní k funkci $f\colon\ y = x^n$, $x \in \mathbb{R}$.

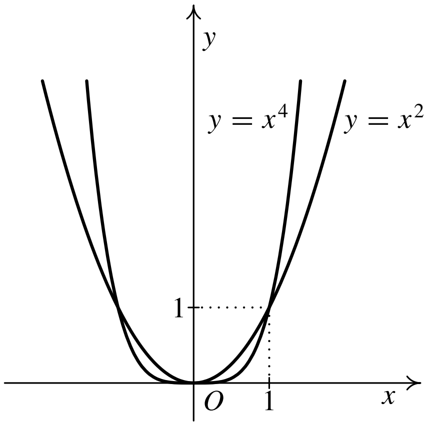
Funkci n-tá odmocnina označujeme $f\colon\ y = \sqrt[n]{x}$.

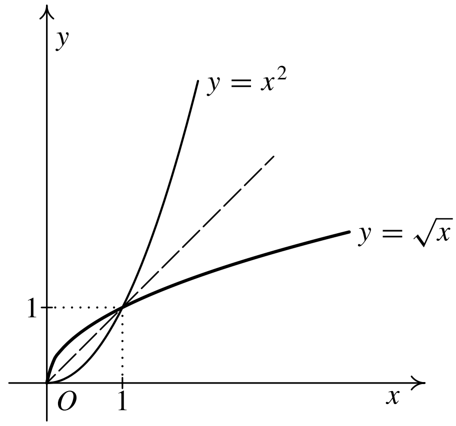
Vlastnosti:

Funkce $f\colon\ y = \sqrt[n]{x}$, kde n je sudé, má definiční obor $D(f) = \langle 0, \infty)$ a obor hodnot $H(f) = \langle 0, \infty)$. Funkce není sudá ani lichá, je rostoucí na $D(f)$ a je zdola ohraničená.

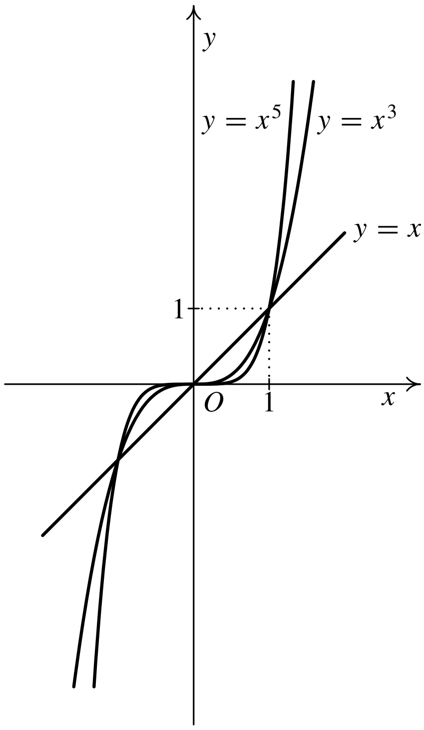
Funkce $f\colon\ y = \sqrt[n]{x}$, kde n je liché ($n \geqq 3$), má definiční obor $D(f) = \mathbb{R}$ a obor hodnot $H(f) = \mathbb{R}$. Je to lichá funkce, není zdola ani shora ohraničená, je rostoucí na $D(f)$.

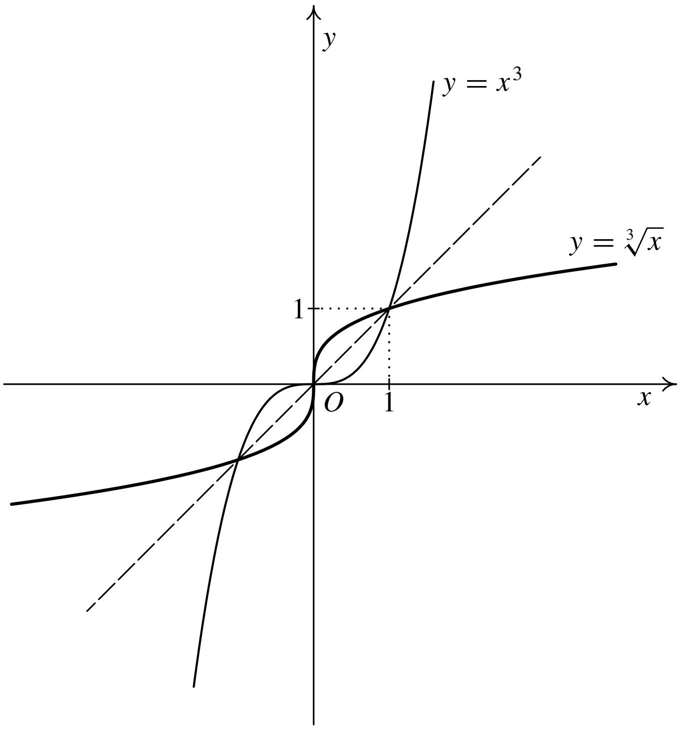
Na následujícím obrázku vlevo jsou uvedeny grafy funkcí $f\colon\ y = x^2$ a $f\colon\ y = x^4$ (obdobně vypadají grafy všech funkcí $f\colon\ y = x^n$ pro n sudé). Na obrázku vpravo jsou pak grafy funkcí $f\colon\ y = x^2$ a $f\colon\ y = \sqrt{x}$.





Na dalším obrázku vlevo jsou uvedeny grafy funkcí $f\colon\ y = x$, $f\colon\ y = x^3$ a $f\colon\ y = x^5$ (obdobně vypadají grafy všech funkcí $f\colon\ y = x^n$ pro n liché). Na obrázku vpravo jsou pak grafy funkcí $f\colon\ y = x^3$ a $f\colon\ y = \sqrt[3]{x}$.





Příklad 4.9. Rozhodněte, zda mají smysl následující výrazy, a je-li možno, určete jejich hodnotu: $\sqrt[3]{8}$, $\sqrt[3]{-8}$, $\sqrt[4]{16}$, $\sqrt[4]{-16}$, $\sqrt[5]{0}$.

Řešení. $\sqrt[3]{8} = 2$, $\sqrt[3]{-8} = -2$, $\sqrt[4]{16} = 2$, $\sqrt[5]{0} = 0$.
Výraz $\sqrt[4]{-16}$ nemá smysl, protože sudé odmocniny jsou definovány jen z kladných čísel a nuly. ▲

Zapamatujte si:

1. Sudé odmocniny jsou definovány jen pro $x \in \langle 0, \infty)$.
   (! Není pravda, že $\sqrt{-4} = -2$.)
2. Liché odmocniny jsou definovány pro všechna $x \in \mathbb{R}$.
3. Odmocnina je funkce, proto je dána jednoznačně.
   (! Není pravda, že $\sqrt{4} = \pm 2$. Správně je pouze $\sqrt{4} = 2$.)

Uvědomte si, že pracujeme v množině reálných čísel. Jinak bychom s těmito výrazy zacházeli v množině komplexních čísel.

B) Mocninná funkce se záporným celým exponentem

Nechť $n \in \mathbb{N}$. Funkci

$$f\colon\ y = x^{-n},\ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \qquad \text{kde } x^{-n} = \frac{1}{x^n} = \frac{1}{x \cdot x \cdots x}\,,$$

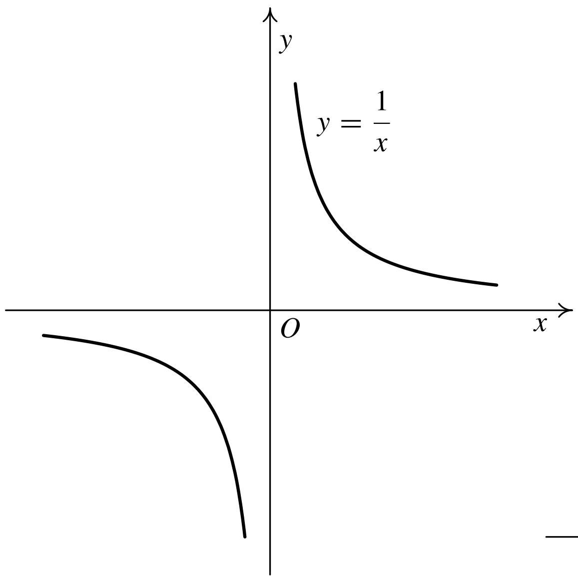
nazýváme *mocninnou funkcí se záporným celým exponentem.*

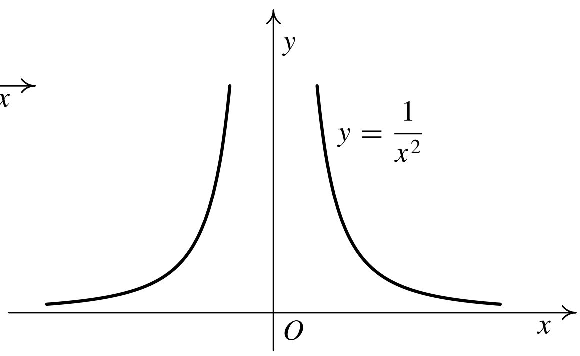
Vlastnosti:

Funkce $f\colon\ y = x^{-n}$, kde n je sudé, má definiční obor $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ a obor hodnot $H(f) = (0, \infty)$. Je to sudá funkce, zdola ohraničená, klesající na intervalu $(0, \infty)$ a rostoucí na intervalu $(-\infty, 0)$.

Funkce $f\colon\ y = x^{-n}$, kde n je liché, má definiční obor $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ a obor hodnot $H(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Je to lichá funkce, není zdola ani shora ohraničená, je klesající na intervalu $(-\infty, 0)$ a klesající na intervalu $(0, \infty)$.

Pro ilustraci uvádíme graf funkce $f\colon\ y = x^{-1}$ (obdobně vypadá každá funkce $f\colon\ y = x^{-n}$, kde n je liché) a graf funkce $g\colon\ y = x^{-2}$ (obdobně vypadají všechny funkce $g\colon\ y = x^{-n}$, kde n je sudé).





C) Mocninná funkce s racionálním exponentem

Nechť $r \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$, $r = \frac{m}{n}$ $(m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N},\ n \geqq 2)$ a nechť $\frac{p}{q}$ je zlomek v základním tvaru (tj. $p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N},\ q \geqq 2$ a čísla p, q jsou *nesoudělná*) takový, že $r = \frac{p}{q} = \frac{m}{n}$. Pak funkci

$$f\colon\ y = x^r, \quad \text{kde} \quad x^r = x^{\frac{m}{n}} = x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p},$$

nazýváme *mocninnou funkcí s racionálním exponentem* $r \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$.

Přitom definiční obor takto definované funkce závisí na číslech p a q. Celkem mohou nastat tyto čtyři případy:

Je-li $p > 0$ a q liché, pak je $D(f) = \mathbb{R}$,
je-li $p < 0$ a q liché, pak je $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$,
je-li $p > 0$ a q sudé, pak je $D(f) = \langle 0, \infty)$,
je-li $p < 0$ a q sudé, pak je $D(f) = (0, \infty)$.

Poznámka 4.10.

1. Pokud není racionální exponent (zlomek) v základním tvaru, musíme ho nejdříve upravit na základní tvar.
2. Předpoklad nesoudělnosti čísel p, q (který je podstatný), nám umožní pracovat s q-tými odmocninami (pro q liché) ze záporných čísel. Například

$$(-8)^{\frac{2}{6}} = (-8)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-8} = -2.$$

Kdybychom vynechali předpoklad nesoudělnosti čísel p a q, pak by definice nebyla korektní, neboť bychom dostali $(-8)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-8)^2} = \sqrt[6]{64} = 2$ a zároveň $(-8)^{\frac{1}{3}} =$ $= \sqrt[3]{-8} = -2$.

Příklad 4.11. Rozhodněte, zda mají smysl následující výrazy, a je-li možno, určete jejich hodnotu: $4^{\frac{2}{4}}$, $(-8)^{\frac{6}{4}}$, $8^{\frac{4}{6}}$, $(-8)^{\frac{4}{6}}$, $(-64)^{\frac{2}{6}}$, $8^{-\frac{4}{6}}$, $(-64)^{-\frac{2}{6}}$.

Řešení.

a) $4^{\frac{2}{4}} = 4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2$,

b) $(-8)^{\frac{6}{4}}$ nemá dle definice smysl, neboť $\frac{6}{4} = \frac{3}{2}$ a mocninná funkce s takovýmto exponentem je definována pouze pro nezáporné hodnoty,

c) $8^{\frac{4}{6}} = 8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$,

d) $(-8)^{\frac{4}{6}} = (-8)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{(-8)^2} = \sqrt[3]{64} = 4$,

e) $(-64)^{\frac{2}{6}} = (-64)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-64} = -4$,

f) $8^{-\frac{4}{6}} = 8^{-\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^{-2}} = \sqrt[3]{\frac{1}{8^2}} = \sqrt[3]{\frac{1}{64}} = \frac{1}{4}$,

g) $(-64)^{-\frac{2}{6}} = (-64)^{-\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{(-64)^{-1}} = \sqrt[3]{\frac{-1}{64}} = -\frac{1}{4}$.

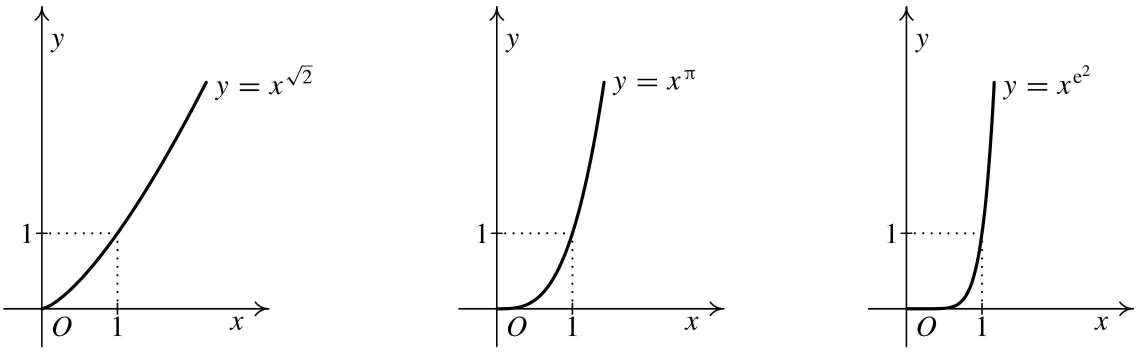
▲

D) Mocninná funkce s reálným exponentem

Znovu připomeňme, že v kapitole 2.6 na str. 25 jsme definovali symbol a^r pro a kladné reálné a r libovolné reálné. Naše definice mocninné funkce $f\colon\ y = x^r$ s přirozeným exponentem, se záporným celým exponentem a s racionálním exponentem (odstavce A), B) a C)) jsou v souladu s dříve zavedeným symbolem a^r. Pouze jsme poněkud rozšířili definiční obory těchto funkcí. Zbývá nám mocninná funkce s iracionálním exponentem. Přitom symbol a^r pro $a > 0$, $r \in \mathbb{I}$ byl definován pomocí suprema na str. 25.

Nechť $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Funkci $f\colon\ y = x^r$, $x \in \mathbb{R}^+$, nazýváme *mocninnou funkcí s reálným exponentem* $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Na následujících obrázcích jsou příklady funkce $f\colon\ y = x^r$, kde r jsou iracionální čísla $\sqrt{2}$, π, e^2.



Obr. 4.3: Grafy funkcí $f\colon\ y = x^{\sqrt{2}}$, $f\colon\ y = x^{\pi}$, $f\colon\ y = x^{\mathrm{e}^2}$.

E) Mocninná funkce s nulovým exponentem

Jestli jste pozorně studovali odstavce A), B), C) a D), jistě vám neuniklo, že jsme doposud nedefinovali funkci $f\colon\ y = x^r$ pro $r = 0$. To nyní napravíme:

Pro každé $x \in \mathbb{R}$ definujeme $x^0 = 1$.

Je-li tedy $r = 0$, pak je mocninná funkce $f\colon\ y = x^r$, $x \in \mathbb{R}$, rovna konstantní funkci $f\colon\ y = 1$.

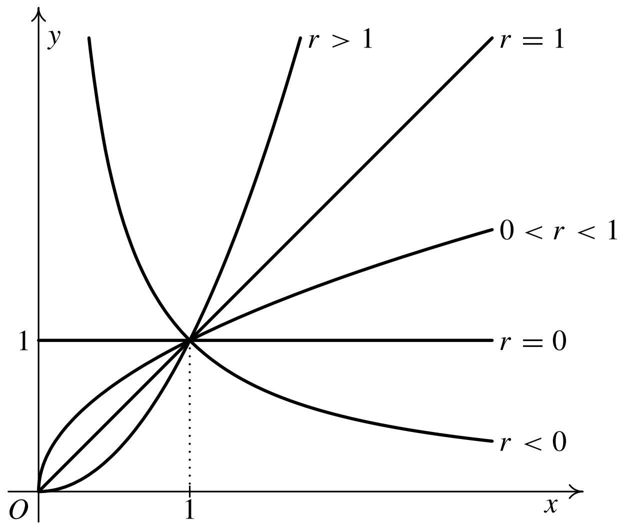
Tím máme funkci $f\colon\ y = x^r$ definovánu pro všechna různá $r \in \mathbb{R}$.

Z jednotlivých definic mocninných funkcí pro různé exponenty vidíme, že funkce $f\colon\ y = x^r$ je ve všech případech definována na intervalu $(0, +\infty)$ (v některých případech i na širších intervalech). Na tomto intervalu platí následující vztah

$$x^r = \mathrm{e}^{r\cdot\ln x}, \qquad x \in \mathbb{R}^+,\ r \in \mathbb{R}.$$

Všimněme si nyní monotonie funkce $f\colon\ y = x^r$, $x \in (0, +\infty)$ pro různé hodnoty exponentu r. Je-li $r < 0$, je f klesající funkce, je-li $r = 0$, dostáváme konstantní funkci

$f: y = 1$, pro $0 < r < 1$ je f rostoucí funkce, pro $r = 1$ dostáváme lineární rostoucí funkci $f: y = x$ a konečně pro $r > 1$ je f rostoucí funkce. Přehledně jsou všechny možnosti ilustrovány na následujícím obrázku.



Z předchozí úvahy o monotonii funkce $f: y = x^r$ vyplývají pravidla pro úpravy nerovností.

Nechť $x, y \in \mathbb{R}^+$, $a, b \in \mathbb{R}$. Pak platí

1. $x^a > 0$;
2. je-li $x < y$, $a > 0$, pak $x^a < y^a$; (např. $2^3 < 7^3$, $\left(\frac{1}{2}\right)^5 < \left(\frac{4}{3}\right)^5$);
3. je-li $x < y$, $a < 0$, pak $x^a > y^a$; (např. $2^{-4} > 7^{-4}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{-5} > \left(\frac{4}{3}\right)^{-5}$);
4. je-li $x > 1$, $a < b$, pak $x^a < x^b$; (např. $3^2 < 3^5$, $\left(\frac{17}{9}\right)^7 < \left(\frac{17}{9}\right)^8$);
5. je-li $x < 1$, $a < b$, pak $x^a > x^b$; (např. $\left(\frac{1}{2}\right)^2 > \left(\frac{1}{2}\right)^5$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} > \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$).

Závěrem ještě připomeňme základní pravidla pro počítání s mocninami a odmocninami.

Nechť $x, y \in \mathbb{R}^+$, $a, b \in \mathbb{R}$. Pak platí

1. $x^a y^a = (xy)^a$; $\quad \dfrac{x^a}{y^a} = \left(\dfrac{x}{y}\right)^a$; $\quad \dfrac{1}{x^a} = \left(\dfrac{1}{x}\right)^a$;
2. $x^a x^b = x^{a+b}$; $\quad \dfrac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$; $\quad x^{-a} = \dfrac{1}{x^a}$; $\quad (x^a)^b = x^{ab}$.

Nechť $x, y \in \mathbb{R}^+$, $m, n \in \mathbb{N}$, $m, n \geqq 2$. Pak platí

1. $\sqrt[n]{x \cdot y} = \sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y}$; $\quad \sqrt[n]{\dfrac{x}{y}} = \dfrac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$;
2. $\sqrt[n]{x^k} = (\sqrt[n]{x})^k$, $\; k \in \mathbb{Z}$; $\quad \sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[m \cdot n]{x}$; $\quad (\sqrt[n]{x})^n = \sqrt[n]{x^n} = x$.

Všimněte si, že všechny uvedené vzorce platí pro $x > 0$, $y > 0$. Například $\sqrt{x^2} = x$ platí pouze pro kladná x! Obecně pro $x \in \mathbb{R}$ platí $\sqrt{x^2} = |x|$.

Příklad 4.12. Je dána funkce $f\colon y = 4x^2 - 4x + 2$, $x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right\rangle$. Určete funkci f^{-1} inverzní k funkci f.

Řešení.

1. Definiční obor je zadán: $D(f) = \left(-\infty, \frac{1}{2}\right\rangle$.
2. Ověříme, zda je funkce f prostá. Jedná se o kvadratickou funkci, jejímž grafem je parabola. Pomocí „úpravy na čtverec" zjistíme vrchol paraboly:
$$4x^2 - 4x + 2 = 4\left(x^2 - x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) + 2 = 4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - 1 + 2 = 4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 1.$$
Parabola má tedy vrchol v bodě $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$. Funkce f je proto na zadaném intervalu $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right\rangle$ klesající, a tudíž prostá.
3. K nalezení funkce f^{-1} využijeme definici 3.24:
   i) Nejprve určíme definiční obor funkce inverzní, který je roven oboru hodnot $H(f)$ funkce f. Víme, že funkce f je na intervalu $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right\rangle$ klesající a bod $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ je vrchol paraboly. Tedy obor hodnot je interval $\langle 1, \infty)$.
$$D(f^{-1}) = H(f) = \langle 1, \infty).$$
   ii) K určení předpisu funkce f^{-1} využijeme vztah $f^{-1}(y) = x \;\Leftrightarrow\; f(x) = y$, který platí pro každé $y \in D(f^{-1})$. Vyjděme tedy z rovnice $y = f(x)$, tj. $y = 4x^2 - 4x + 2$, a vyjádřeme x v závislosti na y.
   Pro každé $y \in \langle 1, \infty)$ platí
$$y = 4x^2 - 4x + 2 \quad\Leftrightarrow\quad y = 4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 1 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{y-1}{4} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \quad\overset{(\star)}{\Leftrightarrow}$$
$$\overset{(\star)}{\Leftrightarrow}\quad \sqrt{\frac{y-1}{4}} = \left|x - \frac{1}{2}\right| \quad\overset{(\star\star)}{\Leftrightarrow}\quad \sqrt{\frac{y-1}{4}} = -x + \frac{1}{2} \quad\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\quad x = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{y-1}}{2}.$$
   ($\star$): Zde bylo podstatné, že $y \in \langle 1, \infty)$.
   ($\star\star$): Protože $x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right\rangle$, je $\left|x - \frac{1}{2}\right| = -x + \frac{1}{2}$.

   Inverzní funkce f^{-1} k funkci f je
$$f^{-1}\colon\; x = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{y-1}\right), \quad y \in \langle 1, \infty).$$
   Po přeznačení proměnných
$$f^{-1}\colon\; y = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{x-1}\right), \quad x \in \langle 1, \infty).$$
▲

Pro zájemce:

Zkusme se zamyslet nad funkcí $f\colon y = x^{10}$. Je $f(0) = 0$, $f(0{,}8) \doteq 0{,}107$, $f(1) = 1$, ale $f(10) = 10^{10} = 10\,000\,000\,000$ je deset miliard! Představme si, že bychom chtěli nakreslit graf této funkce pro x z intervalu $\langle 0, 10\rangle$ a chtěli volit na obou osách stejná měřítka s jednotkou délky 1 cm. Jak bychom odpověděli na otázku, zda jsme ochotni zaplatit potřebný papír? Počítejme: Potřebujeme obdélník o základně 10 cm a výšce 10^{10} cm. Jeho plocha je tudíž $10 \cdot 10^{10} = 10^{11}\ \text{cm}^2 = 10^7\ \text{m}^2 = 10\ \text{km}^2$. Balík 500 listů běžného kancelářského papíru A4 o rozměrech 210 mm × 297 mm stojí 110 Kč. Jeho plocha je $0{,}210 \cdot 0{,}297 \cdot 500 \doteq 31{,}185\ \text{m}^2$. Potřebovali bychom tedy $10^7/31{,}185 \doteq 320\,667$ balíků, jejichž cena by byla $320\,667 \cdot 110 \doteq 35\,273\,370$ Kč. Unesla by to naše kapsa?

Přitom graf by byl poměrně nezajímavý, našemu oku by se jevil skoro jako otočené velké L. Až skoro po jedničku by to byla zdánlivě téměř vodorovná úsečka a kousek za jedničkou by vypadal skoro jako svislá úsečka. (Srovnejte graf funkce $f\colon\ y = x^{e^2}$ na obr. 4.3)

Je tedy vidět, že obyčejná mocninná funkce $f\colon\ y = x^r$ s ne příliš velikým r velmi rychle nabývá závratných hodnot. Ještě markantnější je to u exponenciálních funkce, s níž jsme se seznámili v předchozím odstavci.

Tato úvaha ukazuje, že je užitečné zamýšlet se nad věcmi, s nimiž často pracujeme zcela formálně a bez jakékoli představy, a kriticky je hodnotit. Na druhé straně ukazuje, jak obrovskou sílu představuje matematika, která nám tak snadno umožňuje zvládat věci zcela se vymykající běžné lidské představě. (Co si například představíte pod číslem $10^{10^{10}} = 10^{10\,000\,000\,000}$ majícím deset miliard nul? Pro vaši představu — počet elementárních částic ve známém vesmíru se odhaduje na pouhých 10^{82}.)

Pojmy k zapamatování

— mocninná funkce $f\colon\ y = x^r$, kde $r \in \mathbb{Z}$, $r \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$, $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$,
— funkce n-tá odmocnina $f\colon\ y = \sqrt[n]{x}$, kde $n \in \mathbb{N}$, $n \geqq 2$.

Kontrolní otázky

1. Načrtněte grafy funkcí $f\colon\ y = x^n$ pro $n = 1, 2, 3, 4, 5$.
2. Načrtněte grafy funkcí $f\colon\ y = \sqrt{x}$ a $f\colon\ y = \sqrt[3]{x}$.
3. Načrtněte grafy funkcí $f\colon\ y = x^n$ pro $n = -1, -2, -3, -4, -5$.
4. Pro které hodnoty x je funkce $f\colon\ y = x^r$, kde $r \in \mathbb{R}$, vždy definována?
5. Uveďte základní pravidla pro počítání s mocninami a odmocninami.

Příklady k procvičení

1. Určete definiční obory funkcí.

a) $f\colon y = \dfrac{1}{x}$, b) $f\colon y = \dfrac{x-1}{x^2-4}$, c) $f\colon y = \sqrt{x-1}$,

d) $f: y = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$, e) $f: y = \sqrt[4]{\dfrac{x+1}{x-1}}$, f) $f: y = \dfrac{1}{x+1} + \sqrt[6]{x+3}$,

g) $f: y = \sqrt{x+4} + \sqrt[4]{x^2 - 5x + 6}$, h) $f: y = x^2 + \sqrt[3]{x}$.

2. Určete definiční obory funkce $f:\ y = x^s$ pro $s = 2, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$.

3. Nakreslete grafy daných funkcí a stanovte jejich základní vlastnosti.

a) $f: y = 2x$, b) $f: y = x^2 + 1$, c) $f: y = \dfrac{1}{x}$,

d) $f: y = -3x$, e) $f: y = -x^2 - 2$, f) $f: y = -\dfrac{1}{x}$.

4. Rozhodněte, zda mají smysl následující výrazy, a je-li možno, určete jejich hodnotu.

a) $(-5)^{\frac{3}{2}}$, b) $(-27)^{-\frac{2}{6}}$, c) $(-32)^{-\frac{1}{4}}$, d) $32^{-\frac{1}{4}}$.

5. K daným funkcím sestrojte inverzní funkce a určete $D(f^{-1})$.

a) $f: y = x^2 + 1,\ x \in \langle 0, \infty)$, b) $f: y = \sqrt{1 - x^2},\ x \in \langle -1, 0\rangle$,
c) $f: y = 1 + \frac{1}{x}$, d) $f: y = 3 - 5x,\ x \in \langle -5, 5\rangle$.

6. Najděte chybu v následujícím výpočtu:

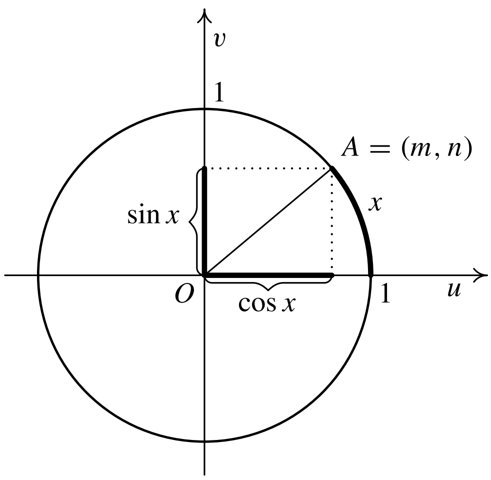
$$
\begin{aligned}
(x+1)^2 &= x^2 + 2x + 1,\\
(x+1)^2 - (2x+1) &= x^2,\\
(x+1)^2 - (2x+1) - x(2x+1) &= x^2 - x(2x+1),\\
(x+1)^2 - (2x+1)(x+1) &= x^2 - x(2x+1),\\
(x+1)^2 - (2x+1)(x+1) + \frac{1}{4}(2x+1)^2 &= x^2 - x(2x+1) + \frac{1}{4}(2x+1)^2,\\
\left[(x+1) - \frac{1}{2}(2x+1)\right]^2 &= \left[x - \frac{1}{2}(2x+1)\right]^2,\\
(x+1) - \frac{1}{2}(2x+1) &= x - \frac{1}{2}(2x+1),\\
x + 1 &= x,\\
1 &= 0.
\end{aligned}
$$

4.3 Funkce goniometrické a cyklometrické

Funkce goniometrické

Goniometrickými funkcemi nazýváme funkce sinus, kosinus, tangens a kotangens. Stejně jako u funkce exponenciální, tak i u funkcí goniometrických existuje několik možností jejich zavedení. Jedním z nejčastějších způsobů je definovat funkce sinus a kosinus pomocí součtu nekonečné řady. Jinou možností je využití funkcionálních rovnic. Bohužel, vzhledem k našim znalostem, nemůžeme žádnou z těchto možností využít. Vyjdeme proto ze středoškolských poznatků a pouze připomeneme zavedení těchto funkcí pomocí jednotkové kružnice. Budeme přitom předpokládat znalost pojmu orientovaný úhel. Podrobně je tento přístup uveden například v [15]. Úhly budeme nadále měřit v míře obloukové, nikoliv stupňové. Připomeňme, že úhel 1° v míře stupňové je roven úhlu $\pi/180$ v míře obloukové. Obecně úhel n stupňů má obloukovou míru $n\frac{\pi}{180}$.

Sinus a kosinus



Nechť $A = (m, n)$ je průsečík jednotkové kružnice s koncovým ramenem orientovaného úhlu o velikosti x v soustavě pravoúhlých souřadnic u, v. (Vrchol úhlu je v počátku soustavy souřadnic O a počáteční rameno orientovaného úhlu splývá s kladnou částí osy u.)

Funkce f, jejíž hodnota je v každém bodě $x \in \mathbb{R}$ rovna souřadnici n bodu A, se nazývá *sinus* a funkce f, jejíž hodnota je v každém bodě $x \in \mathbb{R}$ rovna souřadnici m bodu A, se nazývá *kosinus*.

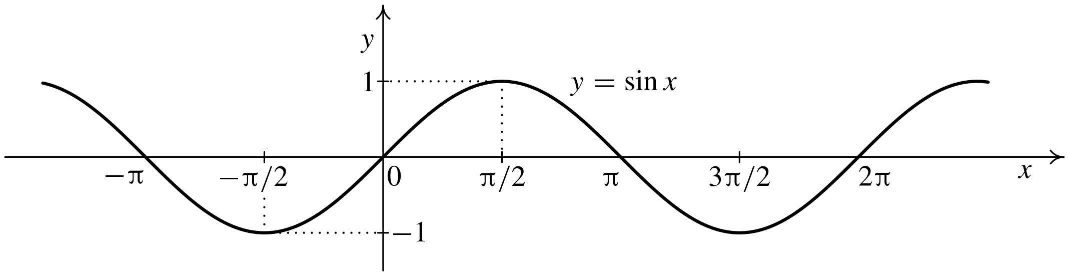
Sinus

Označení: $f\colon\ y = \sin x,\ x \in \mathbb{R}.$

Vlastnosti:

- Definiční obor: $(-\infty, \infty)$.
- Obor hodnot: $\langle -1, 1\rangle$.
- Funkce je lichá, tj. $\sin(-x) = -\sin x$.
- Funkce je periodická se základní periodou 2π, tj. $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$, $k \in \mathbb{Z}$.
- Funkce je rostoucí na intervalech $\left\langle -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right\rangle$, $k \in \mathbb{Z}$ a klesající na intervalech $\left\langle \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \right\rangle$, $k \in \mathbb{Z}$.

Graf:



Tabulka hodnot funkce sinus ve význačných bodech:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1

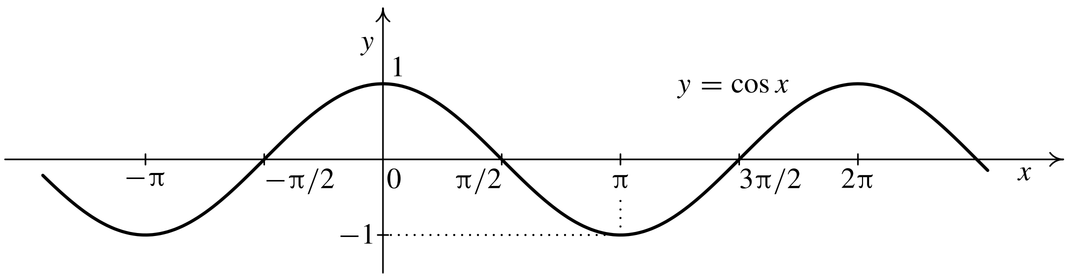
Kosinus

Označení: $f\colon\ y = \cos x,\ x \in \mathbb{R}$.

Vlastnosti:

- Definiční obor: $(-\infty, \infty)$.
- Obor hodnot: $\langle -1, 1\rangle$.
- Funkce je sudá, tj. $\cos(-x) = \cos x$.
- Funkce je periodická se základní periodou 2π, tj. $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$, $k \in \mathbb{Z}$.
- Funkce je rostoucí na intervalech $\langle -\pi + 2k\pi, 0 + 2k\pi\rangle$, $k \in \mathbb{Z}$ a klesající na intervalech $\langle 0 + 2k\pi, \pi + 2k\pi\rangle$, $k \in \mathbb{Z}$.

Graf:



Tabulka hodnot funkce kosinus ve význačných bodech:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0

Základní vztahy a vzorce

Uveďme si nyní přehledně základní vztahy a vzorce pro počítání s funkcemi sinus a kosinus. Poznamenejme ještě, že všechny dále uvedené rovnosti platí všude, kde je současně definována levá i pravá strana rovnosti.

$$
\begin{aligned}
&(1) && \sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y,\\
&(2) && \cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y,\\
&(3) && \sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y,\\
&(4) && \cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y.
\end{aligned}
$$

Těmto vztahům říkáme součtové vzorce pro funkce sinus a kosinus. Přitom součtové vzorce (1) a (2) je užitečné si zapamatovat, neboť se často používají a jak si ukážeme dále, lze z nich odvodit řadu dalších vzorců. Vzorce (3) a (4) dostaneme tak, že ve vzorcích (1) a (2) nahradíme symbol y symbolem $-y$:

$$
\begin{aligned}
\sin(x-y) &= \sin x \cos(-y) + \cos x \sin(-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y,\\
\cos(x-y) &= \cos x \cos(-y) - \sin x \sin(-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(5) && \sin^2 x + \cos^2 x = 1,\\
&(6) && \sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right),\\
&(7) && \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right).
\end{aligned}
$$

Vzorec (5) dostaneme tak, že ve vzorci (2) položíme $y = -x$:

$$
\begin{aligned}
\cos(x + (-x)) &= \cos x \cos(-x) - \sin x \sin(-x),\\
\cos 0 &= \cos^2 x + \sin^2 x,\\
1 &= \cos^2 x + \sin^2 x.
\end{aligned}
$$

Vzorec (6) dostaneme ihned pomocí součtového vzorce (4):

$$
\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\frac{\pi}{2}\cos x + \sin\frac{\pi}{2}\sin x = 0 \cdot \cos x + 1 \cdot \sin x = \sin x.
$$

Obdobně vzorec (7).

$$
\begin{aligned}
&(8) && \sin 2x = 2 \sin x \cos x,\\
&(9) && \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x,\\
&(10) && \left|\sin\frac{x}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}},\\
&(11) && \left|\cos\frac{x}{2}\right| = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}.
\end{aligned}
$$

Vzorce (8) a (9) dostaneme tak, že v součtových vzorcích (1) a (2) položíme $y = x$:

$$\sin 2x = \sin(x + x) = \sin x \cos x + \cos x \sin x = 2 \sin x \cos x,$$
$$\cos 2x = \cos(x + x) = \cos x \cos x - \sin x \sin x = \cos^2 x - \sin^2 x.$$

Vzorec (10) odvodíme pomocí vzorců (9) a (5) takto:

$$\cos x = \cos 2\,\frac{x}{2} = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = 1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2}\,.$$

Z toho plyne

$$\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2} \qquad \Rightarrow \qquad \left|\sin \frac{x}{2}\right| = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}\,.$$

Analogicky vzorec (11).

(12)	$\sin x + \sin y = 2 \sin \dfrac{x + y}{2} \cos \dfrac{x - y}{2},$
(13)	$\sin x - \sin y = 2 \cos \dfrac{x + y}{2} \sin \dfrac{x - y}{2},$
(14)	$\cos x + \cos y = 2 \cos \dfrac{x + y}{2} \cos \dfrac{x - y}{2},$
(15)	$\cos x - \cos y = -2 \sin \dfrac{x + y}{2} \sin \dfrac{x - y}{2}.$

Vzorec (12) v proměnných α a β dostaneme, sečteme-li rovnice (1) a (3) a položíme-li $x + y = \alpha$, $x - y = \beta$, tj. $x = \frac{\alpha+\beta}{2}$, $y = \frac{\alpha-\beta}{2}$:

$$\sin(x + y) + \sin(x - y) = 2 \sin x \cos x,$$
$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}\,.$$

Analogicky odvodíme vzorce (13), (14) a (15).

Tangens

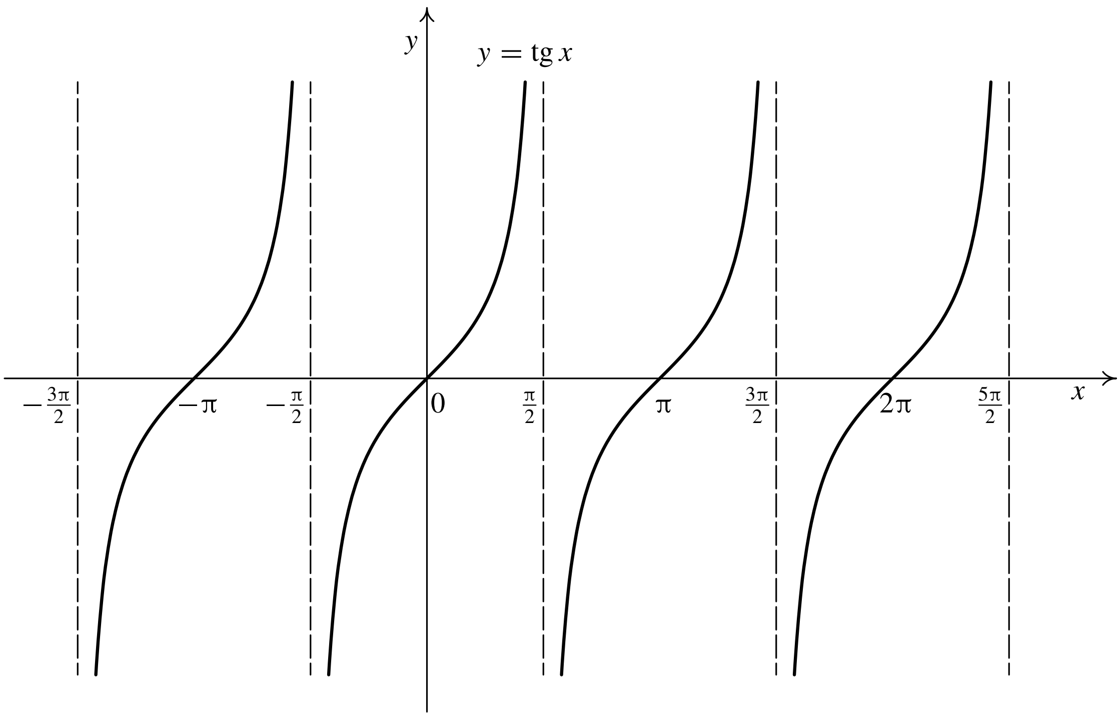
Funkci $f\colon\ y = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ nazýváme *tangens* a značíme $f\colon\ y = \operatorname{tg} x$. Platí tedy

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}\,.$$

Vlastnosti:

- Definiční obor: $\mathbb{R} \smallsetminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.
- Obor hodnot: $(-\infty, \infty)$.
- Funkce je lichá, tj. $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$.
- Funkce je periodická se základní periodou π, tj. $\operatorname{tg}(x + k\pi) = \operatorname{tg} x$, $k \in \mathbb{Z}$.
- Funkce je rostoucí na intervalech $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Graf:



Tabulka hodnot funkce tangens ve význačných bodech:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$\operatorname{tg} x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—	0	—

Kotangens

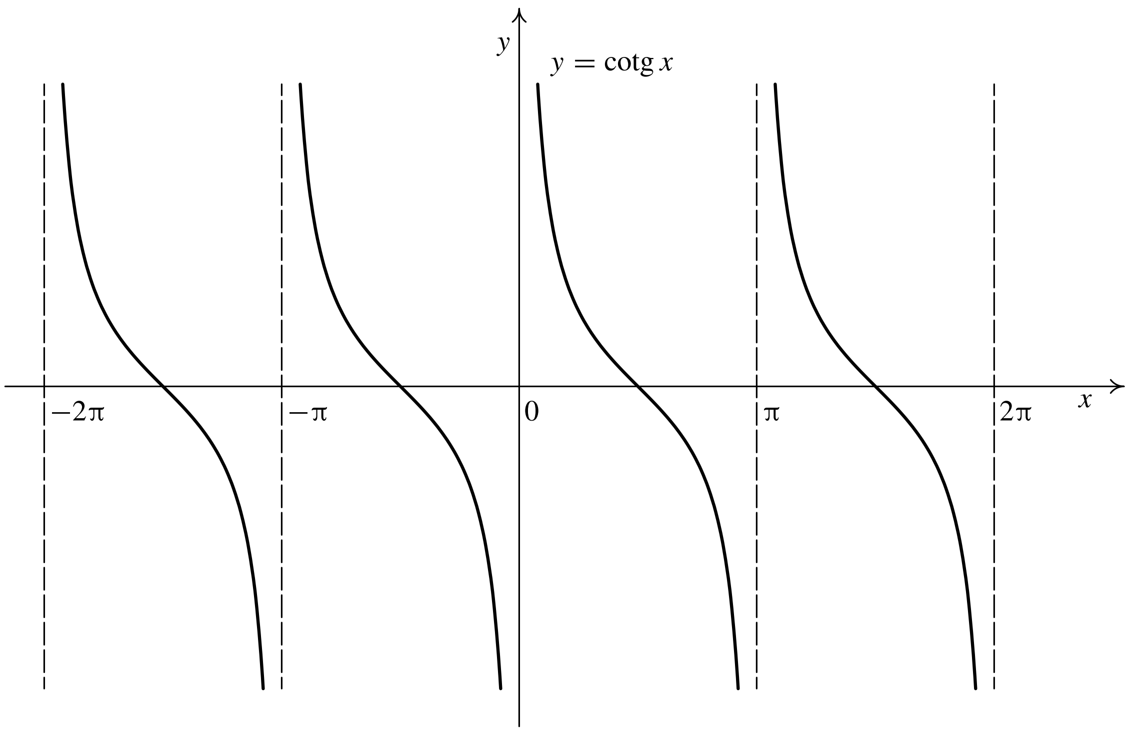
Funkci $f\colon\ y = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ nazýváme *kotangens* a značíme $f\colon\ y = \operatorname{cotg} x$. Platí tedy

$$\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}\,.$$

Vlastnosti:

- Definiční obor: $\mathbb{R} \setminus \{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.
- Obor hodnot: $(-\infty, \infty)$.
- Funkce je lichá, tj. $\operatorname{cotg}(-x) = -\operatorname{cotg} x$.
- Funkce je periodická se základní periodou π, tj. $\operatorname{cotg}(x + k\pi) = \operatorname{cotg} x$, $k \in \mathbb{Z}$.
- Funkce je klesající na intervalech $(0 + k\pi,\ \pi + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Graf:



Tabulka hodnot funkce kotangens ve význačných bodech:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$\operatorname{cotg} x$	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	—	0

Funkce cyklometrické

Cyklometrickými funkcemi nazýváme funkce arkussinus, arkuskosinus, arkustangens a arkuskotangens. Budeme je definovat jako inverzní funkce k odpovídajícím funkcím goniometrickým. To je však velmi nepřesně řečeno, neboť ani jedna z funkcí sinus, kosinus, tangens a kotangens není prostá. Nelze tedy mluvit o funkcích inverzních k těmto funkcím.

Podívejme se nejprve na funkci sinus. Funkce $f\colon y = \sin x,\ x \in \mathbb{R}$, není prostá. Ale funkce $f_1\colon y = \sin x,\ x \in \langle -\pi/2, \pi/2\rangle,\ f_2\colon y = \sin x,\ x \in \langle \pi/2, 3\pi/2\rangle,\ f_3\colon y = \sin x,\ x \in \langle \pi, 3\pi/2\rangle$ už prosté jsou. Lze tedy mluvit o funkcích inverzních k těmto funkcím. Přitom jedna z těchto funkcí, konkrétně funkce f_1, je standardně považována za „základní“ a funkce k ní inverzní se nazývá arkussinus. Obdobnou úvahu lze provést i pro ostatní goniometrické funkce.

Arkussinus

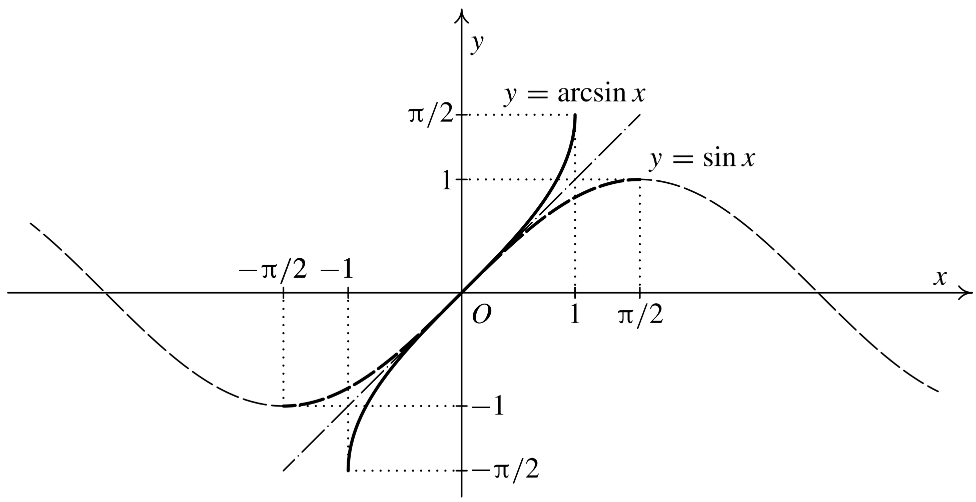
Uvažujme funkci $f\colon y = \sin x,\ x \in \langle -\pi/2, \pi/2\rangle$. Tato funkce je rostoucí, a tedy prostá. Inverzní funkce f^{-1} k funkci f se nazývá *arkussinus*. Přitom $D(f^{-1}) = H(f) = \langle -1, 1\rangle$.

Označení: $f^{-1}\colon\ y = \arcsin x,\ x \in \langle -1, 1\rangle$.

Vlastnosti:

- Definiční obor: $\langle -1, 1\rangle$.
- Obor hodnot: $\left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\rangle$.
- Funkce je lichá, tj. $\arcsin(-x) = -\arcsin x$.
- Funkce není periodická.
- Funkce je rostoucí.

Graf:



Arkuskosinus

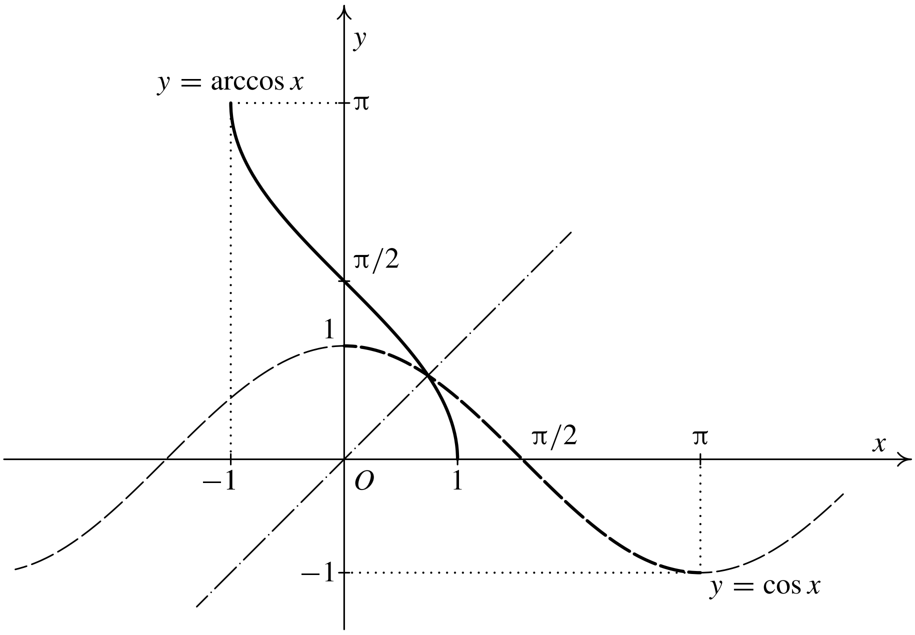
Uvažujme funkci $f\colon y = \cos x,\ x \in \langle 0, \pi\rangle$. Tato funkce je klesající, a tedy prostá. Inverzní funkce f^{-1} k funkci f se nazývá *arkuskosinus*. Přitom $D(f^{-1}) = H(f) = \langle -1, 1\rangle$.

Označení: $f^{-1}\colon\ y = \arccos x,\ x \in \langle -1, 1\rangle$.

Vlastnosti:

- Definiční obor: $\langle -1, 1\rangle$.
- Obor hodnot: $\langle 0, \pi\rangle$.
- Funkce není ani lichá, ani sudá.
- Funkce není periodická.
- Funkce je klesající.

Graf:



Při vyčíslení některých hodnot funkcí arkussinus a arkuskosinus využijeme znalosti odpovídajících hodnot funkcí sinus a kosinus, případně lichosti funkce arkussinus. Například

$\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$,	protože $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$,
$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\pi}{3}$,	protože $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ a arkussinus je lichá funkce,
$\arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$,	protože $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$,
$\arccos(-1) = \pi$,	protože $\cos \pi = -1$.

Arkustangens

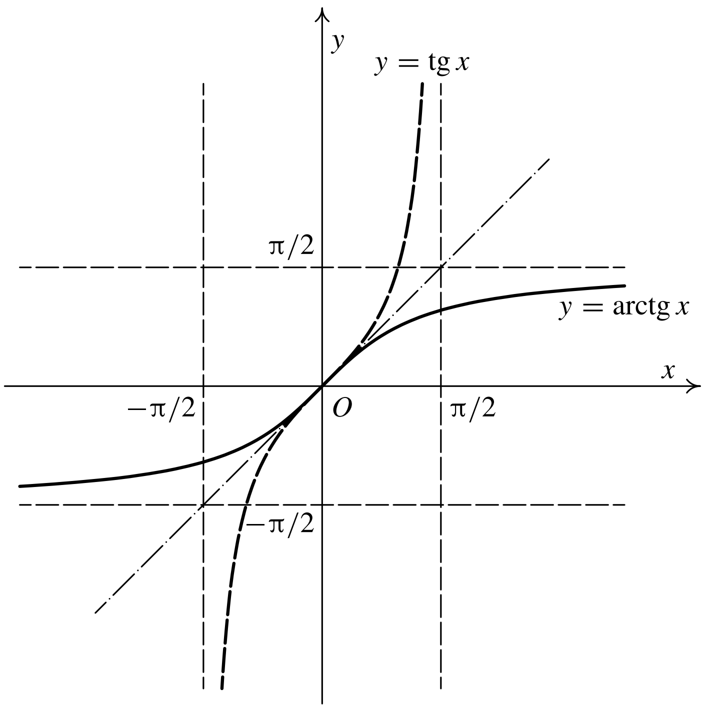
Uvažujme funkci $f: y = \operatorname{tg} x,\ x \in (-\pi/2, \pi/2)$. Tato funkce je rostoucí, a tedy prostá. Inverzní funkce f^{-1} k funkci f se nazývá *arkustangens*. Přitom $D(f^{-1}) = H(f) = (-\infty, +\infty)$.

Označení: $f^{-1}: y = \operatorname{arctg} x,\ x \in (-\infty, +\infty)$.

Vlastnosti:

- Definiční obor: $(-\infty, +\infty)$.
- Obor hodnot: $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.
- Funkce je lichá, tj. $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$.
- Funkce není periodická.
- Funkce je rostoucí.

Graf:



Při vyčíslení hodnot funkce arkustangens využijeme znalosti hodnot funkce tangens a lichosti funkce arkustangens. Například

$\operatorname{arctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$, protože $\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$,

$\operatorname{arctg}(-1) = -\operatorname{arctg} 1 = -\frac{\pi}{4}$, protože $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$ a arkustangens je lichá funkce.

Arkuskotangens

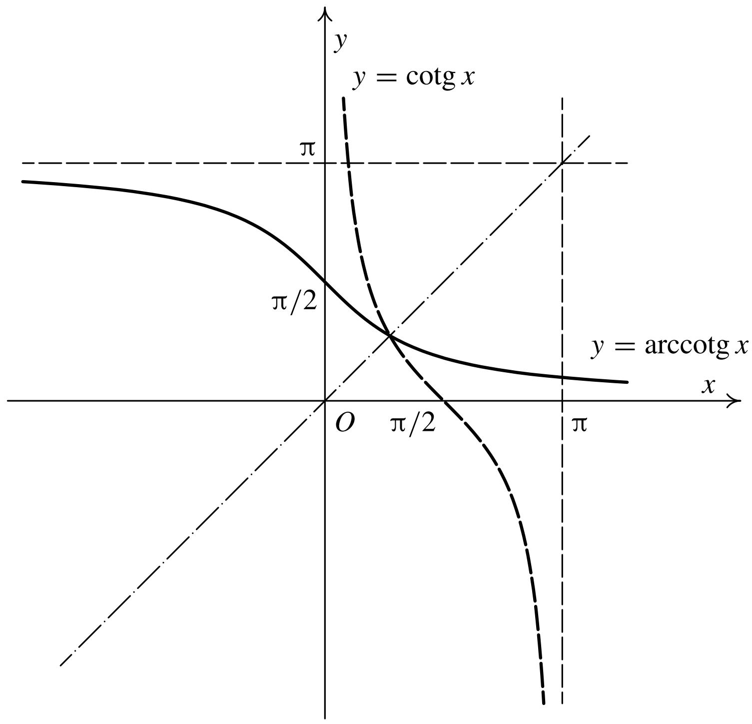
Uvažujme funkci $f\colon\ y = \operatorname{cotg} x,\ \ x \in (0, \pi)$. Tato funkce je klesající, a tedy prostá. Inverzní funkce f^{-1} k funkci f se nazývá *arkuskotangens*. Přitom $D(f^{-1}) = H(f) = (-\infty, +\infty)$.

Označení: $f^{-1}\colon\ y = \operatorname{arccotg} x,\ x \in (-\infty, +\infty)$.

Vlastnosti:

- Definiční obor: $(-\infty, +\infty)$.
- Obor hodnot: $(0, \pi)$.
- Funkce není ani lichá, ani sudá.
- Funkce není periodická.
- Funkce je klesající.

Graf:



Při vyčíslení hodnot funkce arkuskotangens využijeme znalosti hodnot funkce kotangens. Například

$\operatorname{arccotg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{6}$, protože $\operatorname{cotg} \frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$,

$\operatorname{arccotg}(-1) = \frac{3\pi}{4}$, protože $\operatorname{cotg} \frac{3\pi}{4} = -1$; arkuskotangens není ani sudá ani lichá funkce a není tedy možné postupovat jako u funkce arkustangens.

Příklad 4.13. Nakreslete graf funkce $f\colon\ y = 2 - \sin\left(\frac{x}{2} + \pi\right)$ a určete její periodu.

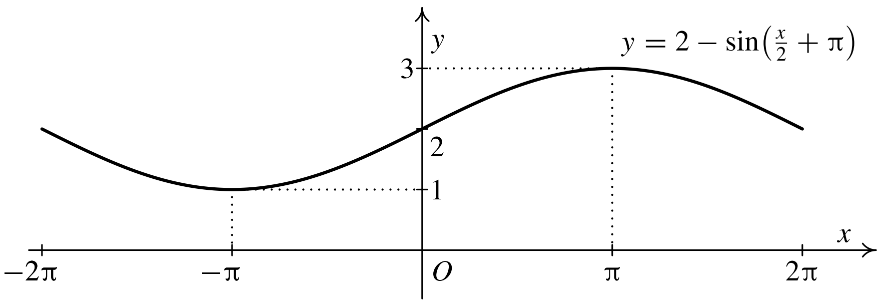
Řešení. Nejprve určíme periodu funkce f. Víme, že funkce sinus je periodická se základní periodou 2π. Obecně funkce $g\colon\ y = \sin kx$ má periodu $\frac{2\pi}{k}$. Tedy naše funkce f má periodu

$$p = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi.$$

V kapitole 3.3 na str. 57 jsme si připomenuli transformace grafu funkce. Nakreslíme postupně následující funkce:

$$f_1\colon\ y = \sin\frac{x}{2}, \quad f_2\colon\ y = \sin\left(\frac{x}{2} + \pi\right), \quad f_3\colon\ y = -\sin\left(\frac{x}{2} + \pi\right)$$

a nakonec funkci $f\colon\ y = 2 - \sin\left(\frac{x}{2} + \pi\right)$. Výsledná funkce f je znázorněna na obrázku.



▲

Poznámka 4.14.

1. Dle definice 3.24 platí:

$$\begin{array}{llll}
y = \arcsin x & \Leftrightarrow \quad x = \sin y, & \text{kde} & x \in \langle -1, 1\rangle,\ y \in \langle -\pi/2, \pi/2\rangle,\\
y = \arccos x & \Leftrightarrow \quad x = \cos y, & \text{kde} & x \in \langle -1, 1\rangle,\ y \in \langle 0, \pi\rangle,\\
y = \operatorname{arctg} x & \Leftrightarrow \quad x = \operatorname{tg} y, & \text{kde} & x \in \mathbb{R},\ y \in (-\pi/2, \pi/2),\\
y = \operatorname{arccotg} x & \Leftrightarrow \quad x = \operatorname{cotg} y, & \text{kde} & x \in \mathbb{R},\ y \in (0, \pi).
\end{array}$$

2. Protože pro vzájemně inverzní funkce platí

$$\begin{array}{ll}
(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = x & \text{pro } x \in D(f),\\
(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = x & \text{pro } x \in D(f^{-1}),
\end{array}$$

dostáváme ihned vztahy:

$$\begin{array}{ll}
\arcsin(\sin x) = x & \text{pro } x \in \langle -\pi/2, \pi/2\rangle,\\
\sin(\arcsin x) = x & \text{pro } x \in \langle -1, 1\rangle,\\
\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x & \text{pro } x \in (-\pi/2, \pi/2),\\
\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x & \text{pro } x \in (-\infty, +\infty).
\end{array}$$

Pozor! Např. složená funkce $\arcsin(\sin x)$ je definovaná pro všechna $x \in \mathbb{R}$, ale předchozí rovnost platí jen na výše uvedeném intervalu. Proto například

$$\arcsin\left(\sin\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}, \qquad \text{ale} \qquad \arcsin(\sin\pi) = 0.$$

Příklad 4.15. Nakreslete graf funkce $f\colon\ y = \arcsin(\sin x)$.

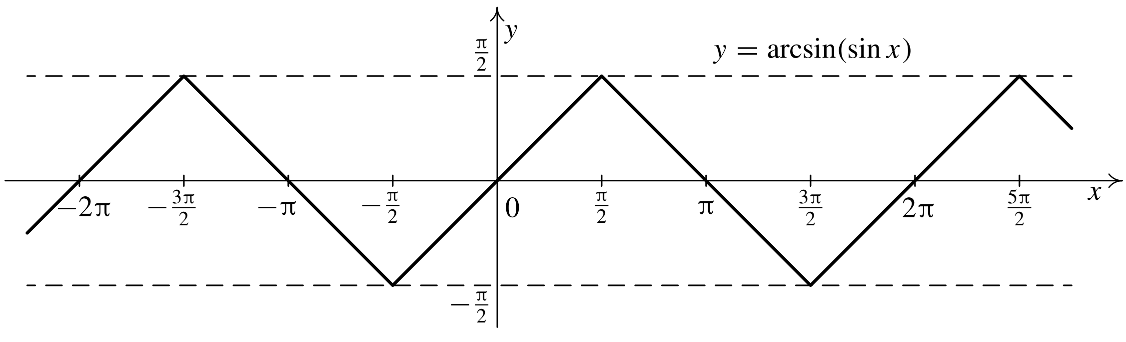
Řešení. Zřejmě $D(f) = (-\infty, +\infty)$. Dále je třeba si uvědomit, že funkce f je periodická s periodou 2π ($f(x+2\pi) = \arcsin(\sin(x+2\pi)) = \arcsin(\sin x) = f(x)$). Funkci f tedy stačí vyšetřovat na intervalu délky 2π. My si vybereme interval $\left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\rangle$.
Na intervalu $\left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\rangle$, vzhledem k inverznosti funkcí sinus a arkussinus, platí

$$\arcsin(\sin x) = x.$$

Na intervalu $\left\langle \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\rangle$ není možné využít stejného vztahu, neboť ten platí pouze pro $x \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\rangle$. Abychom mohli tohoto vztahu využít, musíme nejprve upravit funkci f tak, aby její argument ležel v intervalu $\left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\rangle$. Postupně dostáváme:

$$\begin{aligned}\arcsin(\sin x) &= \arcsin\big(\sin\big((x-\pi)+\pi\big)\big) \overset{(\star)}{=} \arcsin\big(-\sin(x-\pi)\big) \overset{(\star\star)}{=} \\ &\overset{(\star\star)}{=} -\arcsin\big(\sin(x-\pi)\big) \overset{(\star\star\star)}{=} -(x-\pi) = \pi - x,\end{aligned}$$

kde rovnost $(\star)$ plyne ze součtového vzorce $\sin((x-\pi)+\pi) = \sin(x-\pi)\cos\pi + \cos(x-\pi)\sin\pi = -\sin(x-\pi)$, rovnost $(\star\star)$ plyne z lichosti funkce arkussinus a rovnost $(\star\star\star)$ plyne z inverznosti funkcí sinus a arkussinus na $\left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\rangle$, neboť platí, že $x - \pi \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\rangle$. Nyní již můžeme zakreslit graf funkce f. Nejprve zakreslíme část grafu na intervalu $\left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\rangle$, pro další intervaly využijeme periodičnosti. ▲



Příklad 4.16. Určete definiční obor funkce $f\colon\ y = \sqrt{\log(\cos x)}$.

Řešení. Platí

$$\begin{aligned}D(f) &= \{x \in \mathbb{R}\colon\ \sqrt{\log(\cos x)}\ \text{„má smysl“}\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R}\colon\ \log(\cos x) \geqq 0\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R}\colon\ \cos x \geqq 1\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R}\colon\ \exists k \in \mathbb{Z}\quad \text{tak, že } x = 2k\pi\} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \{2k\pi\}.\end{aligned}$$

▲

Příklad 4.17. Určete definiční obor funkce

$$f\colon\ y = \arcsin\frac{x-3}{2} + \ln(x^3 - x).$$

Řešení. Označme funkci $f_1\colon\ y = \arcsin\frac{x-3}{2}$ a určeme $D(f_1)$. Víme, že definiční obor funkce arkussinus je interval $\langle -1, 1\rangle$. Proto

$$\begin{aligned} D(f_1) &= \left\{x \in \mathbb{R}\colon\ \frac{x-3}{2} \in \langle -1, 1\rangle\right\} = \\ &= \left\{x \in \mathbb{R}\colon\ -1 \leqq \frac{x-3}{2} \leqq 1\right\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R}\colon\ -2 \leqq x-3 \leqq 2\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R}\colon\ 1 \leqq x \leqq 5\} = \\ &= \langle 1, 5\rangle. \end{aligned}$$

Dále označme $f_2\colon\ y = \ln(x^3 - x)$ a určeme $D(f_2)$. Víme, že definiční obor logaritmické funkce je interval $(0, \infty)$. Proto

$$\begin{aligned} D(f_2) &= \{x \in \mathbb{R}\colon\ x^3 - x > 0\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R}\colon\ x(x-1)(x+1) > 0\}. \end{aligned}$$

Uvedená nerovnice je splněna, nastane-li některý z následujících případů:

i) $(x > 0) \wedge (x - 1 > 0) \wedge (x + 1 > 0) \quad \Leftrightarrow \quad (x > 0) \wedge (x > 1) \wedge (x > -1)$
Řešením je množina $M_1 = (1, \infty)$.

ii) $(x > 0) \wedge (x - 1 < 0) \wedge (x + 1 < 0) \quad \Leftrightarrow \quad (x > 0) \wedge (x < 1) \wedge (x < -1)$
Řešením je prázdná množina, tj. $M_2 = \emptyset$.

iii) $(x < 0) \wedge (x - 1 < 0) \wedge (x + 1 > 0) \quad \Leftrightarrow \quad (x < 0) \wedge (x < 1) \wedge (x > -1)$
Řešením je množina $M_3 = (-1, 0)$.

iv) $(x < 0) \wedge (x - 1 > 0) \wedge (x + 1 < 0) \quad \Leftrightarrow \quad (x < 0) \wedge (x > 1) \wedge (x < -1)$
Řešením je prázdná množina, tj. $M_4 = \emptyset$.

Nyní $D(f_2) = M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup M_4$, tedy $D(f_2) = (-1, 0) \cup (1, \infty)$.

Celkem $D(f) = D(f_1) \cap D(f_2)$. Tedy $D(f) = (1, 5\rangle$.

Poznamenejme, že uvedený výpočet by bylo možno zkrátit, neboť $D(f)$ je zřejmě podmnožinou $D(f_1) = \langle 1, 5\rangle$. Nemusíme tedy prověřovat možnosti (iii) a (iv). ▲

Příklad 4.18. Určete definiční obor funkce

$$f\colon\ y = \sqrt{\ln\frac{5x - x^2}{4}} + \arcsin\frac{3}{x}.$$

Řešení. Definujme funkci $f_1\colon\ y = \sqrt{\ln \frac{5x-x^2}{4}}$ a určeme $D(f_1)$.

$$\begin{aligned} D(f_1) &= \left\{x \in \mathbb{R}\colon\ \ln \frac{5x-x^2}{4} \geqq 0\right\} = \\ &= \left\{x \in \mathbb{R}\colon\ \frac{5x-x^2}{4} \geqq 1\right\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R}\colon\ x^2 - 5x + 4 \leqq 0\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R}\colon\ (x-1)(x-4) \leqq 0\}. \end{aligned}$$

Řešme nerovnici:

$$\begin{aligned} (x-1)(x-4) \leqq 0 \ &\Leftrightarrow\ (x-1 \geqq 0 \wedge x-4 \leqq 0) \vee (x-1 \leqq 0 \wedge x-4 \geqq 0) \\ &\Leftrightarrow\ (x \geqq 1 \wedge x \leqq 4) \vee (x \leqq 1 \wedge x \geqq 4). \end{aligned}$$

Tedy $D(f_1) = \langle 1, 4\rangle$.
Dále definujme funkci $f_2\colon\ y = \arcsin \frac{3}{x}$ a určeme $D(f_2)$.

$$\begin{aligned} D(f_2) &= \left\{x \in \mathbb{R}\colon\ -1 \leqq \frac{3}{x} \leqq 1\right\} = \\ &= \left\{x \in \mathbb{R}\colon\ \frac{3}{x} \geqq -1 \ \wedge\ \frac{3}{x} \leqq 1\right\} = \\ &= \left\{x \in \mathbb{R}\colon\ \frac{x+3}{x} \geqq 0 \ \wedge\ \frac{3-x}{x} \leqq 0\right\}. \end{aligned}$$

Vyřešme první nerovnici:

$$\begin{aligned} \frac{x+3}{x} \geqq 0 \ &\Leftrightarrow\ (x+3 \geqq 0 \wedge x > 0) \vee (x+3 \leqq 0 \wedge x < 0) \\ &\Leftrightarrow\ (x \geqq -3 \wedge x > 0) \vee (x \leqq -3 \wedge x < 0). \end{aligned}$$

Řešením je tedy množina $M_1 = (-\infty, -3\rangle \cup (0, +\infty)$.
Vyřešme druhou nerovnici:

$$\begin{aligned} \frac{3-x}{x} \leqq 0 \ &\Leftrightarrow\ (3-x \geqq 0 \wedge x < 0) \vee (3-x \leqq 0 \wedge x > 0) \\ &\Leftrightarrow\ (x \leqq 3 \wedge x < 0) \vee (x \geqq 3 \wedge x > 0). \end{aligned}$$

Řešením je $M_2 = (-\infty, 0) \cup \langle 3, +\infty)$.
Definiční obor $D(f_2) = M_1 \cap M_2 = (-\infty, -3\rangle \cup \langle 3, +\infty)$.
Konečně

$$D(f) = D(f_1) \cap D(f_2) = \langle 3, 4\rangle.$$

▲

Příklad 4.19. Je dána funkce $f\colon\ y = \sin \dfrac{2x-1}{3}$, $x \in \left\langle -\dfrac{3\pi}{4} + \dfrac{1}{2}, \dfrac{3\pi}{4} + \dfrac{1}{2}\right\rangle$. Určete funkci f^{-1} inverzní k funkci f.

Řešení.

1. Definiční obor je zadán: $D(f) = \left\langle -\frac{3\pi}{4} + \frac{1}{2}, \frac{3\pi}{4} + \frac{1}{2} \right\rangle$.
2. Ověříme, zda je funkce f prostá. Nejdříve se podíváme, v jakém intervalu leží hodnoty argumentu funkce sinus. Postupnými úpravami dostáváme:
$$\begin{aligned} -\frac{3\pi}{4} + \frac{1}{2} \leqq x \leqq \frac{3\pi}{4} + \frac{1}{2}\,, \\ -\frac{3\pi}{2} + 1 \leqq 2x \leqq \frac{3\pi}{2} + 1\,, \\ -\frac{3\pi}{2} \leqq 2x - 1 \leqq \frac{3\pi}{2}\,, \\ -\frac{\pi}{2} \leqq \frac{2x-1}{3} \leqq \frac{\pi}{2}\,. \end{aligned}$$
Vidíme, že $\frac{2x-1}{3} \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$. Funkce f je tedy prostá (vznikla složením dvou prostých funkcí), a tudíž existuje funkce f^{-1} inverzní k funkci f.
3. K nalezení funkce f^{-1} využijeme definici 3.24.
   i) Nejprve určíme definiční obor funkce inverzní, který je roven oboru hodnot $H(f)$ funkce f.
   Víme, že $x \in \left\langle -\frac{3\pi}{4} + \frac{1}{2}, \frac{3\pi}{4} + \frac{1}{2} \right\rangle$ právě tehdy, když $\frac{2x-1}{3} \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$. Dále víme, že funkce sinus zobrazí interval $\left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$ na interval $\langle -1, 1 \rangle$. Celkem tedy
   $$D(f^{-1}) = H(f) = \langle -1, 1 \rangle.$$
   ii) K určení předpisu funkce f^{-1} využijeme vztah $f^{-1}(y) = x \;\Leftrightarrow\; f(x) = y$, který platí pro každé $y \in D(f^{-1})$. Vyjděme tedy z rovnice $y = f(x)$, tj. $y = \sin \frac{2x-1}{3}$, a vyjádřeme x v závislosti na y.
   Pro každé $y \in \langle -1, 1 \rangle$ platí
   $$\begin{aligned} y = \sin \frac{2x-1}{3} \quad &\overset{(\star)}{\Leftrightarrow} \quad \arcsin y = \frac{2x-1}{3} \quad \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad 2x = 3 \arcsin y + 1 \quad \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad x = \frac{3}{2} \arcsin y + \frac{1}{2}\,. \end{aligned}$$
   ($\star$): využili jsme definice funkce arkussinus ($\arcsin z = u \;\Leftrightarrow\; z = \sin u$, pokud $u \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$). To, že argument funkce sinus leží v intervalu $\left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$ jsme ověřili na začátku příkladu.

   Funkce f^{-1} inverzní k funkci f je tedy
   $$f^{-1}\colon x = \frac{3}{2} \arcsin y + \frac{1}{2}\,, \qquad y \in \langle -1, 1 \rangle.$$
   Po přeznačení proměnných:
   $$f^{-1}\colon y = \frac{3}{2} \arcsin x + \frac{1}{2}\,, \qquad x \in \langle -1, 1 \rangle.$$
   ▲

Příklad 4.20. Je dána funkce $g\colon\ y = 3 - 2\arccos(2x-3)$, $x \in \langle 1, 2\rangle$. Určete funkci g^{-1} inverzní k funkci g.

Řešení.

1. Definiční obor je zadán: $D(f) = \langle 1, 2\rangle$.
2. Ověříme, zda je funkce g prostá. Funkce g vznikla složením funkcí $g_1\colon\ u = 2x - 3$, $g_2\colon\ y = 3 - 2\arccos u$. Obě tyto funkce jsou prosté, proto dle poznámky 3.23 je funkce g prostá, a tudíž existuje funkce g^{-1} inverzní k funkci g.
3. Při hledání funkce g^{-1} budeme postupovat podle definice 3.24.
   i) Určíme definiční obor funkce inverzní, který je roven oboru hodnot $H(g)$ funkce g. Nejprve se podívejme jakých hodnot nabývá argument funkce arkuskosinus. Platí
   $$\begin{aligned} 1 \leqq x &\leqq 2,\\ 2 \leqq 2x &\leqq 4,\\ -1 \leqq 2x - 3 &\leqq 1. \end{aligned}$$
   Tedy $2x - 3 \in \langle -1, 1\rangle$. Funkce arkuskosinus zobrazí interval $\langle -1, 1\rangle$ na interval $\langle 0, \pi\rangle$. Při použití zápisu pomocí nerovností dostáváme:
   $$\begin{aligned} -1 \leqq 2x - 3 &\leqq 1,\\ 0 \leqq \arccos(2x-3) &\leqq \pi,\\ 0 \leqq 2\arccos(2x-3) &\leqq 2\pi,\\ -2\pi \leqq -2\arccos(2x-3) &\leqq 0,\\ 3 - 2\pi \leqq 3 - 2\arccos(2x-3) &\leqq 3. \end{aligned}$$
   Celkem jsme tedy dostali, že pro $x \in \langle 1, 2\rangle$ je $3 - 2\arccos(2x-3) \in \langle 3 - 2\pi, 3\rangle$. Tedy
   $$D(g^{-1}) = H(g) = \langle 3 - 2\pi, 3\rangle.$$
   ii) K určení předpisu funkce g^{-1} využijeme vztah $g^{-1}(y) = x \iff g(x) = y$, který platí pro každé $y \in D(g^{-1})$. Vyjděme tedy z rovnice $y = g(x)$ a vyjádřeme x v závislosti na y.
   Pro každé $y \in \langle 3 - 2\pi, 3\rangle$ platí
   $$\begin{aligned} y = 3 - 2\arccos(2x-3) \quad &\iff \quad y - 3 = -2\arccos(2x-3) \quad \iff\\ \iff \quad \arccos(2x-3) = \frac{3-y}{2} \quad &\overset{(\star)}{\iff}\\ \overset{(\star)}{\iff} \quad 2x - 3 = \cos\frac{3-y}{2} \quad &\iff \quad x = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\cos\frac{3-y}{2}. \end{aligned}$$
   $(\star)$ Protože $y \in \langle 3 - 2\pi, 3\rangle$, je $\frac{3-y}{2} \in \langle 0, \pi\rangle$, a je tedy možno využít definice funkce arkuskosinus ($\arccos z = u \iff z = \cos u,\ u \in \langle 0, \pi\rangle$).

Inverzní funkce g^{-1} k funkci g je tedy

$$g^{-1}\colon x = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cos \frac{3-y}{2}, \qquad y \in \langle 3 - 2\pi, 3 \rangle.$$

Po přeznačení proměnných:

$$g^{-1}\colon y = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cos \frac{3-x}{2}, \qquad x \in \langle 3 - 2\pi, 3 \rangle.$$

▲

Příklad 4.21. Je dána funkce $h\colon y = 3 - 2 \operatorname{cotg}(x+2)$, $x \in (-2, \pi - 2)$. Určete funkci h^{-1} inverzní k funkci h.

Řešení.

1. Definiční obor je zadán: $D(f) = (-2, \pi - 2)$.
2. Ověřme, zda je funkce h prostá. Podívejme se nejdříve, v jakém intervalu leží hodnoty argumentu funkce kotangens. Platí

$$-2 < x < \pi - 2 \quad \Rightarrow \quad 0 < x + 2 < \pi,$$

tedy $x + 2 \in (0, \pi)$. Z toho plyne, že funkce h je prostá, a tudíž existuje funkce h^{-1} inverzní k funkci h.

3. Při hledání funkce h^{-1} budeme opět postupovat podle definice 3.24.
   - i) Nejprve určíme definiční obor funkce inverzní, který je roven oboru hodnot $H(h)$ funkce h.
     Víme, že $x \in (-2, \pi - 2)$ právě tehdy, když $x + 2 \in (0, \pi)$. Dále víme, že funkce kotangens zobrazí interval $(0, \pi)$ na interval $(-\infty, \infty)$. Z toho plyne, že také $3 - 2 \operatorname{cotg}(x+2) \in (-\infty, \infty)$. Celkem tedy

$$D(h^{-1}) = H(h) = \mathbb{R}.$$

   - ii) K určení předpisu funkce h^{-1} využijeme vztah $h^{-1}(y) = x \Leftrightarrow h(x) = y$, který platí pro každé $y \in D(h^{-1})$. Vyjděme tedy z rovnice $y = h(x)$, tj. $y = 3 - {}$ $- 2 \operatorname{cotg}(x+2)$, a vyjádřeme x v závislosti na y.
     Pro každé $y \in \mathbb{R}$ tedy platí

$$\begin{aligned} y = 3 - 2 \operatorname{cotg}(x+2) \quad &\Leftrightarrow \quad y - 3 = -2 \operatorname{cotg}(x+2) \quad \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad \operatorname{cotg}(x+2) = \frac{3-y}{2} \quad \overset{(\star)}{\Leftrightarrow} \\ &\overset{(\star)}{\Leftrightarrow} \quad x + 2 = \operatorname{arccotg} \frac{3-y}{2} \quad \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad x = \operatorname{arccotg} \frac{3-y}{2} - 2. \end{aligned}$$

     $(\star)$: využili jsme definice funkce arkuskotangens ($\operatorname{arccotg} z = u \Leftrightarrow z = \operatorname{cotg} u$, pokud $u \in (0, \pi)$). To, že je argument funkce kotangens, tj. $x+2$, z intervalu $(0, \pi)$, jsme ověřili na začátku příkladu.

Inverzní funkce h^{-1} je tedy

$$h^{-1}\colon\ y = \operatorname{arccotg} \frac{3-x}{2} - 2, \qquad y \in \mathbb{R}.$$

▲

Příklad 4.22. Dokažte, že pro každé $x \in \langle -1, 1\rangle$ platí $\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}$.

Řešení. Nechť $x \in \langle -1, 1\rangle$. Označme $y = \arcsin x$. Pak dostáváme

$$\begin{aligned}
y = \arcsin x \quad &\overset{(\star)}{\Leftrightarrow} \quad \left(x = \sin y \quad \wedge \quad y \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\rangle\right) \quad \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad \left(x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right) \quad \wedge \quad \frac{\pi}{2} - y \in \langle 0, \pi\rangle\right) \quad \overset{(\star\star)}{\Leftrightarrow} \\
&\overset{(\star\star)}{\Leftrightarrow} \quad \arccos x = \frac{\pi}{2} - y.
\end{aligned}$$

$(\star)$: využili jsme definice funkce arkussinus ($\arcsin z = u \Leftrightarrow z = \sin u,\ u \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\rangle$).
$(\star\star)$: využili jsme definice funkce arkuskosinus ($\arccos z = u \Leftrightarrow z = \cos u,\ u \in \langle 0, \pi\rangle$).

Na začátku jsme předpokládali, že $y = \arcsin x$, nyní nám vyšlo $\arccos x = \frac{\pi}{2} - y$. Celkem tedy

$$\arcsin x + \arccos x = y + \frac{\pi}{2} - y = \frac{\pi}{2}.$$

▲

Pojmy k zapamatování

— funkce sinus a arkussinus,
— funkce kosinus a arkuskosinus,
— funkce tangens a arkustangens,
— funkce kotangens a arkuskotangens.

Kontrolní otázky

1. Jaké jsou definiční obory a obory hodnot funkcí sinus, kosinus, tangens a kotangens?
2. Vyjmenujte základní vlastnosti těchto funkcí (monotónnost, ohraničenost, sudost, lichost, periodičnost).
3. Nakreslete grafy těchto funkcí.
4. Určete definiční obory a obory hodnot funkcí arkussinus, arkuskosinus, arkustangens a arkuskotangens.
5. Jaké jsou jejich základní vlastnosti?
6. Nakreslete grafy těchto funkcí.

Příklady k procvičení

1. Určete definiční obory funkcí.

   a) $f\colon y = \dfrac{1}{\sin x}$, b) $f\colon y = \dfrac{1}{1-\cos x}$, c) $f\colon y = \operatorname{tg} 2x$,

   d) $f\colon y = 1 - \operatorname{cotg}\dfrac{x}{2}$, e) $f\colon y = 1 + \dfrac{1}{\cos x}$, f) $f\colon y = \dfrac{1}{\sin x - 1}$,

   g) $f\colon y = \operatorname{cotg} 2x$, h) $f\colon y = \sqrt{\cos x}$, i) $f\colon y = \log(\cos x)$,

   j) $f\colon y = \mathrm{e}^{\sqrt{\frac{1}{2} - \sin x}}$, k) $f\colon y = \sqrt{\operatorname{cotg}\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)}$, l) $f\colon y = \sqrt{1 - \operatorname{cotg}^2 x}$.

2. Určete definiční obory funkcí.

   a) $f\colon y = \arcsin(2-3x)$, b) $f\colon y = \arccos\dfrac{1-2x}{4}$,

   c) $f\colon y = \arcsin\dfrac{1}{2x-1}$, d) $f\colon y = \sqrt{3-x} + \arcsin\dfrac{3-2x}{5}$,

   e) $f\colon y = \arcsin(1-x) + \ln\ln x$, f) $f\colon y = \sqrt{\operatorname{arctg}\dfrac{x+3}{2} - \dfrac{\pi}{4}}$,

   g) $f\colon y = \dfrac{\ln(2x-3)}{\sqrt{x^2-1}} + \arcsin\dfrac{x-4}{7}$, h) $f\colon y = \arcsin\dfrac{2x}{1+x}$,

   i) $f\colon y = \arcsin x + x\sqrt{1-x^2}$, j) $f\colon y = \arccos(\ln x^3)$.

3. Nakreslete grafy funkcí a určete jejich nejmenší periodu.

   a) $f\colon y = \sin 2x$, b) $f\colon y = \cos\left(\dfrac{x}{2} + \pi\right)$,

   c) $f\colon y = 2\sin(2x-\pi)$, d) $f\colon y = 1 + \cos(2x+\pi)$,

   e) $f\colon y = \cos\dfrac{x}{2}$, f) $f\colon y = \sin(2x-\pi)$,

   g) $f\colon y = -3\sin 3x$, h) $f\colon y = -3 + 2\cos\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{2}\right)$.

4. Vypočtěte uvedené hodnoty.

   a) $\arcsin\dfrac{1}{2}$, b) $\arcsin(-1)$, c) $\arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, d) $\arcsin\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$,

   e) $\arccos 0$, f) $\arccos(-1)$, g) $\arccos\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, h) $\arccos\left(-\dfrac{1}{2}\right)$,

   i) $\operatorname{arctg}\sqrt{3}$, j) $\operatorname{arctg}(-1)$, k) $\operatorname{arctg} 0$, l) $\operatorname{arccotg}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

5. Určete, pro která x platí následující rovnosti.

   a) $\arccos(\cos x) = x$, b) $\cos(\arccos x) = x$,

   c) $\operatorname{arccotg}(\operatorname{cotg} x) = x$, d) $\operatorname{cotg}(\operatorname{arccotg} x) = x$.

6. Určete funkci f^{-1} inverzní k zadané funkci f a stanovte $D(f^{-1})$.

   a) $f\colon y = 2\cos(1-3x),\ x \in \left\langle \frac{1-\pi}{3}, \frac{1}{3} \right\rangle,$

   b) $f\colon y = 2 + \operatorname{tg}(5x-2),\ x \in \left(\frac{4-\pi}{10}, \frac{4+\pi}{10} \right),$

   c) $f\colon y = 3 + 4\arccos(2x-1),\ x \in \langle 0, 1 \rangle,$

   d) $f\colon y = 2 - \operatorname{arccotg}(x-2),\ x \in \mathbb{R},$

   e) $f\colon y = \sin(3x-1),\ x \in \left\langle \frac{1}{3} - \frac{\pi}{6}, \frac{1}{3} + \frac{\pi}{6} \right\rangle,$

   f) $f\colon y = 1 + \operatorname{arctg}(3x-4),\ x \in \mathbb{R},$

   g) $f\colon y = 2 - \cos(2x+1),\ x \in \left\langle -\frac{1}{2}, \pi - \frac{1}{2} \right\rangle.$

7. Upravte.

   a) $f\colon y = \sin(\arccos x),\ x \in \langle -1, 1 \rangle,$ b) $f\colon y = \sin(\operatorname{arctg} x),\ x \in \mathbb{R}.$

8. Dokažte, že pro každé reálné číslo platí $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x = \frac{\pi}{2}$.

4.4 Funkce hyperbolické a hyperbolometrické

Hyperbolickými funkcemi nazýváme funkce: hyperbolický sinus, hyperbolický kosinus, hyperbolický tangens a hyperbolický kotangens. Tyto funkce se velmi často vyskytují v technické praxi. Jejich hodnoty bez problémů nalezneme skoro na každé kalkulačce, často však ani nevíme, jak jsou tyto funkce definovány. Uveďme si proto alespoň základní vlastnosti a grafy těchto funkcí.

Hyperbolický sinus

Funkci $f\colon\ y = \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$ nazýváme *hyperbolický sinus* a značíme $f\colon\ y = \sinh x$. Tedy

$$\sinh x = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}.$$

Vlastnosti:

- Definiční obor: $(-\infty, +\infty)$.
- Obor hodnot: $(-\infty, +\infty)$.
- Funkce je lichá, tj. $\sinh(-x) = -\sinh x$.
- Funkce není periodická.
- Funkce je rostoucí.
- Graf viz obr. 4.4 a).

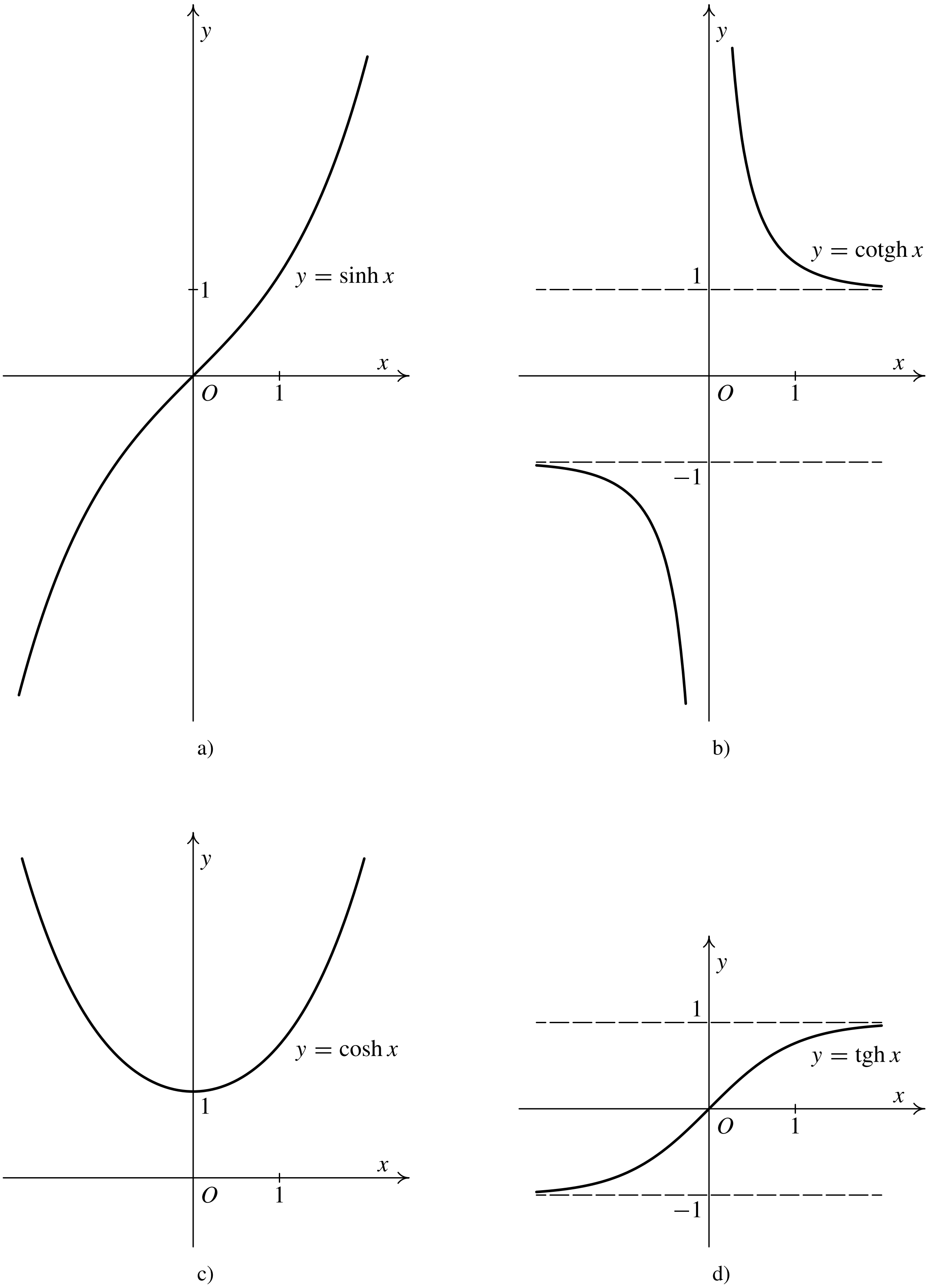
Hyperbolický kosinus

Funkci $f\colon\ y = \dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$ nazýváme *hyperbolický kosinus* a značíme $f\colon\ y = \cosh x$. Tedy

$$\cosh x = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}.$$

Vlastnosti:

- Definiční obor: $(-\infty, +\infty)$.
- Obor hodnot: $\langle 1, +\infty)$.
- Funkce je sudá, tj. $\cosh(-x) = \cosh x$.
- Funkce není periodická.
- Funkce je rostoucí v intervalu $\langle 0, +\infty)$ a klesající v intervalu $(-\infty, 0\rangle$.
- Graf viz obr. 4.4 c).



Obr. 4.4: Grafy hyperbolických funkcí

Hyperbolický tangens

Funkci $f\colon\ y = \dfrac{\sinh x}{\cosh x}$ nazýváme *hyperbolický tangens* a značíme $f\colon\ y = \operatorname{tgh} x$.
Tedy

$$\operatorname{tgh} x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}.$$

Vlastnosti:

- Definiční obor: $(-\infty, +\infty)$.
- Obor hodnot: $(-1, 1)$.
- Funkce je lichá, tj. $\operatorname{tgh}(-x) = -\operatorname{tgh} x$.
- Funkce není periodická.
- Funkce je rostoucí.
- Graf viz obr. 4.4 d).

Hyperbolický kotangens

Funkci $f\colon\ y = \dfrac{\cosh x}{\sinh x}$ nazýváme *hyperbolický kotangens* a značíme $f\colon\ y = \operatorname{cotgh} x$.
Tedy

$$\operatorname{cotgh} x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}.$$

Vlastnosti:

- Definiční obor: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- Obor hodnot: $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.
- Funkce je lichá, tj. $\operatorname{cotgh}(-x) = -\operatorname{cotgh} x$.
- Funkce není periodická.
- Funkce je klesající na intervalu $(-\infty, 0)$ a na intervalu $(0, +\infty)$.
- Graf viz obr. 4.4 b).

Hyperbolické funkce mají řadu zajímavých vlastností a aplikací. Např. dokonale ohebné vlákno zanedbatelné tloušťky upevněné svými konci ve dvou bodech se prověší do křivky (říká se jí řetězovka), která je v podstatě grafem hyperbolického kosinu.

Funkce hyperbolometrické

Hyperbolometrickými funkcemi nazýváme funkce: argument hyperbolického sinu, argument hyperbolického kosinu, argument hyperbolického tangens a argument hyperbolického kotangens. Tyto funkce budeme definovat jako inverzní funkce k funkcím hyperbolickým. To je však opět (stejně jako u cyklometrických funkcí) nepřesně řečeno, neboť ne všechny hyperbolické funkce jsou prosté. Konkrétně, prostá není funkce hyperbolický kosinus. Zbývající tři hyperbolické funkce prosté jsou.

Argument hyperbolického sinu

Uvažujme funkci $f\colon y = \sinh x$, $x \in \mathbb{R}$. Tato funkce je rostoucí, a tedy prostá. Inverzní funkce f^{-1} k funkci f se nazývá *argument hyperbolického sinu*. Přitom $D(f^{-1}) = H(f) = (-\infty, +\infty)$.

Označení: $\quad f^{-1}\colon\ y = \operatorname{argsinh} x, \qquad x \in (-\infty, +\infty).$

Vlastnosti:

- Definiční obor: $(-\infty, +\infty)$.
- Obor hodnot: $(-\infty, +\infty)$.
- Funkce je lichá, tj. $\operatorname{argsinh}(-x) = -\operatorname{argsinh} x$.
- Funkce není periodická.
- Funkce je rostoucí.
- Graf viz obr. 4.5 a).

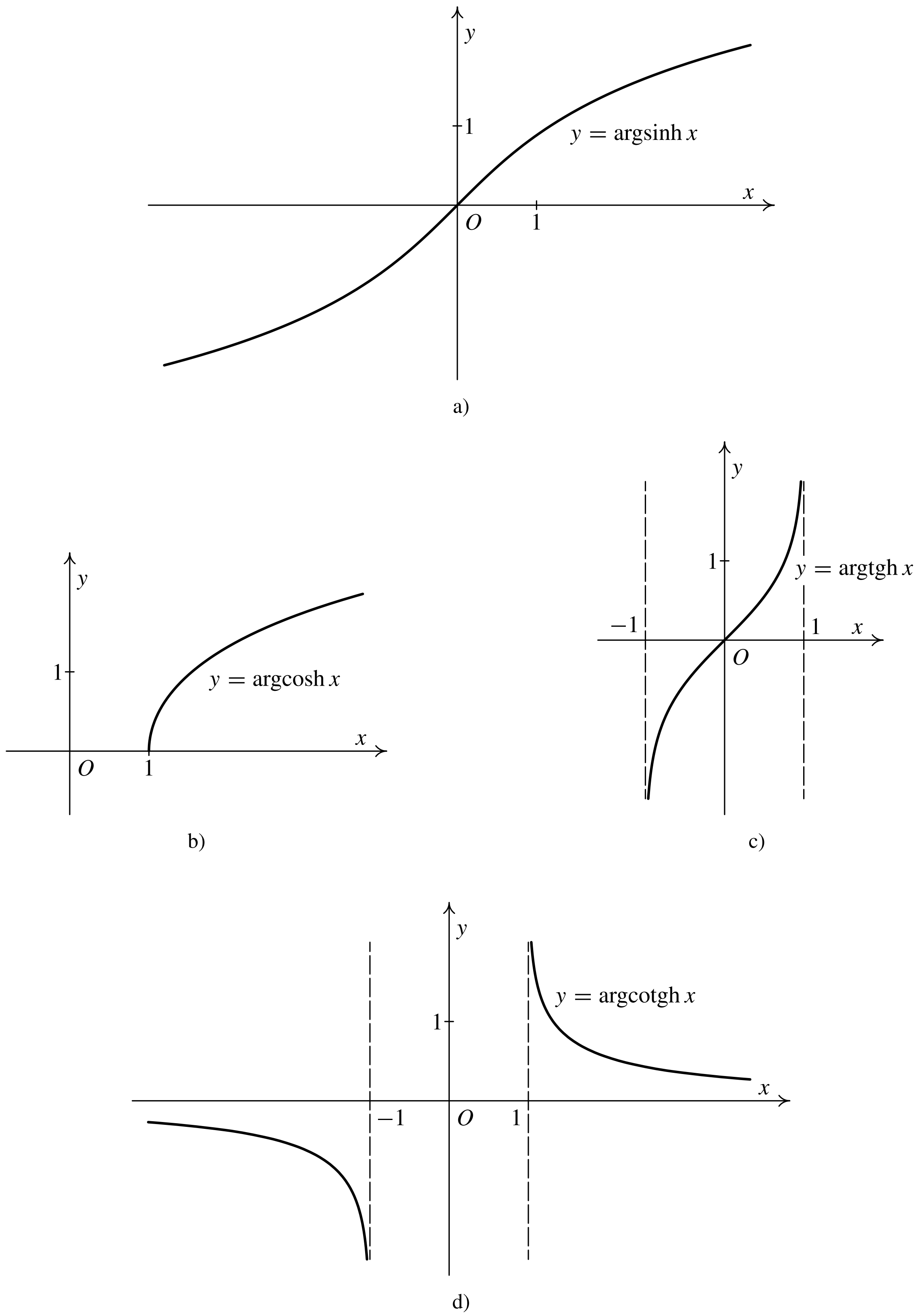
Argument hyperbolického kosinu

Uvažujme funkci $f\colon y = \cosh x$, $x \in \langle 0, \infty)$. Tato funkce je rostoucí, a tedy prostá. Inverzní funkce f^{-1} k funkci f se nazývá *argument hyperbolického kosinu*. Přitom $D(f^{-1}) = H(f) = \langle 1, +\infty)$.

Označení: $\quad f^{-1}\colon\ y = \operatorname{argcosh} x, \qquad x \in \langle 1, \infty).$

Vlastnosti:

- Definiční obor: $\langle 1, +\infty)$.
- Obor hodnot: $\langle 0, +\infty)$.
- Funkce není ani lichá, ani sudá.
- Funkce není periodická.
- Funkce je rostoucí.
- Graf viz obr. 4.5 b).



Obr. 4.5: Grafy hyperbolometrických funkcí

Argument hyperbolického tangens

Uvažujme funkci $f: y = \operatorname{tgh} x, x \in \mathbb{R}$. Tato funkce je rostoucí, a tedy prostá. Inverzní funkce f^{-1} k funkci f se nazývá *argument hyperbolického tangens*. Přitom $D(f^{-1}) = H(f) = (-1, 1)$.

Označení: $\quad f^{-1}: \; y = \operatorname{argtgh} x, \qquad x \in (-1, 1).$

Vlastnosti:

- Definiční obor: $(-1, 1)$.
- Obor hodnot: $(-\infty, +\infty)$.
- Funkce je lichá, tj. $\operatorname{argtgh}(-x) = -\operatorname{argtgh} x$.
- Funkce není periodická.
- Funkce je rostoucí.
- Graf viz obr. 4.5 c).

Argument hyperbolického kotangens

Uvažujme funkci $f: y = \operatorname{cotgh} x, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Tato funkce je prostá. Inverzní funkce f^{-1} k funkci f se nazývá *argument hyperbolického kotangens*.
Přitom $D(f^{-1}) = H(f) = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.

Označení: $\quad f^{-1}: \; y = \operatorname{argcotgh} x, \qquad x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty).$

Vlastnosti:

- Definiční obor: $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.
- Obor hodnot: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- Funkce je lichá, tj. $\operatorname{argcotgh}(-x) = -\operatorname{argcotgh} x$.
- Funkce není periodická.
- Funkce je klesající na intervalu $(-\infty, -1)$ a na intervalu $(1, \infty)$.
- Graf viz obr. 4.5 d).

Poznámka 4.23. Jak již napovídají názvy funkcí, existuje analogie mezi goniometrickými a hyperbolickými funkcemi. Ve skutečnosti lze všechny tyto funkce vyjádřit pomocí exponenciály. Hyperbolické funkce jsou tak definované. Aby tak bylo možné vyjádřit i goniometrické funkce, je nutné rozšířit exponenciálu do komplexního oboru. Základem je tzv. Eulerův vzorec $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \cos x + \mathrm{i} \sin x, x \in \mathbb{R}$.[1]

[1] Dosadíme-li do Eulerova vzorce za proměnnou x hodnotu π, pak užitím vztahů $\cos \pi = -1$ a $\sin \pi = 0$ dostáváme rovnost $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -1$. Tu lze dále upravit na jednoduchou rovnici $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} + 1 = 0$ obsahující pět nejznámějších matematických konstant: e, π, i, 0 a 1.

Také si všimněte zajímavého faktu, že výsledkem mocniny s iracionálním základem a s iracionálním imaginárním exponentem je celé číslo.

Podobně je tomu i s cyklometrickými a hyperbolometrickými funkcemi. Hyperbolometrické funkce lze vyjádřit pomocí logaritmu (a zdánlivě by nebylo nutné pro ně zavádět nové symboly). S použitím logaritmu v komplexním oboru je možné analogicky vyjádřit i cyklometrické funkce. To vše je ale již mimo rámec tohoto kurzu.

Příklad 4.24. Dokažte platnost vztahu $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$.

Řešení. Při úpravě levé strany rovnice vyjděme z definice funkcí $\cosh x$ a $\sinh x$.

$$\begin{aligned}\cosh^2 x - \sinh^2 x &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \\ &= \frac{1}{4}\left[(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2\right] = \\ &= \frac{1}{4}\left[(e^x)^2 + 2e^x e^{-x} + (e^{-x})^2 - (e^x)^2 + 2e^x e^{-x} - (e^{-x})^2\right] = \\ &= \frac{1}{4} 4e^x e^{-x} = e^0 = 1,\end{aligned}$$

což je pravá strana rovnosti. Tím je vztah dokázán. ▲

Poznámka 4.25. Víme, že bod $M = (x, y)$, kde $x = \cos\varphi$, $y = \sin\varphi$ leží na jednotkové kružnici $x^2 + y^2 = 1$.

Zamysleme se nad tím, na jaké křivce leží bod $M = (x, y)$, když $x = \cosh\varphi$, $y = \sinh\varphi$. Využijeme vztah, který jsme dokázali v předchozím příkladě, tj.

$$\cosh^2\varphi - \sinh^2\varphi = 1 \qquad \text{a odtud} \qquad x^2 - y^2 = 1.$$

Tedy bod $M = (x, y)$ leží na rovnoosé hyperbole o rovnici $x^2 - y^2 = 1$.

Příklad 4.26. Dokažte, že pro $x \in \mathbb{R}$ platí: $\operatorname{argsinh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$.

Řešení. Nechť $x \in \mathbb{R}$. Vyjděme z levé strany rovnosti a označme $\operatorname{argsinh} x = y$. Protože funkce hyperbolický sinus a argument hyperbolického sinu jsou navzájem inverzní, platí $x = \sinh y$, kde $x \in \mathbb{R}$ a $y \in \mathbb{R}$. Odtud

$$x = \frac{e^y - e^{-y}}{2}.$$

Tuto rovnost chápejme jako rovnici pro neznámou y a řešme substitucí $e^y = z$ ($e^y \neq 0$). Postupně dostáváme:

$$2x = z - \frac{1}{z} \qquad \Rightarrow \qquad 2xz = z^2 - 1 \qquad \Rightarrow \qquad z^2 - 2xz - 1 = 0.$$

Vypočteme kořeny této kvadratické rovnice a dostaneme

$$z_{1,2} = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2 + 4}}{2} = x \pm \sqrt{x^2 + 1}.$$

Vrátíme se k původní proměnné, tj. $e^y = z$. Funkce e^y je vždy kladná, proto výraz $x - \sqrt{x^2+1}$, který nabývá vždy záporných hodnot, dále neuvažujeme. Tedy

$$e^y = x + \sqrt{x^2+1}.$$

S využitím inverznosti exponenciální a logaritmické funkce pak dostáváme

$$y = \ln\bigl(x + \sqrt{x^2+1}\bigr).$$

Celkem $\operatorname{argsinh} x = y$ a zároveň $y = \ln\bigl(x + \sqrt{x^2+1}\bigr)$. Tím je vztah dokázán. ▲

Pojmy k zapamatování

Σ

— hyperbolický sinus a argument hyperbolického sinu,
— hyperbolický kosinus a argument hyperbolického kosinu,
— hyperbolický tangens a argument hyperbolického tangens,
— hyperbolický kotangens a argument hyperbolického kotangens.

Kontrolní otázky

?

1. Nakreslete grafy hyperbolických funkcí.
2. Vyjmenujte základní vlastnosti těchto funkcí (definiční obory, obory hodnot, monotónnost, ohraničenost, sudost, lichost, periodičnost).
3. Nakreslete grafy hyperbolometrických funkcí.
4. Jaké jsou základní vlastnosti hyperbolometrických funkcí?

Příklady k procvičení

!

1. Dokažte, že pro $x \in \langle 1, +\infty)$ platí:

$$\operatorname{argcosh} x = \ln\bigl(x + \sqrt{x^2-1}\bigr).$$

2. Dokažte, že pro $x \in (-1, 1)$ platí:

$$\operatorname{argtgh} x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}.$$

3. Dokažte, že pro $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ platí:

$$\operatorname{argcotgh} x = \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}.$$

4.5 Polynomy a racionální lomené funkce

V této kapitole se seznámíme s polynomy a racionálními lomenými funkcemi, které jsou jedny z nejjednodušších a nejčastěji se vyskytujících elementárních funkcí.

Nechť $n \in \mathbb{N}_0$, $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$. Funkci

$$P\colon\ y = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{4.1}$$

nazýváme *reálný polynom (mnohočlen)*, čísla $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$ nazýváme *koeficienty polynomu*, a číslo n *stupeň polynomu* (píšeme $\operatorname{st} P = n$).

Poznámka 4.27.

1. Stupeň polynomu je tedy nejvyšší mocnina neznámé s nenulovým koeficientem.
2. Mezi polynomy počítáme i tzv. *nulový polynom* $P\colon\ y = 0$ nemající žádné nenulové koeficienty. Nulový polynom nemá přiřazen žádný stupeň nebo se mu jako stupeň přiřadí symbol $-\infty$. Je nutné důsledně rozlišovat mezi polynomem stupně nula, což je vlastně nenulová konstantní funkce, jejímž grafem je rovnoběžka s osou x různá od této osy, a nulovým polynomem, což je nulová konstantní funkce, jejímž grafem je právě osa x.
3. Pro řadu úvah je výhodné uvažovat obecněji i polynomy s komplexními koeficienty.

Uvedeme několik příkladů polynomů.

1. Polynom $R\colon\ y = x^3$ má stupeň 3. Přitom $a_3 = 1,\ a_2 = a_1 = a_0 = 0$.
2. Polynom $P\colon\ y = 3x^2 - 4x + 2$ má stupeň 2. Přitom $a_2 = 3,\ a_1 = -4,\ a_0 = 2$.
3. Polynom $S\colon\ y = 2x - 3$ má stupeň 1. Přitom $a_1 = 2,\ a_0 = -3$.
4. Polynom $T\colon\ y = 3$ má stupeň 0. Přitom $a_0 = 3$.

Polynomy jsou funkce, lze je tedy sčítat (sečteme koeficienty u stejných mocnin), odčítat (odečteme koeficienty u stejných mocnin) a násobit (násobíme každý člen jednoho polynomu s každým členem druhého polynomu a sloučíme členy se stejnými mocninami) a výsledkem je opět polynom. Dělením dvou polynomů nemusíme dostat polynom, ale obecnější funkci, kterou nyní zavedeme.

Funkce R daná předpisem

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}\,,$$

kde P, Q jsou polynomy a Q je nenulový polynom, se nazývá *racionální lomená funkce*. Říkáme, že funkce R je *ryze lomená* jestliže $\operatorname{st} P < \operatorname{st} Q$, a *neryze lomená*, jestliže $\operatorname{st} P \geqq \operatorname{st} Q$.

Například

1. $R_1\colon\ y = \dfrac{3x^2 + 2}{x - 2}$ je neryze lomená racionální funkce,

2. $R_2\colon\ y = \dfrac{2x}{5x^3 + 7x^2 + x - 2}$ je ryze lomená racionální funkce.

Je-li R neryze lomená racionální funkce, pak lze provést dělení (příslušný algoritmus je znám ze střední školy). Při dělení $P(x) : Q(x)$ dostaneme podíl $S(x)$ a zbytek $T(x)$. Přitom platí, že $\operatorname{st} T < \operatorname{st} Q$ (dělíme tak dlouho, dokud to jde), tj.

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{T(x)}{Q(x)}\,. \tag{4.2}$$

Příklad 4.28. Vyjádřete racionální neryze lomenou funkci f jako součet polynomu a racionální ryze lomené funkce:

$$f\colon\ y = \frac{2x^6 - 9x^4 + 4x^3 + 8x^2 - 7x + 4}{x^4 - 3x^2 + 2x - 1}\,.$$

Řešení. Pomocí známého algoritmu na dělení dostáváme:

$$\begin{array}{l}
(2x^6 - 9x^4 + 4x^3 + 8x^2 - 7x + 4) : (x^4 - 3x^2 + 2x - 1) = 2x^2 - 3,\\
\underline{-2x^6 + 6x^4 - 4x^3 + 2x^2}\\
\qquad -3x^4 + 10x^2 - 7x + 4\\
\qquad \underline{+3x^4 - 9x^2 + 6x - 3}\\
\qquad\qquad\quad +x^2 - x + 1
\end{array}$$

Tedy

$$\frac{T(x)}{Q(x)} = \frac{x^2 - x + 1}{x^4 - 3x^2 + 2x - 1}$$

a

$$\frac{2x^6 - 9x^4 + 4x^3 + 8x^2 - 7x + 4}{x^4 - 3x^2 + 2x - 1} = 2x^2 - 3 + \frac{x^2 - x + 1}{x^4 - 3x^2 + 2x - 1}\,.$$ ▲

4.5.1 Rozklad polynomu na součin

Uvažujme libovolný reálný polynom P. Věnujme se otázce nalezení řešení rovnice $P(x) = 0$. Přitom místo „najít řešení rovnice“ budeme často říkat „najít kořeny rovnice“. Problém nalezení kořenů rovnice $P(x) = 0$ je obecně velmi složitý. Například již kvadratická rovnice $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, nemusí mít mezi reálnými čísly žádný kořen (když diskriminant $D = b^2 - 4ac < 0$). Avšak v oboru komplexních čísel má právě dva kořeny. To je jeden z důvodů, proč budeme hledat nejen reálné, ale obecně komplexní kořeny dané rovnice. (I když komplexní kořen na grafu v reálné rovině $\mathbb{R}^2$ nijak nevidíme.)

Kořenem polynomu rozumíme *libovolné komplexní číslo* α takové, že $P(\alpha) = 0$.

Uvědomte si, že za kořen polynomu považujeme obecně komplexní číslo, i když jde o polynom s *reálnými* koeficienty. Například polynom $P(x) = x^2 + 1$ má právě dva kořeny $\pm\mathrm{i}$.

Zajímá nás, zda každý polynom stupně alespoň jedna (tj. takový, který vůbec obsahuje neznámou) má nějaký kořen. Na počátku 19. století Gauss[1] poprvé přesně dokázal větu, která byla vzhledem k velkému významu pro tehdejší matematiku nazývána *základní větou algebry*. Tato věta říká, že *libovolný polynom (s reálnými nebo komplexními koeficienty) stupně alespoň jedna má v množině komplexních čísel alespoň jeden kořen.*

Vezmeme nyní nějaký polynom $P_n(x)$ tvaru (4.1) stupně $n \geqq 1$. Podle základní věty algebry existuje kořen tohoto polynomu. Označme jej α_1. Vypočteme (dělení bude beze zbytku)

$$\frac{P_n(x)}{x-\alpha_1} = Q_{n-1}(x)\,, \qquad \text{tj.} \qquad P_n(x) = (x-\alpha_1)Q_{n-1}(x),$$

kde $Q_{n-1}(x)$ je polynom stupně $n-1$. Pokud $n-1 \geqq 1$, má $Q_{n-1}(x)$ opět kořen $x = \alpha_2$ a

$$\frac{Q_{n-1}(x)}{x-\alpha_2} = S_{n-2}(x)\,, \qquad \text{tj.} \qquad Q_{n-1}(x) = (x-\alpha_2)S_{n-2}(x).$$

Po dosazení dostáváme

$$P_n(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)S_{n-2}(x).$$

Takto můžeme pokračovat, až dostaneme při dělení konstantu $a \neq 0$. Postupně tedy najdeme n kořenů $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ (obecně komplexních) a polynom $P_n(x)$ rozložíme na součin lineárních polynomů tvaru $x - \alpha_i$, $i = 1, \dots, n$, které nazýváme *kořenové činitele* (kořenový činitel $x - \alpha_i$ přísluší kořenu α_i). Vyjde

$$P_n(x) = a(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n).$$

V tomto rozkladu pěkně vidíme všechny kořeny polynomu $P_n(x)$. Konstanta a je právě koeficient a_n u nejvyšší mocniny x^n polynomu $P_n(x)$.

Některé kořenové činitele v rozkladu mohou být totožné. Sloučíme-li stejné kořenové činitele, pak dostáváme:

$$P_n(x) = a_n(x-\beta_1)^{k_1}(x-\beta_2)^{k_2}\cdots(x-\beta_s)^{k_s}, \tag{4.3}$$

kde $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ jsou navzájem různé kořeny polynomu P_n. Číslům $k_1, k_2, \dots, k_s$ se pak říká *násobnosti* kořenů $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$. Přitom $s \leqq n$ a $k_1 + k_2 + \cdots + k_s = n$. Tvaru (4.3) říkáme *rozklad polynomu na součin kořenových činitelů v komplexním oboru.*

Z předchozího výkladu vyplývá následující důležité tvrzení.

Věta 4.29. *Každý polynom stupně n má v komplexním oboru právě n kořenů, počítáme-li každý kořen tolikrát, kolik činí jeho násobnost.*

Dle předchozí věty polynom stupně nula nemá kořen, lineární polynom má právě jeden kořen atd. Dále platí, že má-li polynom s *reálnými* koeficienty imaginární kořen

[1] **Carl Friedrich Gauss** (1777–1855) — německý matematik, astronom a kartograf. Je považován za jednoho z největších matematiků všech dob. Svými pracemi významně ovlivnil mnoho matematických disciplín.

$x = \alpha + \beta \mathrm{i}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$, potom má i komplexně sdružený kořen $x = \alpha - \beta \mathrm{i}$, přičemž jejich násobnosti jsou stejné. Pokud roznásobíme kořenové činitele odpovídající komplexně sdruženým kořenům $\alpha \pm \beta \mathrm{i}$, dostáváme

$$(x - \alpha - \beta \mathrm{i})(x - \alpha + \beta \mathrm{i}) = x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2.$$

To je kvadratický trojčlen, který si označme $x^2 + px + q$.

Tento obrat v rozkladu polynomu můžeme udělat se všemi kořenovými činiteli odpovídajícími komplexně sdruženým dvojicím kořenů. Ztratíme tím sice jednoduchost činitelů v rozkladu (nebudou již lineární ale kvadratické), ale jejich koeficienty budou vždy reálná čísla.

Je-li tedy $P_n(x)$ polynom stupně n, $n \geqq 1$, tvaru (4.1), označme $\beta_1, \dots, \beta_s$ všechny jeho různé reálné kořeny s násobnostmi $k_1, \dots, k_s$ a dále označme $x^2 + p_1 x + q_1, \dots, x^2 + p_r x + q_r$ všechny kvadratické trojčleny odpovídající všem různým dvojicím komplexně sdružených kořenů s násobnostmi $l_1, \dots, l_r$. Pak dostaneme

$$P_n(x) = a_n (x - \beta_1)^{k_1} \cdots (x - \beta_s)^{k_s} (x^2 + p_1 x + q_1)^{l_1} \cdots (x^2 + p_r x + q_r)^{l_r}. \qquad (4.4)$$

Zřejmě je $k_1 + \dots + k_s + 2l_1 + \dots + 2l_r = n$. Tento tvar nazýváme *rozklad polynomu na součin ireducibilních*[1] *činitelů v reálném oboru.*

Příklad 4.30. Rozložte polynom $P_5(x) = 2x^5 + x^4 + 4x^3 + 2x^2 + 2x + 1$ na součin ireducibilních činitelů v reálném oboru, víte-li, že jeden kořen je $x = -1/2$.

Řešení. Známe jeden kořen $\beta_1 = -\frac{1}{2}$. Vydělme $P_5(x)$ kořenovým činitelem $x - \beta_1 = x - \left(-\frac{1}{2}\right) = x + \frac{1}{2}$. Vydělením dostaneme polynom $2x^4 + 4x^2 + 2$. Tedy

$$P_5(x) = \left(x + \tfrac{1}{2}\right)(2x^4 + 4x^2 + 2) = 2\left(x + \tfrac{1}{2}\right)(x^4 + 2x^2 + 1) = 2\left(x + \tfrac{1}{2}\right)(x^2 + 1)^2.$$

Polynom $x^2 + 1$ již nemá reálné kořeny (má komplexní kořeny $\pm \mathrm{i}$). Tedy rozklad polynomu $P_5(x)$ na součin ireducibilních činitelů má tvar

$$P_5(x) = 2\left(x - \left(-\tfrac{1}{2}\right)\right)(x^2 + 1)^2.$$

▲

Poznámka 4.31.

1. Lze ukázat, že jak rozklad (4.3) na součin kořenových činitelů v komplexním oboru tak rozklad (4.4) na součin ireducibilních činitelů v reálném oboru je jednoznačný až na pořadí činitelů. Jestliže má polynom pouze reálné kořeny, pak pochopitelně rozklad v komplexním oboru bude stejný jako rozklad v reálném oboru (kvadratické trojčleny zde nebudou).
2. Protože u polynomů s reálnými koeficienty se imaginární kořeny vyskytují vždy po dvojicích (komplexně sdružené kořeny) se stejnými násobnostmi, musí mít polynomy lichého stupně lichý počet reálných kořenů, tedy aspoň jeden. Např. každý polynom $ax^3 + bx^2 + cx + d$, $a \neq 0$, má buď jeden nebo tři reálné kořeny.

[1] nerozložitelných

Naproti tomu polynomy sudého stupně nemusí mít žádný reálný kořen. Např. polynom $x^2 + px + q$, kde $p^2 - 4q < 0$, má pouze dva komplexní kořeny. Podobně jsme viděli v příkladu 4.30, že polynom čtvrtého stupně $x^4 + 2x^2 + 1$ má jen dvojnásobné komplexní kořeny $\pm\mathrm{i}$.

3. Smyslem rozkladů je napsat daný polynom jako součin co nejjednodušších polynomů. Ještě jednou připomeňme, že v reálném oboru jsou činitele v rozkladu polynomu buď lineární tvaru $x - \alpha$ nebo kvadratické tvaru $x^2 + px + q$ (kde $p^2 - 4q < 0$). V komplexním oboru jsou činitele jen lineární tvaru $x - \alpha$, kde α je reálné nebo komplexní číslo.

Zopakujte si následující vzorce (známé ze střední školy), které využíváme při rozkladu polynomu na součin.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \qquad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2,$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3, \qquad (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3,$$

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b),$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2), \qquad a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2).$$

4.5.2 Nalezení kořenů polynomu

Úloha najít rozklad polynomu na součin kořenových činitelů (ať v reálném nebo komplexním oboru) je rovnocenná úloze najít všechny kořeny polynomu. Známe-li totiž všechny kořeny, obdržíme postupným dělením příslušnými kořenovými činiteli hledaný rozklad. Naopak máme-li rozklad typu (4.3), jsou v něm přímo vidět kořeny. V případě rozkladu typu (4.4) stačí vyřešit příslušné kvadratické rovnice.

Nalézt kořeny polynomu P ve tvaru (4.1), kde $n \geqq 1$, znamená vyřešit *algebraickou rovnici* $P(x) = 0$, tj.

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0. \tag{4.5}$$

Hledání kořenů polynomu převádíme na hledání *kořenů rovnice* (*řešení rovnice*) (4.5). Všimněme si, jak lze pro malá n algebraické rovnice řešit.

Lineární rovnice

Pro $n = 1$ jde o lineární rovnici $ax + b = 0$, $a \neq 0$, jejíž jediný kořen je

$$x_1 = -\frac{b}{a}\,.$$

Kvadratické rovnice

Pro $n = 2$ jde o kvadratickou rovnici $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, pro jejíž kořeny se na střední škole odvozuje (doplněním na čtverec) vzorec

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

O povaze kořenů rozhoduje *diskriminant kvadratické rovnice* $D = b^2 - 4ac$. Je-li $D > 0$, má rovnice dva různé reálné kořeny, je-li $D = 0$, má jeden dvojnásobný reálný kořen, a je-li $D < 0$, má dvojici komplexně sdružených kořenů.

Rovnice třetího a čtvrtého stupně

Pro $n = 3$ je nalezení kořenů podstatně obtížnější. Na výpočet kořenů existují tzv. *Cardanovy vzorce*,[1] které však vyjadřují reálné kořeny přes třetí odmocniny z komplexních čísel. Bohužel ani v případě, že kubická rovnice má tři reálné kořeny, není možné najít vzorec, který by obsahoval jen koeficienty dané rovnice, konečný počet aritmetických operací (sčítání, odčítání, násobení a dělení) a odmocniny pouze z reálných čísel.

Pro rovnice čtvrtého stupně existují také obecné vztahy k výpočtu kořenů. Jejich řešení je však ještě obtížnější než řešení rovnic třetího stupně.

Rovnice pátého stupně a vyšších stupňů

Vzorce pro kořeny rovnice třetího a čtvrtého stupně byly nalezeny v první polovině 16. století. Pokusy najít obdobné vzorce pro kořeny rovnice pátého stupně však byly po více než 200 následujících let neúspěšné. Nakonec norský matematik Abel[2] dokázal, že pro kořeny rovnic pátého stupně (a tudíž ani vyšších stupňů) neexistuje univerzální vzorec, který by obsahoval jen koeficienty dané rovnice, konečný počet aritmetických operací a konečný počet odmocnin. To však v žádném případě neznamená, že rovnice vyšších stupňů nemají kořeny — z předchozího oddílů totiž víme, že mají přesně tolik (komplexních) kořenů, jaký je jejich stupeň. Tento výsledek pouze říká, že tyto kořeny nelze vyjádřit jistým vzorcem přesně popsaného typu.

Existuje však celá řada tzv. numerických metod, kterými lze jak reálné tak komplexní kořeny přibližně vyjádřit. Dále je možné efektivně k dané rovnici sestavit novou rovnici, která má tytéž kořeny jako zadaná rovnice, ale všechny jsou jednoduché (mají násobnost jedna). Konečně existuje efektivní metoda (i když značně pracná), která pro rovnici s reálnými koeficienty umožňuje stanovit, kolik má daná rovnice v libovolném intervalu přesně reálných kořenů. To pak dovoluje určit, kolik má tato rovnice celkem reálných

[1]**Girolamo Cardano** (1501–1576) (čti kardano) — italský matematik, mechanik a lékař. Zabýval se algebrou.

[2]**Niels Henrik Abel** (1802–1829) — norský matematik. Přes svůj krátký život významně ovlivnil řadu matematických disciplín. Kromě prací v algebře, kde zavedl grupy, což je klíčový pojem moderní matematiky, je rovněž zakladatelem teorie eliptických funkcí.

kořenů. Je to tzv. Sturmova[1] věta. Zájemcům o problematiku algebraických rovnic lze doporučit např. publikace [3], [12] nebo [21].

Z předchozího textu je jasné, že neexistuje žádný univerzální postup, kterým bychom byli schopni zjistit všechny kořeny daného polynomu. Dále si v části pro zájemce uvedeme jeden praktický výsledek, který nám v případě polynomu s celočíselnými koeficienty umožní vytipovat všechny celočíselné a racionální kořeny.

Pro zájemce:

Celočíselné a racionální kořeny polynomu s celočíselnými koeficienty

Budeme uvažovat polynom (4.1), avšak budeme předpokládat, že koeficienty jsou *celá čísla*. Zabývejme se hledáním racionálních kořenů. Jestliže je nula k-násobným kořenem polynomu P, pak se tento polynom dá vyjádřit ve tvaru

$$P\colon\ y = x^k(a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0), \quad \text{kde } a_0 \neq 0.$$

Přitom polynom v závorce má zřejmě stejné nenulové racionální kořeny jako původní polynom P. Stačí nám tedy, abychom se zabývali hledáním (nenulových) racionálních kořenů polynomů s celočíselnými koeficienty, pro něž platí $a_0 \neq 0$.

Věta 4.32. *Uvažujme polynom R s celočíselnými koeficienty:*

$$R\colon\ y = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0, \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{4.6}$$

kde $n \in \mathbb{N}$, $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n \in \mathbb{Z}$, $a_n \neq 0$, $a_0 \neq 0$.
Nechť $\alpha = \dfrac{p}{q}$ ($p, q \in \mathbb{Z}$ jsou nesoudělná čísla) je kořenem polynomu R. Pak p dělí beze zbytku koeficient a_0 a q dělí beze zbytku koeficient a_n (píšeme $p \mid a_0$, $q \mid a_n$).

Praktický výpočet racionálních kořenů polynomu (4.6) podle předchozí věty spočívá v tom, že vypíšeme všechna možná racionální čísla $\frac{p}{q}$ (p, q nesoudělná), splňující podmínku $p \mid a_0$, $q \mid a_n$ a dosazením do polynomu zjistíme, zda se jedná, či nejedná o kořeny. Pokud mezi těmito čísly kořen není, pak polynom vůbec racionální kořen nemá.

Vzhledem k tomu, že $a_0 \neq 0$, $a_n \neq 0$, je čísel $\frac{p}{q}$ konečně mnoho, tzn. po konečném počtu kroků takto nalezneme všechny racionální kořeny daného polynomu.

Poznámka 4.33. Uvědomte si, že předchozí větu lze použít i pro polynomy s racionálními koeficienty. Stačí totiž vytknout společný násobek jmenovatelů koeficientů $a_0, \ldots, a_n$.

Chceme-li najít pouze celočíselné kořeny, pak využijeme následujícího tvrzení, které je důsledkem předchozí věty.

Důsledek 4.34. *Je-li α celočíselný kořen polynomu* (4.6)*, pak α dělí beze zbytku koeficient a_0 (píšeme $\alpha \mid a_0$).*

[1] **Jean Charles François Sturm** (1803–1855) (čti šturm) — švýcarský matematik. Zabýval se mimo jiné okrajovými úlohami pro obyčejné diferenciální rovnice. Dosáhl též významných výsledků v geometrické optice.

Příklad 4.35. Najděte kořeny polynomu $P\colon\ y = 3x^3 - 5x^2 + 8x - 4$.

Řešení. Koeficienty polynomu jsou celočíselné, takže lze použít předchozí věty. Nejprve zkusíme najít celočíselné kořeny (to je méně pracné). V úvahu přicházejí čísla ± 1, ± 2 a ± 4. Dosazením těchto čísel do zadaného polynomu zjistíme, že ani jedno není kořenem. Tedy daný polynom nemá celočíselný kořen.

Zkusíme najít racionální kořen ve tvaru p/q. Číslo p musí dělit beze zbytku koeficient $a_0 = -4$, tj. může to být některé z čísel ± 1, ± 2, ± 4. Číslo q musí dělit beze zbytku koeficient $a_3 = 3$, tj. může to být ± 1, ± 3. Předně se stačí omezit na kladné hodnoty, znaménko je obsaženo již v čitateli. Dále pro $q = 1$ dostaneme vlastně celočíselné kořeny. Zbývá tedy $q = 3$. Kandidáty jsou tedy racionální čísla $\pm\frac{1}{3}$, $\pm\frac{2}{3}$, $\pm\frac{4}{3}$.

Dosazením zjistíme, že jeden kořen je $x_1 = \frac{2}{3}$. Vydělíme tedy polynom P kořenovým činitelem $x - \frac{2}{3}$ a dostaneme $3x^2 - 3x + 6 = 3(x^2 - x + 2)$. Odpovídající kvadratická rovnice dává zbývající dva kořeny

$$x_{2,3} = \frac{1 \pm \sqrt{1-8}}{2} = \frac{1 \pm \mathrm{i}\sqrt{7}}{2}.$$

Kořeny polynomu P tedy jsou $x_1 = \frac{2}{3}$, $x_2 = \frac{1+\mathrm{i}\sqrt{7}}{2}$, $x_3 = \frac{1-\mathrm{i}\sqrt{7}}{2}$. ▲

Pojmy k zapamatování

— polynom,

— racionální lomená funkce,

— kořen polynomu,

— rozklad polynomu na součin kořenových činitelů v komplexním oboru,

— rozklad polynomu na součin ireducibilních činitelů v reálném oboru.

Kontrolní otázky

1. Jaký je rozdíl mezi nulovým polynomem a polynomem stupně nula?
2. Jaký je vztah mezi počtem kořenů daného polynomu a stupněm tohoto polynomu?
3. Může mít polynom třetího stupně právě dva reálné kořeny?
4. Popište rozklad polynomu s reálnými koeficienty na součin ireducibilních činitelů v reálném oboru.

Příklady k procvičení

1. Určete kořeny polynomu:

   a) $f\colon\ y = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$, víte-li, že má kořen 1.
   b) $f\colon\ y = x^3 - x^2 - 8x + 12$, víte-li, že má kořen 2.
   c) $f\colon\ y = 2x^5 - 7x^4 + 8x^3 - 3x^2$, víte-li, že jeden jeho kořen je 1.
   d) $f\colon\ y = x^4 + 4x^3 - 16x - 16$, víte-li, že má kořeny $x_1 = 2$ a $x_2 = -2$.

e) $f: y = x^5 - 3x^4 - x^3 + 11x^2 - 12x + 4$, víte-li, že má kořeny $x_1 = 2$ a $x_2 = 1$.
f) $f: y = x^5 + 2x^4 - 9x^3 - 4x^2 + 30x - 36$, víte-li, že má kořeny $x_1 = 1 + \mathrm{i}$ a $x_3 = -3$.
g) $f: y = x^4 - 4x^3 - 10x^2 + 28x - 15$, víte-li, že má kořen 1.
h) $f: y = x^5 - 3x^4 + x^3 + x^2 + 4$, víte-li, že má kořen i.

2. Napište polynom nejnižšího stupně, který má kořeny:

a) $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$ a v čísle $x_0 = -2$ nabývá hodnoty 1.
b) $x_1 = 1$, $x_2 = \mathrm{i}$, $x_3 = 2$ a v čísle $x_0 = -1$ nabývá hodnoty 2.
c) $x_{1,2} = 2$, $x_3 = 1 + \mathrm{i}$, $x_4 = 3$ a v čísle $x_0 = 1$ nabývá hodnoty 3.
d) $x_1 = 1 + \mathrm{i}$, $x_2 = 2 - \mathrm{i}$ a v čísle $x_0 = -1$ nabývá hodnoty 1.
e) $x_{1,2} = 2$, $x_3 = -1$ a v čísle $x_0 = -2$ nabývá hodnoty -2.
f) $x_1 = \mathrm{i}$, $x_2 = 1$ a v čísle $x_0 = 2$ nabývá hodnoty -1.
g) $x_1 = 1 + \mathrm{i}$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$ a v čísle $x_0 = -1$ nabývá hodnoty 1.

3. Vyjádřete racionální neryze lomenou funkci jako součet polynomu a racionální ryze lomené funkce.

a) $f: y = \dfrac{-4x^2 + 10x - 1}{x^2 - 3x + 6}$, b) $f: y = \dfrac{2x^3 - 2x^2 + 5}{x^2 - 2x}$,

c) $f: y = \dfrac{3x^5 - 3x^2 + 2x - 5}{x^3 - x + 1}$.

4. Rozložte polynom na součin ireducibilních činitelů v reálném oboru.

a) $f: y = x^3 + 1$, b) $f: y = x^4 - 16$,

c) $f: y = x^3 - 3x^2 - x + 3$, d) $f: y = 5x^3 - 21x^2 - 21x + 5$,

e) $f: y = x^3 - 1$, f) $f: y = x^4 - x^2 - 12$,

g) $f: y = 5x^3 - 3x^2 + 3x - 5$, h) $f: y = x^4 - 2x^2 - 3x - 2$,

i) $f: y = x^5 - x^4 - 10x^3 - 5x^2 - 21x + 36$.

Průvodce studiem

Právě jste na konci kapitoly věnované elementárním funkcím. Již víte, že mezi elementární funkce patří funkce exponenciální, logaritmické, mocninné, goniometrické, cyklometrické, hyperbolické, hyperbolometrické a všechny další, které lze z výše jmenovaných vytvořit pomocí konečného počtu operací sčítání, odčítání, násobení, dělení a skládání funkcí. Tedy například funkce

$$f:\ y = \sqrt{\frac{x + \operatorname{tg}(x - \ln x)}{\mathrm{e}^{2x} \operatorname{arctg}(\sqrt{x} + 1)}}$$

je elementární.

Nyní již znáte vlastnosti, definiční obory a grafy základních elementárních funkcí. Tyto znalosti uplatníte nejen při studiu dalších kapitol matematické analýzy, ale také v jiných předmětech. Jedná se skutečně o základní poznatky, s nimiž budete často pracovat.

Na závěr ještě poznamenejme, že ne všechny reálné funkce jedné reálné proměnné jsou elementární. Například funkce signum (viz str. 41) nebo Dirichletova funkce (viz str. 42) nejsou elementární. S dalšími funkcemi, které nejsou elementární, se setkáte v integrálním počtu.

Autotest

Máte-li prostudovány předchozí kapitoly a spočteny příklady za jednotlivými kapitolami, můžete směle přistoupit k následujícímu testu. Test by vám měl pomoci zhodnotit, nakolik jste zvládli a osvojili si doposud probírané učivo a zda můžete s dobrým pocitem přistoupit ke studiu dalších kapitol.

V testu jsou zahrnuty jak otázky testového charakteru (je možno více správných odpovědí), tak početní příklady. Vypracování by vám nemělo zabrat více než 60 minut. Odložte obavy a s chutí do toho.

1. Nakreslete graf funkce $f\colon y = 2|x-3| + 3|x+2|$.
2. Rozhodněte, která z daných funkcí je sudá nebo lichá.
   a) $f\colon y = 3x^2 - 1$, b) $f\colon y = 2\sin x - 3$, c) $f\colon y = \dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$.
3. Určete definiční obor funkcí.
   a) $f\colon y = \arccos\dfrac{3x+2}{4}$, b) $f\colon y = \ln\dfrac{x-1}{x-3} + \sqrt{x^2-4}$,
   c) $f\colon y = \sqrt{\dfrac{x^2-5x+4}{x+2}} + 2\ln\dfrac{x^2+1}{x}$.
4. Napište hodnoty funkcí v daných bodech.
   a) $\operatorname{tg}\pi$, b) $\sin\dfrac{\pi}{6}$, c) $\operatorname{arctg} 1$, d) $\arccos\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
5. Je-li funkce f klesající, pak (může ale nemusí, nemůže, musí) být prostá.
6. Funkce $f\colon y = \sin 2x$ je na intervalu $\langle 0, \pi\rangle$
   a) rostoucí, b) klesající, c) není monotónní.
7. Funkce $f\colon y = x^2$, $x \in \mathbb{R}$, je
   a) ohraničená, b) ohraničená zdola, c) sudá,
   d) lichá, e) prostá, f) rostoucí.
8. Je-li f prostá funkce, pak (může ale nemusí, musí, nemůže) být ryze monotónní.
9. Určete funkci f^{-1} inverzní k funkci

$$f\colon y = 2 + \ln(2x-1), \quad x \in \left(\frac{1}{2}, \infty\right).$$

10. Určete funkci f^{-1} inverzní k funkci

$$f:\ y = -3 + \cos\frac{4x-5}{2}, \quad x \in \left\langle \frac{5}{4}, \frac{5+2\pi}{4} \right\rangle.$$

11. Nakreslete grafy funkcí

a) $f:\ y = \begin{cases} x & \text{pro } x \neq 1, \\ 0 & \text{pro } x = 1, \end{cases}$ b) $f:\ y = \begin{cases} -1 & \text{pro } x < 0, \\ 1 & \text{pro } x \in (0, 1), \\ -1 & \text{pro } x \geqq 1. \end{cases}$

12. Najděte všechny kořeny polynomu $f:\ y = x^5 - x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 2x$, víte-li, že má kořeny $x_1 = -2$ a $x_2 = 1$.
13. Polynom s reálnými koeficienty stupně $n \geqq 1$ má v oboru reálných čísel (aspoň, právě, nejvýše) n různých kořenů.
14. Nechť polynom stupně $n = 4$ má trojnásobný kořen x_0. Pak tento polynom (může, nemůže, musí) být monotónní.
15. Když jedna a půl slepice snese jedno a půl vejce za jeden a půl dne, kolik vajec snesou tři slepice za tři dny?

Výsledky autotestu najdete v *Klíči k řešeným příkladům*. Zkontrolujte si výsledky a pokuste se objektivně sami sebe ohodnotit. Nemáte-li žádnou nebo jednu chybu, je třeba vám skutečně pogratulovat. Zvládli jste to skvěle. Pokud jste se dopustili nějakých chyb v příkladu 3 nebo 10, tak také nevěšte hlavu — tyto příklady patří mezi obtížnější. V ostatních případech (obzvláště máte-li více než třetinu otázek odpovězenu špatně) se budete muset vrátit k předchozím kapitolám a znovu si promyslet pojmy, v kterých jste chybovali. Doporučujeme si znovu prostudovat definice i řešené příklady. Poté se znovu vraťte k AUTOTESTU a vypočtěte ještě jednou příklady, v nichž jste chybovali.

*****

Nazvěte svůj omyl zkušeností — jeho tíha bude hned o polovinu menší.

(G. K. Chesterton)

*****

Kapitola 5

Posloupnosti

Průvodce studiem

V této kapitole se budeme zabývat speciálním případem funkcí, jejichž definičním oborem je množina všech přirozených čísel. Takové funkce nazveme posloupnosti.

Nejprve si připomeneme základní vlastnosti posloupností a stručně se zmíníme o posloupnostech známých ze střední školy — aritmetické a geometrické posloupnosti.

Stěžejním cílem této kapitoly je zavedení pojmu limita posloupnosti, diskuse vlastností limity a konkrétní výpočet limit. Volně řečeno, bude nás zajímat, k čemu se členy posloupnosti „přibližují“. Uvažujeme-li například posloupnost $1{,}9$; $1{,}99$; $1{,}999; \ldots$*, je jasné, že se členy této posloupnosti neustále přibližují k číslu 2. Naším cílem bude toto „blížení se“ matematicky popsat, zpřesnit. I když se zdá pojem limity intuitivně zcela jasný, matematikům trvalo několik století než došli k dnešní, zcela přesné, definici. A to i přesto, že v intuitivní podobě se tento pojem již dlouho používal. Problém je v tom, že definovat limitu znamená popsat dynamický proces (něco se k něčemu přibližuje) statickými nástroji.*

V dalších kapitolách pak zavedeme pojem limity pro funkce a na základě limity definujeme další dva základní pojmy diferenciálního počtu — spojitost a derivaci.

Upozorňujeme čtenáře, že se v definici pojmu limita poprvé setká se třemi po sobě jdoucími kvantifikátory. Pochopit význam sledu tří kvantifikátorů není zcela triviální, a je proto třeba mu věnovat dostatečnou pozornost.

Cíle

Po prostudování této kapitoly budete umět

- objasnit definice pojmů posloupnost, ohraničená a monotónní posloupnost,
- definovat a vysvětlit pojem limity posloupnosti,
- vypočítat jednoduché limity.

5.1 Definice posloupnosti

Definice 5.1. *Posloupností reálných čísel* (dále jen *posloupností*) budeme nazývat funkci, jejímž definičním oborem je množina všech přirozených čísel $\mathbb{N}$.

Funkční hodnoty posloupnosti se nazývají *členy posloupnosti*. Funkční hodnota posloupnosti f v bodě $n \in \mathbb{N}$ se nazývá *n-tý člen posloupnosti* a značí se místo $f(n)$ zpravidla f_n.

Posloupnost, která každému $n \in \mathbb{N}$ přiřazuje číslo $a_n \in \mathbb{R}$, budeme zapisovat některým z následujících způsobů: $(a_1, a_2, a_3, \dots)$; (a_n); $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

Zadání posloupnosti

Víme, že libovolná funkce f je zadána, je-li dán definiční obor funkce a předpis, kterým každému $x \in D(f)$ přiřazujeme právě jedno $y \in H(f)$. Definičním oborem posloupností je vždy množina $\mathbb{N}$[1], nebudeme tedy definiční obor uvádět. Stačí tudíž zadat funkční předpis posloupnosti a ten se zpravidla zadává jedním z následujících způsobů:

a) *vzorcem pro n-tý člen a_n*, např. $a_n = 2^{n-1}$, $a_n = 2n - 1$.
b) *rekurentně* zadáním prvního členu posloupnosti nebo několika prvních členů posloupnosti a vzorcem, podle něhož lze určit další členy pomocí předchozích členů. Např. $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$, $n \geqq 2$.

Příklad 5.2. Určete prvních pět členů následujících posloupností:

a) $a_n = (-1)^{n-1}$,   b) $a_n = \frac{1}{n}$,

c) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + 2$, $n \geqq 1$,   d) $a_n = \sqrt{3}$,

e) $a_1 = a_2 = 1$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, $n \geqq 3$.

Řešení.

a) Dosadíme postupně $n = 1, 2, 3, 4, 5$ a dostáváme: $1, -1, 1, -1, 1$.
b) Obdobně jako v případě a) dostaneme: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$. Tato posloupnost je nazývá *harmonická*.
c) Do vzorce pro a_{n+1} dosadíme postupně $n = 1, 2, 3, 4$ a dostáváme spolu s prvním členem: $1, 3, 5, 7, 9$.
d) Jedná se o *konstantní* posloupnost: $\sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3}$.
e) Do vzorce pro a_n dosadíme postupně $n = 3, 4, 5$ a dostáváme spolu s prvními dvěma členy: $1, 1, 2, 3, 5$. Jedná se o tzv. *Fibonacciho posloupnost*[2]. ▲

[1] Bude upřesněno v poznámce 5.11

[2] **Leonardo (Fibonacci) Pisánský** (čti fibonači) (1170–1250) — italský matematik. Zasloužil se o rozšíření arabských a indických matematických poznatků v Evropě. V roce 1202 vydal *Knihu o abaku*, kde vysvětlil užití arabských číslic a použil poprvé v Evropě záporná čísla. K uvedené posloupnosti ho přivedl problém týkající se růstu králičí populace.

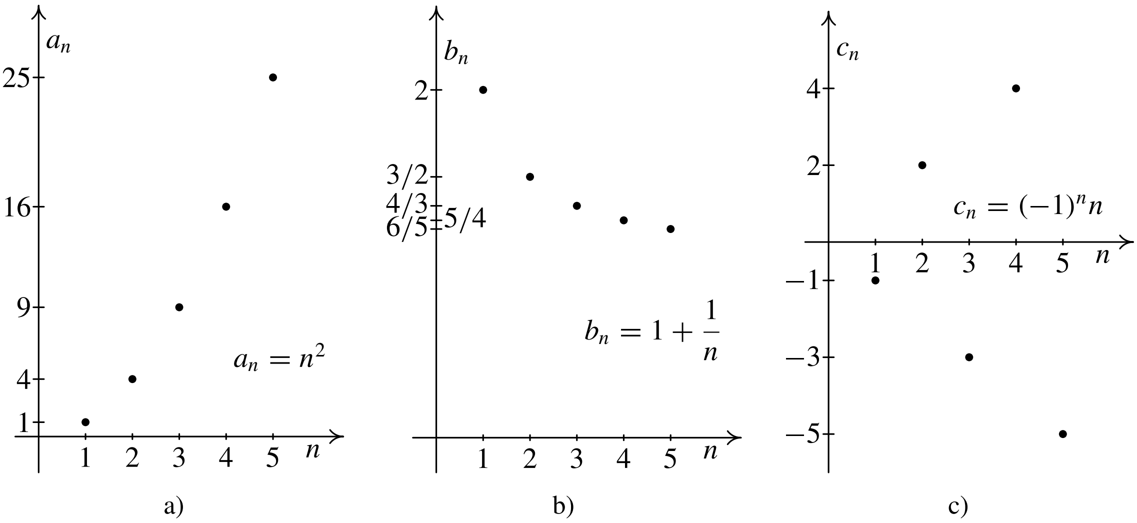
Grafické znázornění posloupnosti

Grafem posloupnosti je množina vzájemně izolovaných bodů.

Příklad 5.3. Znázorněte graficky prvních pět členů posloupností:

a) $a_n = n^2$, b) $b_n = 1 + \dfrac{1}{n}$, c) $c_n = (-1)^n n$.

Řešení. Grafy s prvními pěti členy posloupností jsou znázorněny na obr. 5.1 ▲



Obr. 5.1

Některé vlastnosti posloupností

Protože posloupnost je zvláštním případem funkce, můžeme u ní zkoumat obdobné vlastnosti, např. ohraničenost a monotonii. Definice těchto pojmů jsme uvedli obecně pro funkce — viz 3.8, 3.12. Pro posloupnosti je lze formulovat takto:

Posloupnost (a_n) se nazývá

- *shora ohraničená*, právě když existuje $c \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí: $a_n \leqq c$,
- *zdola ohraničená*, právě když existuje $c \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí: $a_n \geqq c$,
- *ohraničená*, právě když existuje $c \in \mathbb{R}^+$ takové, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí: $|a_n| \leqq c$,
- *rostoucí*, právě když pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí: $a_n < a_{n+1}$,
- *klesající*, právě když pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí: $a_n > a_{n+1}$,
- *nerostoucí*, právě když pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí: $a_n \geqq a_{n+1}$,
- *neklesající*, právě když pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí: $a_n \leqq a_{n+1}$.

Rostoucí, klesající, neklesající, nerostoucí posloupnosti nazýváme souhrnně *monotónními posloupnostmi*. Posloupnosti rostoucí a klesající nazýváme *ryze monotónní posloupnosti*.

Ukažme si, jak lze vztah pro rostoucí posloupnost odvodit z definice rostoucí funkce. Víme, že funkce f je rostoucí, jestliže pro každé $x_1, x_2 \in D(f)$ takové, že $x_1 < x_2$ platí $f(x_1) < f(x_2)$ — viz definice 3.12.

Pro posloupnosti lze tuto podmínku přepsat takto: posloupnost (a_n) je rostoucí, jestliže pro každé $m, n \in \mathbb{N}$ takové, že $m < n$, platí $a_m < a_n$. Je-li tato podmínka splněna pro každé $m, n \in \mathbb{N}$, $m < n$, pak je samozřejmě splněna i pro každé dva po sobě jdoucí indexy $n, n+1$. A naopak, je-li splněna pro každé dva po sobě jdoucí indexy, pak platí pro všechna přirozená čísla.

Předchozí podmínku lze tedy nahradit podmínkou: pro všechna $n \in \mathbb{N}$ taková, že $n < n+1$, platí $a_n < a_{n+1}$. Ale nerovnost $n < n+1$ platí pro všechna přirozená čísla n. Můžeme tedy psát: posloupnost (a_n) je rostoucí, právě když pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí, že $a_n < a_{n+1}$. Obdobně bychom postupovali v ostatních případech.

Příklad 5.4. Určete, zda jsou následující posloupnosti ohraničené:

a) $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$, b) $b_n = 3\sin(n^2+1)$.

Řešení.

a) Chceme najít takové $c \in \mathbb{R}^+$, aby pro každé $n \in \mathbb{N}$ platilo $|a_n| \leqq c$. Jelikož pro každé $n \in \mathbb{N}$ je

$$|a_n| = \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = |(-1)^n| \cdot \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} \leqq 1,$$

můžeme vzít $c = 1$, případně jakékoli větší reálné číslo. Tedy posloupnost (a_n) je ohraničená — viz obr. 5.2 a).

b) Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$|\sin(n^2+1)| \leqq 1 \;\Leftrightarrow\; 3|\sin(n^2+1)| \leqq 3 \;\Leftrightarrow\; |3\sin(n^2+1)| \leqq 3.$$

Tedy $|b_n| \leqq 3$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, a posloupnost (b_n) je ohraničená — viz obr. 5.2 b). ▲

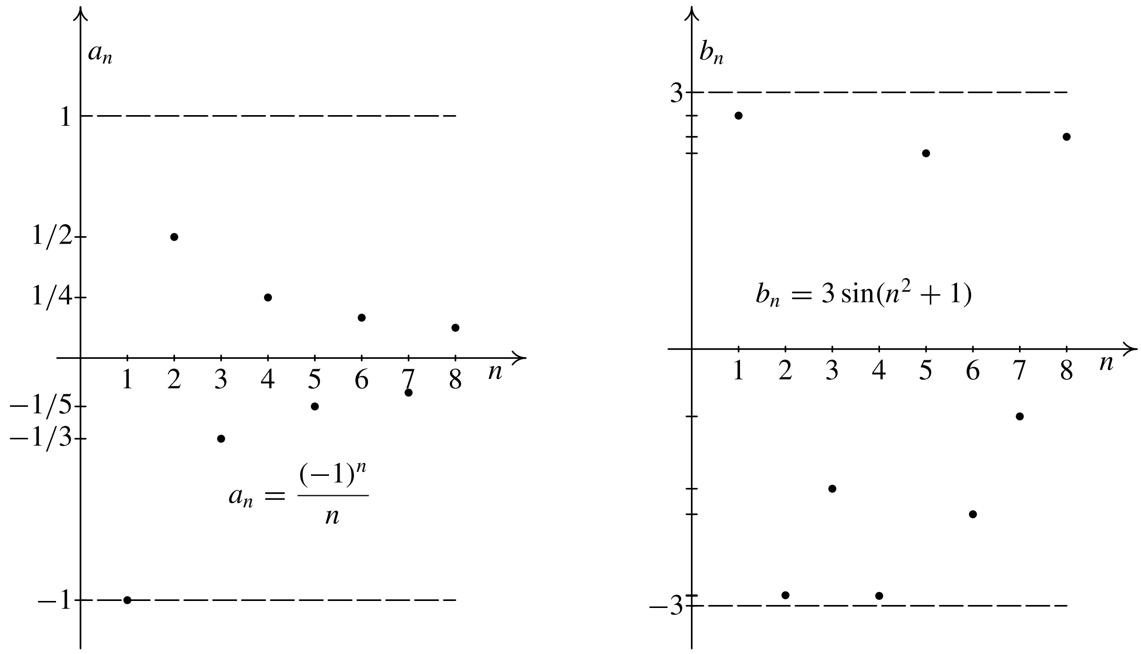
Připomeňme si nyní základní vlastnosti dvou speciálních typů posloupností — aritmetické a geometrické posloupnosti.

Aritmetická posloupnost

Nechť (a_n) je posloupnost. Existuje-li $d \in \mathbb{R}$ tak, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí

$$a_{n+1} = a_n + d,$$

říkáme, že (a_n) je *aritmetická posloupnost* a číslo d se nazývá *diference*.
Aritmetická posloupnost je jednoznačně zadána prvním členem a_1 a diferencí d.
Pro každou aritmetickou posloupnost (a_n) platí:



a) b)

Obr. 5.2

i) n-tý člen lze vyjádřit vzorcem $a_n = a_1 + (n-1)d$.
ii) Pro libovolné dva členy a_r, a_s platí $a_s = a_r + (s-r)d$.
iii) Pro součet s_n prvních n členů posloupnosti platí $s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$.

Příklad 5.5. Zjistěte, zda jsou následující posloupnosti aritmetické

a) $a_n = 2 - \dfrac{n}{3}$, b) $b_n = \dfrac{2n+1}{n+1}$.

Řešení.

a) Musíme ověřit, zda existuje takové $d \in \mathbb{R}$, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_{n+1} = a_n + d$. Přitom

$$d = a_{n+1} - a_n = \left(2 - \frac{n+1}{3}\right) - \left(2 - \frac{n}{3}\right) = -\frac{1}{3}.$$

Tedy posloupnost (a_n) je aritmetická.

b) Postupujeme analogicky:

$$d = a_{n+1} - a_n = \frac{2(n+1)+1}{n+1+1} - \frac{2n+1}{n+1} = $$
$$= \frac{(2n+3)(n+1) - (2n+1)(n+2)}{(n+2)(n+1)} = \frac{1}{(n+2)(n+1)}.$$

Například pro $n = 1$ dostáváme $d = 1/6$, pro $n = 2$ vyjde $d = 1/12$. Zjistili jsme, že neexistuje takové číslo $d \in \mathbb{R}$, aby pro každé $n \in \mathbb{N}$ platilo $a_{n+1} = a_n + d$ (naše d závisí na n), a tudíž se nejedná o aritmetickou posloupnost. ▲

Geometrická posloupnost

Nechť (a_n) je posloupnost. Existuje-li $q \in \mathbb{R}$ tak, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí

$$a_{n+1} = a_n \cdot q,$$

říkáme, že (a_n) je *geometrická posloupnost* a číslo q se nazývá *kvocient*.
Geometrická posloupnost je jednoznačně zadána prvním členem a_1 a kvocientem q.

Pro každou geometrickou posloupnost (a_n) platí:

i) n-tý člen lze vyjádřit vzorcem $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$.
ii) Pro libovolné dva členy a_r, a_s platí $a_s = a_r \cdot q^{s-r}$.
iii) Pro součet s_n prvních n členů posloupnosti platí $s_n = a_1 \frac{q^n-1}{q-1}$, je-li $q \neq 1$. Je-li $q = 1$, pak $s_n = n \cdot a_1$.

Příklad 5.6. Určete, na jakou částku vzroste vklad a_0 korun uložený do banky za n let, jestliže banka připisuje na konci každého roku $p\%$ z částky v tom roce uložené (tzv. *p-procentní složené úrokování*).

Řešení. Na konci prvního roku připíše banka $p\%$ z původně vložené částky a_0, takže vklad vzroste na částku

$$a_1 = a_0 + \frac{p}{100}a_0 = a_0\left(1 + \frac{p}{100}\right).$$

Na konci druhého roku připíše k této částce $p\%$ z a_1, takže vklad vzroste na částku

$$a_2 = a_1 + \frac{p}{100}a_1 = a_1\left(1 + \frac{p}{100}\right) = a_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)^2.$$

Vklady po připsání úroků v jednotlivých letech tvoří zřejmě geometrickou posloupnost s kvocientem $q = 1 + \frac{p}{100}$ a prvním členem $a_1 = a_0 \cdot q$. Využitím vzorce $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, dojdeme k závěru: Při p-procentním složeném úrokování vzroste původně vložená částka a_0 korun na částku a_n korun, kterou vypočteme podle vzorce

$$a_n = a_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n. \qquad \blacktriangle$$

Vzorec tohoto typu se používá i pro řešení mnoha jiných úloh, např. o vzrůstu počtu obyvatel nebo vzrůstu objemu výroby v daném časovém úseku.

5.2 Limita posloupnosti

Než si definujeme pojem limity posloupnosti, ilustrujme si tento pojem na chování posloupnosti

$$a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}.$$

Určeme si prvních pár členů posloupnosti:

$$\begin{aligned}
a_1 &= 1 + \frac{(-1)^1}{1} = 1 - 1 = 0,\\
a_2 &= 1 + \frac{(-1)^2}{2} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2},\\
a_3 &= 1 + \frac{(-1)^3}{3} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3},\\
a_4 &= 1 + \frac{(-1)^4}{4} = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4},\\
a_5 &= 1 + \frac{(-1)^5}{5} = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5},\\
&\vdots
\end{aligned}$$

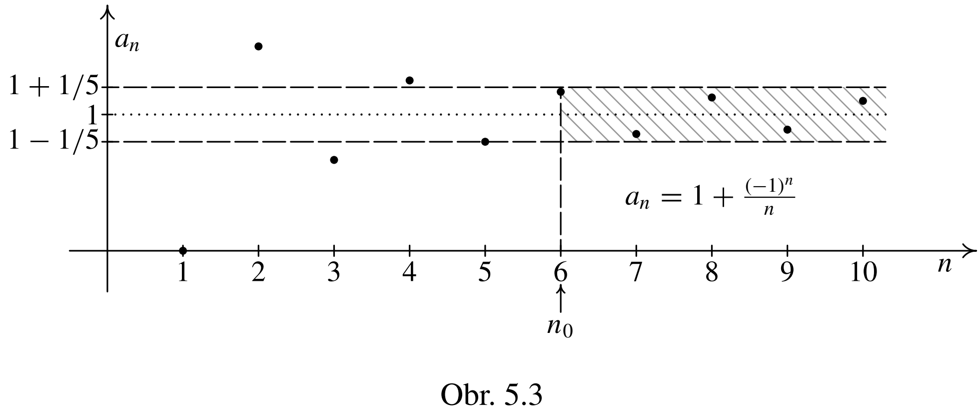
Vidíme, že se členy posloupnosti s rostoucím n stále pohybují kolem hodnoty 1. Přesněji řečeno se k této hodnotě stále více a více přibližují. Zvolme nyní libovolné kladné reálné číslo ε. Do grafického znázornění posloupnosti si zakresleme dvě vodorovné čáry ve výškách $1 - \varepsilon$ a $1 + \varepsilon$. Tím jsme kolem hodnoty 1 zakreslili tzv. ε-ový pás. Zkusme odpovědět na následující otázku.

Zvolíme-li ε jakkoliv, podaří se nám najít index n_0 takový, že všechny členy posloupnosti s indexem větším nebo rovným n_0 budou ležet uvnitř ε-ového pásu?

Udělejme nyní drobnou odbočku v naší úvaze a zamysleme se nad tím, jak budeme zapisovat fakt, že člen a_n leží v ε-ovém pásu. Pás jsme nakreslili kolem hodnoty 1. Tedy člen a_n leží v ε-ovém pásu, jestliže je rozdíl $|a_n - 1| < \varepsilon$. Absolutní hodnota zajišťuje to, že člen a_n může v grafickém znázornění ležet nad i pod hodnotou 1.

Nyní se vraťme zpět k naší otázce.

Například k $\varepsilon = \frac{1}{5}$ existuje index $n_0 = 6$ tak, že pro každé $n \geqq 6$ platí $|a_n - 1| < \frac{1}{5}$. Skutečně pro každé $n \geqq 6$ platí $|1 + \frac{(-1)^n}{n} - 1| < \frac{1}{5}$ — viz obr. 5.3. Všimněte si, že člen a_5 leží na hranici ε-ového pásu a nerovnost $|a_n - 1| < \frac{1}{5}$ nesplňuje.



Obr. 5.3

Zvolíme-li $\varepsilon = \frac{1}{10}$, pak najdeme index $n_0 = 11$ tak, že pro každé $n \geqq 11$ platí $|a_n - 1| < \frac{1}{10}$. Obdobně k $\varepsilon = \frac{1}{100}$ existuje index $n_0 = 101$ tak, že pro každé $n \geqq 101$ platí $|a_n - 1| < \frac{1}{100}$. Lze ukázat, že opravdu ke každému ε existuje index n_0 takový, že platí $|a_n - 1| < \varepsilon$.

Jinak řečeno, zvolíme-li ε jakkoliv, podaří se nám najít index n_0 takový, že všechny členy posloupnosti s indexem větším nebo rovným n_0 budou ležet uvnitř ε-ového pásu kolem hodnoty 1. V takovém případě budeme říkat, že posloupnost a_n má limitu 1.

Touto úvahou je motivována následující definice.

Definice 5.7. Řekneme, že posloupnost (a_n) *má limitu* $a \in \mathbb{R}$, jestliže ke každému kladnému reálnému číslu ε existuje přirozené číslo n_0 takové, že pro všechna přirozená čísla n větší nebo rovna n_0 platí $|a_n - a| < \varepsilon$.
Píšeme: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Symbolicky zapsáno:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \ \Leftrightarrow\ \left(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqq n_0 :\ |a_n - a| < \varepsilon\right).$$

Poznámka 5.8.

1. Důležité je uvědomit si, že číslo n_0 závisí na ε. Čím je ε menší, tím větší musíme volit n_0. Čím menší je ε, „tím dále musíme v posloupnosti jít“, abychom měli zaručeno, že se již setkáme jen s členy, které se od limitní hodnoty liší o méně než ε.
2. Smysl definice se nezmění, nahradíme-li v ní nerovnost $n \geqq n_0$ ostrou nerovností $n > n_0$. Platí-li totiž nerovnost $|a_n - a| < \varepsilon$ pro každé $n \geqq n_0$, pak jistě platí pro každé $n > n_0$. Naopak, platí-li nerovnost pro $n > n_0$, pak platí pro každé $n \geqq n_0 + 1$, takže stačí zvětšit n_0 o jedničku.

Příklad 5.9. Dokažte z definice, že $\lim\limits_{n\to\infty} c = c$, kde $c \in \mathbb{R}$.

Řešení. Máme dokázat, že ke každému $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $n \geqq n_0$ platí $|a_n - c| < \varepsilon$. Protože $a_n = c$, je $|a_n - c| = |c - c| = |0| = 0$. Zvolíme-li $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ libovolně, můžeme volit $n_0 \in \mathbb{N}$ také libovolně a pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $n \geqq n_0$ bude platit $|a_n - c| < \varepsilon$. ▲

Příklad 5.10. Dokažte z definice, že $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

Řešení. Máme dokázat, že ke každému $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $n \geqq n_0$, platí $|a_n - 0| < \varepsilon$.

Protože $a_n = \frac{1}{n}$, je $|a_n - 0| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n}$. Platí

$$|a_n - 0| < \varepsilon \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{1}{n} < \varepsilon \qquad \Leftrightarrow \qquad n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Protože $\frac{1}{\varepsilon}$ nemusí být přirozené číslo, definujme n_0 jako nejmenší přirozené číslo větší než je $\frac{1}{\varepsilon}$.

Závěr: Ke každému $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ jsme našli $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n \in \mathbb{N},\ n \geqq n_0$, platí $|a_n - 0| < \varepsilon$. ▲

Poznámka 5.11. Z definice limity je vidět, že vlastnost mít limitu a hodnota této limity se nezmění, pokud na začátku posloupnosti vypustíme, přidáme nebo změníme libovolný konečný počet členů posloupnosti.

Přidáme-li např. před posloupnost se členy $a_n = \frac{1}{n}$ pět členů $10, 22, \sqrt{11}, 216, 10^9$, vzniklá posloupnost $\left(10, 22, \sqrt{11}, 216, 10^9, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots\right)$ má limitu 0 stejně jako posloupnost (a_n). Analogicky posloupnost $(\frac{1}{101}, \frac{1}{102}, \frac{1}{103}, \frac{1}{104}, \frac{1}{105}, \frac{1}{106}, \frac{1}{107}, \dots)$, která vznikla z (a_n) vypuštěním první stovky členů, má limitu 0.

Obdobně lze říci, že se limita nezmění, pokud někde „uprostřed" posloupnosti vypustíme, přidáme nebo změníme konečný počet členů. Protože se zabýváme chováním členů posloupnosti pro $n \to \infty$, změníme-li konečný počet členů posloupnosti, stále ještě „zbyde" nekonečně mnoho členů posloupnosti, které mají na hodnotu limity rozhodující vliv.

Z tohoto důvodu je vhodné za posloupnosti považovat i ty funkce, jejichž definiční obor není celé $\mathbb{N}$, ale jen $\mathbb{N} \setminus K$, kde K je konečná podmnožina množiny $\mathbb{N}$. Tedy například funkci danou předpisem $a_n = \frac{1}{(n-3)(n-8)}$ považujeme také za posloupnost (v tomto rozšířeném smyslu), i když členy a_3 a a_8 nejsou definovány. Z definice limity je zřejmé, že o její existenci a hodnotě rozhodují pouze členy „s dostatečně velkým indexem". Sebedelší počáteční konečný úsek posloupnosti nemá vliv na existenci a hodnotu limity.

Podívejme se nyní na posloupnost $a_n = \sqrt{n}$. Vidíme, že s rostoucím n členy posloupnosti stále rostou. Tedy volně řečeno, blíží-li se n k nekonečnu, blíží se i a_n k nekonečnu. Zvolme nyní libovolné kladné reálné číslo k. Do grafického znázornění posloupnosti si zakresleme vodorovnou čáru ve výšce k. Zkusme odpovědět na následující otázku.

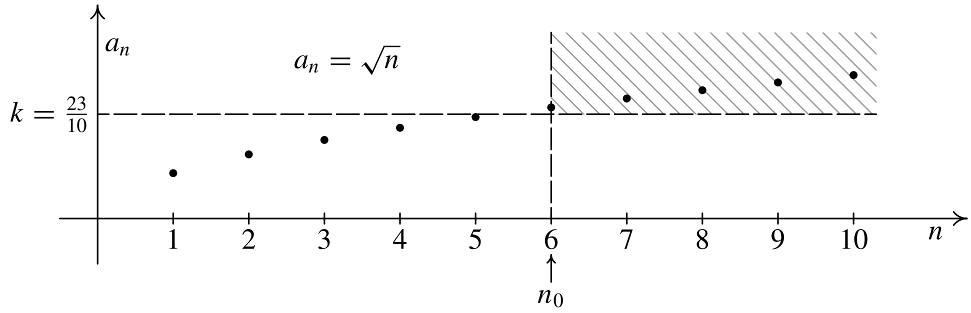
Zvolíme-li reálné číslo k jakkoliv, podaří se nám najít index n_0 takový, že všechny členy posloupnosti s indexem větším nebo rovným n_0 budou ležet nad přímkou ve výšce k?

Například pro $k = \frac{23}{10}$ najdeme index $n_0 = 6$ tak, aby pro každé $n \geqq n_0$ platilo $a_n > k$ — viz obr. 5.4. Jistě si dokážeme představit, že skutečně ke každému reálnému číslu k existuje přirozené číslo n_0 takové, že pro všechna přirozená čísla n větší nebo rovna n_0 platí $a_n > k$. V takovém případě budeme říkat, že posloupnost má limitu plus nekonečno.

Definice 5.12. Řekneme, že posloupnost (a_n) *má limitu plus nekonečno*, jestliže ke každému reálnému číslu k existuje přirozené číslo n_0 takové, že pro všechna přirozená čísla n větší nebo rovna n_0 platí $a_n > k$.
Píšeme: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

Symbolicky zapsáno:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \;\Leftrightarrow\; \left(\forall k \in \mathbb{R}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqq n_0 :\ a_n > k\right) .$$



Obr. 5.4

Příklad 5.13. Dokažte z definice, že $\lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$.

Řešení. Chceme dokázat, že ke každému $k \in \mathbb{R}$, existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $n \geqq n_0$, platí $a_n > k$, tj. $n > k$.
Nechť $k \in \mathbb{R}$. Pak za n_0 stačí zvolit nejbližší z přirozených čísel, které je větší než k. ▲

Analogicky budeme definovat limitu posloupnosti rovnu minus nekonečnu.

Definice 5.14. Řekneme, že posloupnost (a_n) *má limitu minus nekonečno*, jestliže ke každému reálnému číslu h existuje přirozené číslo n_0 takové, že pro všechna přirozená čísla n větší nebo rovna n_0 platí $a_n < h$.
Píšeme: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Symbolicky zapsáno:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \;\Leftrightarrow\; \big(\forall h \in \mathbb{R}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqq n_0 :\ a_n < h\big)\ .$$

5.3 Vlastnosti limit

Věta 5.15. *Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.*

Důkaz. Důkaz provedeme sporem. Předpokládejme, že $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ jsou dvě různé limity posloupnosti (a_n). Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $a < b$.

Zvolme $\varepsilon = \frac{b-a}{2}$. Jelikož $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geqq n_1$, platí $|a_n - a| < \varepsilon$.

Tedy

$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon. \tag{5.1}$$

Jelikož $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = b$, existuje $n_2 \in \mathbb{N}$ takové, že $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geqq n_2$ platí $|a_n - b| < \varepsilon$. Tedy

$$b - \varepsilon < a_n < b + \varepsilon. \tag{5.2}$$

Zvolíme-li $n \geqq \max\{n_1,\ n_2\}$, pak platí rovnosti (5.1) i (5.2). Tedy

$$b-\varepsilon < a_n < a+\varepsilon \qquad \Rightarrow \qquad b-\varepsilon < a+\varepsilon \qquad \Rightarrow \qquad b-a < 2\varepsilon.$$

Z poslední nerovnosti plyne, že $\frac{b-a}{2} < \varepsilon$, což je spor, neboť $\varepsilon = \frac{b-a}{2}$.

Připustili jsme, že existují dvě různé limity a došli jsme ke sporu. Tedy pokud existuje limita, musí být právě jedna. Důkaz jsme provedli pro konečné limity, tj. $a, b \in \mathbb{R}$. Analogicky by se věta dokázala i pro případ limit $\pm\infty$. □

Předchozí věta říká, že pokud existuje limita posloupnosti, pak je právě jedna. Z hlediska limit mohou nastat tyto případy:

a) posloupnost má vlastní (konečnou) limitu a, tj. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a,\ a \in \mathbb{R}$,
b) posloupnost má nevlastní limitu $\pm\infty$, tj. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$,
c) posloupnost nemá limitu (limita posloupnosti neexistuje).

Definice 5.16. Posloupnost (a_n) se nazývá

i) *konvergentní*, jestliže $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, kde $a \in \mathbb{R}$,
ii) *divergentní*, jestliže $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$ nebo limita neexistuje.

Následující věta popisuje důležitou vlastnost konvergentních posloupností.

Věta 5.17. *Každá konvergentní posloupnost je ohraničená.*

Důkaz. Nechť $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, a \in \mathbb{R}$. Máme dokázat, že existuje $c \in \mathbb{R}^+$ takové, že $|a_n| \leqq c$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Zvolme $\varepsilon = 1$. Podle definice limity k $\varepsilon = 1$

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqq n_0 :\ |a_n - a| < 1.$$

Zvolme $c = \max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{n_0}|, |a| + 1\}$. Zřejmě $c \in \mathbb{R}^+$.

Jestliže $n \in \{1, 2, \dots, n_0\}$, je zřejmě $|a_n| \leqq c$.

Jestliže $n \in \mathbb{N}, n \geqq n_0$, pak $|a_n - a| < 1$ (dle definice limity). Tedy

$$|a_n| = |a_n - a + a| \leqq |a_n - a| + |a| < 1 + |a| \leqq c.$$

Tudíž $|a_n| \leqq c$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, tj. (a_n) je ohraničená. □

Větu nelze obrátit, tj. ne každá ohraničená posloupnost je konvergentní. Např. posloupnost se členy $c_n = (-1)^n$ je ohraničená, ale není konvergentní.

Shrňme nyní vztah konvergence, divergence a ohraničenosti posloupnosti:

a) je-li $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a,\ a \in \mathbb{R}$, je posloupnost ohraničená,
b) je-li $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, je posloupnost zdola ohraničená, ale není ohraničená shora,

c) je-li $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$, je posloupnost ohraničená shora, ale není ohraničená zdola,
d) jestliže limita neexistuje, pak o ohraničenosti posloupnosti nelze obecně nic říci (může, ale nemusí být ohraničená). Např. posloupnosti se členy $a_n = (-1)^n$, $b_n = (-1)^n \cdot n$ nemají limitu, ale první je ohraničená a druhá ne.

Již jsme viděli, že ohraničená posloupnost nemusí být konvergentní. Ukazuje se ale, že když vynecháme některé její členy, lze získat konvergentní posloupnost.

Definice 5.18. Nechť je dána posloupnost (a_n) a rostoucí posloupnost přirozených čísel (k_n). Posloupnost (b_n), pro jejíž členy platí $b_n = a_{k_n}$, se nazývá *posloupností vybranou z posloupnosti* (a_n).

Platí následující důležitá věta (její důkaz je poněkud obtížnější, viz [7] str. 35).

Věta 5.19. *Z každé ohraničené posloupnosti lze vybrat konvergentní posloupnost.*

Například posloupnost $(a_n) = \big((-1)^n\big)$ je ohraničená, ale není konvergentní. Vybrané posloupnosti $(b_n) = (1)$, $(c_n) = (-1)$ již konvergentní jsou: $\lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty}(-1) = -1$.

Věta 5.20. *Nechť posloupnost* (a_n) *má limitu* $a \in \mathbb{R}^\star$. *Pak každá z ní vybraná posloupnost má touž limitu.*

Uvažujme například posloupnost $(a_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$ a rostoucí posloupnost přirozených čísel $(k_n) = (3n) = (3, 6, 9, 12, \dots)$. Pak platí, že vybraná posloupnost $(b_n) = (a_{k_n}) = (a_3, a_6, a_9, a_{12}, \dots) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{9}, \frac{1}{12}, \dots\right)$ má limitu stejnou jako posloupnost (a_n). Tj. $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{3n} = 0$.

Poznámka 5.21.

1. Jak jsme právě viděli, tvrzení věty 5.20 často využíváme při konkrétním výpočtu limit. Víme-li například, že $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, pak také víme, že $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{5n} = 0$ nebo $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2n+5} = 0$, neboť obě tyto posloupnosti jsou vybrané z posloupnosti $a_n = \frac{1}{n}$.
Obdobně i pro nevlastní limity. Víme-li například, že $\lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$, pak také víme, že $\lim\limits_{n\to\infty} 2n = \infty$ nebo $\lim\limits_{n\to\infty}(n+3) = \infty$, neboť obě tyto posloupnosti jsou vybrané z posloupnosti $(a_n) = (n)$.
2. Dále se věta 5.20 často využívá k důkazu, že daná posloupnost není konvergentní. Stačí najít libovolnou vybranou posloupnost, která není konvergentní, nebo dvě vybrané posloupnosti, jejichž limity se nerovnají (pokud by limita posloupnosti existovala, musely by všechny vybrané posloupnosti mít tutéž limitu). Z tohoto důvodu např. neexistuje limita posloupnosti $(a_n) = \big((-1)^n\big)$, neboť vybrané posloupnosti $(b_n) = (1)$ a $(c_n) = (-1)$ mají různé limity: $\lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1$ a $\lim\limits_{n\to\infty}(-1) = -1$.
3. Porovnejte tvrzení věty 5.20 s poznámkou 5.11. Z definice 5.18 je zřejmé, že vybranou posloupnost získáme, když z původní posloupnosti vypustíme konečně nebo nekonečně mnoho členů, ovšem tak, aby jich *nekonečně mnoho* zůstalo. Taková vybraná

posloupnost má pak stejnou limitu jako posloupnost původní, pokud tato limita existuje. Toto tvrzení rozšiřuje platnost poznámky 5.11, v níž bylo řečeno, že se limita nezmění, pokud vypustíme libovolný konečný počet členů posloupnosti.

Nyní si uvedeme větu, která popisuje vliv monotonie posloupnosti na existenci a hodnotu limity.

Věta 5.22.

i) *Nechť* (a_n) *je neklesající shora ohraničená posloupnost. Pak existuje konečná* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ *a rovná se supremu oboru hodnot této posloupnosti, tj.*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n, n \in \mathbb{N}\}.$$

ii) *Nechť* (a_n) *je nerostoucí zdola ohraničená posloupnost. Pak existuje konečná* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ *a rovná se infimu oboru hodnot této posloupnosti, tj.*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n, n \in \mathbb{N}\}.$$

iii) *Nechť* (a_n) *je neklesající posloupnost, která není shora ohraničená. Pak*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty.$$

iv) *Nechť* (a_n) *je nerostoucí posloupnost, která není zdola ohraničená. Pak*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty.$$

Pomocí předchozí věty lze dokázat existenci následující důležité limity. Lze ověřit, že posloupnost $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ je rostoucí a shora ohraničená ($a_n \leqq 3$). Na základě věty 5.22 má tedy konečnou limitu.

Definice 5.23. Limitu posloupnosti $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ nazýváme *Eulerovo číslo* a označujeme e.

O Eulerově čísle jsme se již zmínili v poznámce 4.1.

Příklad 5.24. Dokažte, že $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n = \infty$.

Řešení. Posloupnost $a_n = 2^n$ je rostoucí, neboť pro všechna přirozená čísla n platí $2^n < 2^{n+1}$. Dále víme, že posloupnost není shora ohraničená (neexistuje konstanta $c \in \mathbb{R}$ tak, aby platilo $a_n = 2^n \leqq c$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$). Dle předchozí věty tedy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$. ▲

5.4 Výpočet limit

Věta 5.25. *Nechť* $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, $a, b \in \mathbb{R}^\star$. *Pak platí:*

1) $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$,
2) $\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = a - b$,
3) $\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$,
4) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$, *je-li* $b_n \neq 0$ *pro všechna* $n \in \mathbb{N}$,
5) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{a}$, *je-li* $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ *a* $a_n \geqq 0$ *pro všechna* $n \in \mathbb{N}$,
6) $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |a|$,

má-li příslušná pravá strana rovnosti smysl.

Poznámka 5.26.

1. Každé z tvrzení věty 5.25 říká, že příslušná limita existuje, a dává návod, jak ji lze vytvořit z čísel a, b.
2. Bod 6) ve větě 5.25 říká, že pokud existuje $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, pak existuje i $\lim_{n\to\infty} |a_n|$ a platí, že $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |a|$.
   V případě, že $a \neq 0$, tvrzení nelze obrátit. Není pravda, že z existence $\lim_{n\to\infty} |a_n|$ plyne existence $\lim_{n\to\infty} a_n$. Příkladem je posloupnost se členy $a_n = (-1)^n$, kde $\lim_{n\to\infty} |a_n|$ existuje, ale $\lim_{n\to\infty} a_n$ neexistuje.
   V případě, že $a = 0$, platí i obrácená implikace:
   $$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} |a_n| = 0.$$
   Tuto ekvivalenci budeme potřebovat v některých důkazech.
3. Předpoklad „má-li příslušná pravá strana rovnosti smysl" je velmi důležitý. Pokud není tento předpoklad splněn, pak k výpočtu limity nemůžeme větu 5.25 použít.
   Je-li například $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ a $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$, pak limity $\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n)$ a $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ nelze počítat s využitím předchozí věty, neboť na pravé straně dostáváme nedefinované výrazy $\infty - \infty$ a $\frac{\infty}{\infty}$. To však neznamená, že příslušná limita neexistuje, jen je třeba k výpočtu limity použít jiný postup.
   Doporučujeme si zopakovat všechny operace, které jsou, příp. nejsou, definovány na množině $\mathbb{R}^\star$ — viz str. 21.

Při výpočtu limit posloupností budeme využívat znalosti několika základních limit. V předchozím textu jsme si ukázali, že platí:

$\boxed{1}$	$\lim\limits_{n\to\infty} c = c \quad (c \in \mathbb{R}),$	$\boxed{3}$	$\lim\limits_{n\to\infty} n = \infty,$
$\boxed{2}$	$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0,$	$\boxed{4}$	$\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}.$

Postupně si do tohoto seznamu přidáme ještě dvě další základní limity, které je vhodné si zapamatovat.

Příklad 5.27. Vypočtěte limity posloupností:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} (n^2 + 5n - 1)$, b) $\lim\limits_{n\to\infty} (n^2 - 5n - 1)$, c) $\lim\limits_{n\to\infty} (-n^2 + 5n)$,

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{-5n^2 + 8n + 4}{1 + 2n + 3n^2}$, e) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{-8n^2 + 6n + 7}{2n + 5}$, f) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{-8n + 3}{9 - 2n - 4n^2}$.

Řešení.

a) Využijeme větu 5.25:

$$\lim_{n\to\infty} (n^2 + 5n - 1) = \lim_{n\to\infty} n^2 + \lim_{n\to\infty} 5n - \lim_{n\to\infty} 1 =$$
$$= \lim_{n\to\infty} n \cdot \lim_{n\to\infty} n + \lim_{n\to\infty} 5 \cdot \lim_{n\to\infty} n - \lim_{n\to\infty} 1 = \infty \cdot \infty + 5 \cdot \infty - 1 = \infty.$$

b) Nelze použít větu 5.25, protože na pravé straně dostáváme nedefinovaný výraz $\infty - \infty$. Upravíme vytýkáním (vytýkáme vždy nejvyšší mocninu) a pak teprve využijeme větu 5.25:

$$\lim_{n\to\infty} (n^2 - 5n - 1) = \lim_{n\to\infty} n^2\left(1 - \frac{5}{n} - \frac{5}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty} n^2 \cdot \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{5}{n} - \frac{5}{n^2}\right) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} n \cdot \lim_{n\to\infty} n \cdot \left(\lim_{n\to\infty} 1 - \lim_{n\to\infty} 5 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} - \lim_{n\to\infty} 5 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\right) =$$
$$= \infty \cdot \infty \cdot (1 - 5 \cdot 0 - 5 \cdot 0 \cdot 0) = \infty \cdot 1 = \infty.$$

c) Obdobně jako v případě b) nelze použít větu 5.25, protože bychom dostali nedefinovaný výraz $-\infty + \infty$. Opět musíme nejprve vytknout nejvyšší mocninu. Budeme již postupovat rychleji.

$$\lim_{n\to\infty} (-n^2 + 5n) = \lim_{n\to\infty} (-n^2)\left(1 - \frac{5}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} (-n^2) \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{5}{n}\right) =$$
$$= -\infty(1 - 0) = -\infty.$$

d) Nelze ihned použít větu 5.25, musíme výraz v limitě nejprve upravit. Vytkneme z čitatele i jmenovatele člen s nejvyšší mocninou ze jmenovatele, tj. n^2. Tento člen pak zkrátíme:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-5n^2 + 8n + 4}{1 + 2n + 3n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\left(-5 + \frac{8}{n} + \frac{4}{n^2}\right)}{n^2\left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n} + 3\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{-5 + \frac{8}{n} + \frac{4}{n^2}}{\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n} + 3} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty}(-5) + \lim\limits_{n\to\infty} 8 \cdot \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} + \lim\limits_{n\to\infty} 4 \cdot \left(\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right)^2}{\left(\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right)^2 + \lim\limits_{n\to\infty} 2 \cdot \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} + \lim\limits_{n\to\infty} 3} = \frac{-5 + 8\cdot 0 + 4\cdot 0}{0 + 2\cdot 0 + 3} = -\frac{5}{3}\,.$$

e) Postupujeme obdobně jako v příkladě d):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-8n^2 + 6n + 7}{2n + 5} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\cdot\left(-8n + 6 + \frac{7}{n}\right)}{n\cdot\left(2 + \frac{5}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{-8n + 6 + \frac{7}{n}}{2 + \frac{5}{n}} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty}(-8)\cdot \lim\limits_{n\to\infty} n + \lim\limits_{n\to\infty} 6 + 7\cdot \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty} 2 + 5\cdot \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}} = \frac{-8\cdot\infty + 6 + 7\cdot 0}{2 + 5\cdot 0} = \frac{-\infty}{2} = -\infty.$$

f) $$\lim_{n\to\infty} \frac{-8n + 3}{9 - 2n - 4n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\cdot\left(\frac{-8}{n} + \frac{3}{n^2}\right)}{n^2\cdot\left(\frac{9}{n^2} - \frac{2}{n} - 4\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{-8}{n} + \frac{3}{n^2}}{\frac{9}{n^2} - \frac{2}{n} - 4} =.$$

$$= \frac{0 + 0}{0 - 0 - 4} = 0.$$

▲

Všimněte si, že počítáme-li limitu ze zlomku, kde je v čitateli i ve jmenovateli nějaký polynom, pak výsledek závisí na členech s nejvyšší mocninou. Je-li v čitateli polynom vyššího stupně než ve jmenovateli, pak je výsledek $\pm\infty$, je-li polynom vyššího stupně ve jmenovateli, pak je výsledek 0. Jestliže jsou v čitateli i jmenovateli polynomy stejných stupňů, pak je výsledek reálné číslo dané koeficienty u nejvyšších mocnin.

Obdobně jako s mocninami počítáme i s odmocninami — viz následující příklad.

Příklad 5.28. Vypočtěte limity posloupností:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{9n^2 - 4} - 2n\right)$, b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{9n^2 - 4} - 3n\right)$, c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 + 2}}$.

Řešení.

a) Vzhledem k tomu, že nelze ihned použít větu 5.25, musíme výrazy upravit. Budeme vytýkat nejvyšší mocninu.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{9n^2 - 4} - 2n\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2\left(9 - \frac{4}{n^2}\right)} - 2n\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2}\cdot\sqrt{9 - \frac{4}{n^2}} - 2n\right) = \lim_{n\to\infty}\left(n\cdot\sqrt{9 - \frac{4}{n^2}} - 2n\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\cdot\left(\sqrt{9 - \frac{4}{n^2}} - 2\right) = \lim_{n\to\infty} n\cdot \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{9 - \frac{4}{n^2}} - 2\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\cdot\left(\sqrt{\lim_{n\to\infty} 9 - \lim_{n\to\infty} 4\cdot \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^2} - \lim_{n\to\infty} 2\right) =$$

$$= \infty\cdot(\sqrt{9 - 4\cdot 0} - 2) = \infty\cdot(3 - 2) = \infty\cdot 1 = \infty.$$

b) Pokud bychom chtěli vyřešit tento příklad stejným postupem jako v případě a), dostali bychom nedefinovaný výraz $0 \cdot \infty$. Musíme proto postupovat jinak. Rozšíříme výraz takovým zlomkem, abychom se za použití vztahu $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ zbavili odmocniny. Dále budeme vytýkat nejvyšší mocninu.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{9n^2-4}-3n\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{9n^2-4}-3n\right)\cdot\frac{\sqrt{9n^2-4}+3n}{\sqrt{9n^2-4}+3n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{9n^2-4-9n^2}{\sqrt{9n^2-4}+3n} = \lim_{n\to\infty}\frac{-4}{n\cdot\left(\sqrt{9-\frac{4}{n^2}}+3\right)} = \frac{-4}{\infty\cdot(3+3)} = 0.$$

c) Obdobně jako v příkladě b) rozšíříme výraz takovým zlomkem, abychom se zbavili odmocniny ve jmenovateli.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2+2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2+2}}\cdot\frac{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+2}}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+2}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+2}}{n^2+n-(n^2+2)} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+2}}{n-2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{2}{n^2}}\right)}{n\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)} = \frac{1+1}{1} = 2.$$

▲

Nyní si uvedeme dva obtížnější příklady vyžadující zvládnutí počítání s mocninami a odmocninami.

Příklad 5.29. Vypočtěte limity posloupností:

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2+1}-16n}{\sqrt[3]{n^4+18n}}$, b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{2n^5+3n+1}+\sqrt{5n^2+3n}}{\sqrt{2n^3+4n+1}-\sqrt[3]{5n^5+1}}$.

Řešení.

a) $$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2+1}-16n}{\sqrt[3]{n^4+18n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^4\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4}\right)}-16n}{\sqrt[3]{n^4\left(1+\frac{18}{n^3}\right)}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^4}\left(\sqrt[3]{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4}}-\frac{16n}{\sqrt[3]{n^4}}\right)}{\sqrt[3]{n^4}\sqrt[3]{1+\frac{18}{n^3}}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4}}-16\sqrt[3]{\frac{1}{n}}}{\sqrt[3]{1+\frac{18}{n^3}}} =$$

$$= \frac{\sqrt[3]{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4}\right)}-16\sqrt[3]{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}}{\sqrt[3]{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{18}{n^3}\right)}} = \frac{\sqrt[3]{0+0}-16\sqrt[3]{0}}{\sqrt[3]{1+0}} = 0.$$

b) Vytkneme z každé odmocniny člen v nejvyšší mocnině a pak zlomek vykrátíme členem s nejvyšší mocninou ze jmenovatele.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{2n^5+3n+1}+\sqrt{5n^2+3n}}{\sqrt{2n^3+4n+1}-\sqrt[3]{5n^5+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^5}\sqrt[3]{2+\frac{3}{n^4}+\frac{1}{n^5}}+n\sqrt{5+\frac{3}{n}}}{\sqrt{n^3}\sqrt{2+\frac{4}{n^2}+\frac{1}{n^3}}-\sqrt[3]{n^5}\sqrt[3]{5+\frac{1}{n^5}}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{2+\frac{3}{n^4}+\frac{1}{n^5}}+\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}\sqrt{5+\frac{3}{n}}}{\frac{1}{\sqrt[6]{n}}\sqrt{2+\frac{4}{n^2}+\frac{1}{n^3}}-\sqrt[3]{5+\frac{1}{n^5}}}=\frac{\sqrt[3]{2+0+0}+0\cdot\sqrt{5+0}}{0\cdot\sqrt{2+0+0}-\sqrt[3]{5+0+0}}=-\sqrt[3]{\frac{2}{5}}\,.$$

▲

Příklad 5.30. Vypočtěte limity posloupností:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{3n}$, b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+5}$, c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{7n+4}$,

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{5n}\right)^{n}$, e) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{4n}\right)^{5n+8}$, f) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n+3}\right)^{7n+6}$.

Řešení.

a) $$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{3n}=\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)^{3}=\left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)^{3}=\mathrm{e}^3.$$

b) $$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+5}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^{5}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{5}=\mathrm{e}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{5}=$$

$$=\mathrm{e}\cdot\left(1+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right)^{5}=\mathrm{e}\cdot(1+0)^5=\mathrm{e}\cdot 1=\mathrm{e}.$$

c) $$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{7n+4}=\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)^{7}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^{4}=\mathrm{e}^7\cdot 1=\mathrm{e}^7.$$

d) $$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{5n}\right)^{n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[5]{\left(1+\frac{1}{5n}\right)^{5n}}=\sqrt[5]{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{5n}\right)^{5n}}\overset{(*)}{=}\sqrt[5]{\mathrm{e}}.$$

($*$): Posloupnost $\left(1+\frac{1}{5n}\right)^{5n}$ je vybraná z posloupnosti $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$, tedy její limita je rovna číslu e.

e) $$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{4n}\right)^{5n+8}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{4n}\right)^{5n}\cdot\left(1+\frac{1}{4n}\right)^{8}=\left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{4n}\right)^{n}\right)^{5}\times$$

$$\times\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{4n}\right)^{8}=\left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{4n}\right)^{4n}\right)^{\frac{5}{4}}\cdot 1=\mathrm{e}^{\frac{5}{4}}=\sqrt[4]{\mathrm{e}^5}.$$

$$\text{f)}\ \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n+3}\right)^{7n+6}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n+3}\right)^{7\left(n+\frac{6}{7}\right)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n+3}\right)^{\frac{7}{2}\left(2n+\frac{12}{7}\right)}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n+3}\right)^{\frac{7}{2}\left(2n+3-3+\frac{12}{7}\right)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{2n+3}\right)^{2n+3}\right]^{\frac{7}{2}}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n+3}\right)^{-\frac{9}{2}}=\mathrm{e}^{\frac{7}{2}}\cdot 1=\mathrm{e}^{\frac{7}{2}}=\sqrt{\mathrm{e}^7}.$$

▲

Příklad 5.31. Vypočtěte $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n$.

Řešení. V předchozích příkladech jsme se zabývali posloupnostmi vybranými z posloupnosti o členech $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Posloupnost se členy $b_n=\left(1+\frac{1}{-n}\right)^{-n}$ však není vybranou posloupností z posloupnosti (a_n). Při výpočtu je tedy nutno postupovat jiným způsobem. Výraz v limitě nejprve upravíme převedením do jmenovatele:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^n=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n-1}\right)^n}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n-1+1}{n-1}\right)^n}=$$

$$=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\cdot\left(1+\frac{1}{n-1}\right)}=\frac{1}{\mathrm{e}}.$$

▲

Dále si uvedeme některé věty užitečné při konkrétním výpočtu limit.

Věta 5.32. *Nechť jsou dány posloupnosti (a_n), (b_n) a nechť existuje $n_0\in\mathbb{N}$ takové, že pro každé $n\in\mathbb{N}$, $n\geqq n_0$ je $a_n\leqq b_n$. Jestliže dále*

i) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$, $a,\ b\in\mathbb{R}^\star$, *pak* $a\leqq b$.

ii) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$, *pak* $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\infty$.

iii) $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=-\infty$, *pak* $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=-\infty$.

Příklad 5.33. Vypočtěte $\lim\limits_{n\to\infty}n!$.

Řešení. Pro každé $n\in\mathbb{N}$ platí: $n\leqq n!$ a $\lim\limits_{n\to\infty}n=\infty$. Tedy dle zmíněné věty platí, že existuje $\lim\limits_{n\to\infty}n!$ a platí, že $\lim\limits_{n\to\infty}n!=\infty$.

▲

Věta 5.34 (o limitě sevřené posloupnosti). *Nechť jsou dány posloupnosti (a_n), (b_n), (c_n) a nechť existuje $n_0\in\mathbb{N}$ takové, že pro každé $n\in\mathbb{N}$, $n\geqq n_0$, je $a_n\leqq c_n\leqq b_n$. Jestliže $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=L$, $L\in\mathbb{R}^\star$, pak platí $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=L$.*

Příklad 5.35. Vypočtěte $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^3+4n+5}$.

Řešení. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $-1 \leqq (-1)^n \leqq 1$. Nyní tyto nerovnosti vynásobíme výrazem $\frac{1}{n^3+4n+5}$, který je kladný pro každé $n \in \mathbb{N}$, a dostáváme

$$\frac{-1}{n^3+4n+5} \leqq \frac{(-1)^n}{n^3+4n+5} \leqq \frac{1}{n^3+4n+5}.$$

Definujme posloupnosti (a_n), (b_n) a (c_n) předpisy

$$a_n = \frac{-1}{n^3+4n+5}, \quad c_n = \frac{(-1)^n}{n^3+4n+5}, \quad b_n = \frac{1}{n^3+4n+5}.$$

Platí $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, tedy i $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$. ▲

Příklad 5.36. Vypočtěte $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{n} \cos \dfrac{n^2+1}{2n-1}\right)$.

Řešení. Posloupnost $\frac{n^2+1}{2n-1}$ diverguje k nekonečnu a kosinus tohoto argumentu nemá limitu. To ovšem ještě neznamená, že posloupnost se členy $\frac{1}{n} \cos \frac{n^2+1}{2n-1}$ ji nemá také! Vyjdeme z toho, že kosinus libovolného argumentu je ohraničená funkce. Platí

$$-1 \leqq \cos \frac{n^2+1}{2n-1} \leqq 1.$$

Tyto nerovnosti vynásobíme kladným výrazem $\frac{1}{n}$ a dostáváme

$$-\frac{1}{n} \leqq \frac{\cos \frac{n^2+1}{2n-1}}{n} \leqq \frac{1}{n}.$$

Tedy naše posloupnost $\frac{1}{n} \cos \frac{n^2+1}{2n-1}$ je uzavřená posloupnostmi $-\frac{1}{n}$ a $\frac{1}{n}$ (dokonce nejen pro dost velká n, ale pro všechna $n \in \mathbb{N}$), které obě konvergují k nule, a tedy i naše posloupnost konverguje k nule. Proto

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} \cos \frac{n^2+1}{2n-1}\right) = 0.$$

▲

Následující věta je důležitým důsledkem věty o limitě sevřené posloupnosti.

Věta 5.37. *Nechť $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ a posloupnost (b_n) je ohraničená. Pak $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = 0$.*

Příklad 5.38. Vypočtěte $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin(n^2+1)}{n}$.

Řešení. Posloupnost $(a_n) = \big(\sin(n^2+1)\big)$ je ohraničená: $|\sin(n^2+1)| \leqq 1$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Dále $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Tedy podle věty 5.37 je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(n^2+1)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sin(n^2+1) = 0.$$

▲

Pomocí věty 5.34 si nyní dokážeme platnost další důležité limity:

$$\boxed{5} \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Důkaz. Nechť $n \in \mathbb{N},\ n \geqq 2$. Položme $\sqrt[n]{n} = 1 + h_n$. Pak

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1 \quad \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} h_n = 0.$$

Chceme tedy dokázat, že $\lim\limits_{n\to\infty} h_n = 0$.

Umocněním vztahu $\sqrt[n]{n} = 1 + h_n$ dostaneme $n = (1+h_n)^n$.

K úpravě pravé strany rovnosti využijeme binomickou větu

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots + \binom{n}{n} a^0 b^n$$

a obdržíme (při volbě $a = 1$, $b = h_n$)

$$n = 1 + n h_n + \frac{n(n-1)}{2} h_n^2 + \cdots + h_n^n.$$

Přitom $h_n > 0$, a tedy z předchozí rovnosti máme $n > \frac{n(n-1)}{2} h_n^2 > 0$, tudíž

$$0 < h_n^2 < \frac{2}{n-1}\,.$$

Jelikož $\lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0$ a $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{n-1} = 0$, platí dle věty o limitě sevřené posloupnosti, že také $\lim\limits_{n\to\infty} h_n^2 = 0$. Tedy $\lim\limits_{n\to\infty} h_n = 0$, a tudíž

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} (1+h_n) = \lim_{n\to\infty} 1 + \lim_{n\to\infty} h_n = 1 + 0 = 1.$$

□

Příklad 5.39. Vypočtěte limity posloupností:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[2n]{n}$, b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^7}$, c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[2n]{3^n}$, d) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n}$.

Řešení.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[2n]{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\sqrt[n]{n}} = \sqrt{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}} = \sqrt{1} = 1.$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^7} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{n}\right)^7 = \left(\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}\right)^7 = 1^7 = 1.$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[2n]{3^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\sqrt[n]{3^n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{3} = \sqrt{3}.$

d) K výpočtu limity použijeme následující nerovnost, která platí pro všechna $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$:

$$\sqrt[n]{3^n} \leqq \sqrt[n]{2^n + 3^n} \leqq \sqrt[n]{3^n + 3^n}.$$

Dále platí

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n} = \lim_{n\to\infty} 3 = 3,$$
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n + 3^n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2 \cdot 3^n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} \cdot \sqrt[n]{3^n} = 1 \cdot 3 = 3.$$

Využili jsme toho, že pro $n \in \mathbb{N}$, $n \geqq 2$ platí $1 \leqq \sqrt[n]{2} \leqq \sqrt[n]{n}$, a tudíž dle věty 5.34 je $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} = 1$.

Celkově tedy dle věty 5.34 platí, že $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n} = 3$. ▲

Přidejme si do našeho seznamu důležitých limit poslední limitu:

$\boxed{6}$

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} \infty & \text{pro } q > 1, \\ 1 & \text{pro } q = 1, \\ 0 & \text{pro } q \in (-1, 1), \\ \text{neexistuje} & \text{pro } q \leqq -1. \end{cases}$$

Důkaz. Jedná se o geometrickou posloupnost s kvocientem q. Předpokládejme, že:

i) $q > 1$. Využijeme binomickou větu

$$(1 + x)^n = 1 + nx + \cdots + x^n$$

a pro $x > 0$ a $n \geqq 2$ dostáváme $(1 + x)^n > 1 + nx$. Pro $x = q - 1$ tedy platí

$$q^n = (1 + (q - 1))^n > 1 + n(q - 1).$$

Jelikož $\lim\limits_{n\to\infty} (1 + n(q - 1)) = \infty$, je dle věty 5.32 i $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \infty$.

ii) $q = 1$. Pak $\lim\limits_{n\to\infty} 1^n = \lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1$.

iii) $q \in (-1, 1)$. Je-li $q = 0$, pak $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \lim\limits_{n\to\infty} 0^n = 0$.

Nechť nyní $q \neq 0$ a zároveň $|q| < 1$. Pak $\frac{1}{|q|} > 1$ a $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{|q|}\right)^n = \infty$ dle bodu i).

Tedy $\lim\limits_{n\to\infty} |q|^n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\frac{1}{|q|^n}} = \dfrac{1}{\infty} = 0$. Podle poznámky 5.26, bod 2 dostaneme, že $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$.

iv) $q \leqq -1$. Pro n sudé, tj. $n = 2k$, je $\lim\limits_{k\to\infty} q^{2k} = \infty$ (viz bod i), neboť $q^{2k} = |q^{2k}|$, kde $|q| > 1$), pro n liché, tj. $n = 2k+1$, je $\lim\limits_{k\to\infty} q^{2k+1} = q \lim\limits_{k\to\infty} q^{2k} = -\infty$, neboť q je záporné a $\lim\limits_{k\to\infty} q^{2k} = \infty$. Podle poznámky 5.21, bod 2 tudíž limita neexistuje. □

Příklad 5.40. Vypočtěte limity posloupností:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n}{3n-1}\right)^{3n}$, b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n}{n-1}\right)^{2n}$, c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n}{3n-1}\right)^{n}$.

Řešení.

a)
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n}{3n-1}\right)^{3n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n-1+1}{3n-1}\right)^{3n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3n-1}\right)^{3n} =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3n-1}\right)^{3n-1} \cdot \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3n-1}\right)^{1} = \mathrm{e}\cdot 1 = \mathrm{e}.$$

b)
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n}{n-1}\right)^{2n} = \lim_{n\to\infty} 2^{2n}\left(\frac{n}{n-1}\right)^{2n} = \lim_{n\to\infty} 2^{2n}\left(\frac{n-1+1}{n-1}\right)^{2n} =$$
$$= \lim_{n\to\infty} 2^{2n}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{2n} = \lim_{n\to\infty} 2^{2n}\left[\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n}\right]^{2} =$$
$$= \lim_{n\to\infty} 4^{n}\left[\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\right]^{2}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{2} = \infty\cdot\mathrm{e}^2\cdot 1^2 = \infty.$$

Jiný způsob řešení: Pro každé $n \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$ platí $\frac{2n}{n-1} = 2\frac{n-1+1}{n-1} = 2(1+\frac{1}{n-1}) > 2$, a proto
$$\left(\frac{2n}{n-1}\right)^{2n} > 2^{2n}.$$

Protože $\lim\limits_{n\to\infty} 2^{2n} = \infty$, je dle věty 5.32 i limita $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n}{n-1}\right)^{2n} = \infty$.

c)
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n}{3n-1}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n}\left(\frac{3n}{3n-1}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n}\left(\frac{3n-1+1}{3n-1}\right)^{n} =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n}\left[\left(1+\frac{1}{3n-1}\right)^{3n-1}\left(1+\frac{1}{3n-1}\right)\right]^{\frac{1}{3}} = 0\cdot(\mathrm{e}\cdot 1)^{\frac{1}{3}} = 0.$$

▲

Všimněte si na předchozím příkladě, které koeficienty u neznámých rozhodují o výsledku. I když je zadání velmi podobné, členy první posloupnosti konvergují k nule, členy druhé posloupnosti divergují k nekonečnu.

Příklad 5.41. Určete, zda existují následující limity. Pokud ano, vypočtěte je:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^n+2}{(-1)^n-2}$, b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n+(-2)^n}{2\cdot 4^n}$, c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^n+2}{3^n(2-(-1)^n)}$.

Řešení.

a) Pro sudá n je výraz v limitě roven: $\frac{(-1)^n+2}{(-1)^n-2} = \frac{1+2}{1-2} = -3$, pro lichá n je výraz v limitě roven: $\frac{(-1)^n+2}{(-1)^n-2} = \frac{(-1)+2}{(-1)-2} = -\frac{1}{3}$. Vybraná posloupnost sudých členů tedy konverguje k číslu -3, vybraná posloupnost lichých členů k číslu $-\frac{1}{3}$, tudíž $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-1)^n+2}{(-1)^n-2}$ neexistuje.

b) $$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n + (-2)^n}{2 \cdot 4^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n \cdot (1 + (-1)^n)}{2^n \cdot (2 \cdot 2^n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + (-1)^n}{2 \cdot 2^n} =$$
$$= \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \left[\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(-\frac{1}{2}\right)^n \right] = \frac{1}{2}(0 + 0) = 0.$$

c) Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí
$$0 \leqq \frac{(-1)^n + 2}{3^n(2 - (-1)^n)} \leqq \frac{3}{3^n}$$
Protože je zadaná posloupnost ohraničená zdola nulovou posloupností a shora posloupností, která konverguje k číslu 0 ($\lim\limits_{n\to\infty} 3\left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$), je limita zadané posloupnosti podle věty 5.34 také rovna 0. ▲

Příklad 5.42. Vypočtěte limity posloupností:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+2)! - 3n!}{(n+2)! + 1}$, b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}$, c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{3^n}}{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}}$.

Řešení.

a) $$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)! - 3n!}{(n+2)! + 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)(n+1)n! - 3n!}{(n+2)(n+1)n! + 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)(n+1) - 3}{(n+2)(n+1) + \frac{1}{n!}} =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 + 3n - 1}{n^2 + 3n + 2 + \frac{1}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{3}{n} - \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^2}\cdot\frac{1}{n!}} = 1.$$
Protože $n! > n$, je $0 < \frac{1}{n!} < \frac{1}{n}$ a z věty 5.34 plyne $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n!} = 0$.

b) Využijeme vztah pro součet prvních n členů aritmetické posloupnosti.
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2}(1+n)n}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+n}{2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}+1}{2} = \frac{1}{2}.$$

c) V čitateli máme součet prvních $n+1$ členů geometrické posloupnosti s prvním členem $a_1 = 1$ a kvocientem $q = \frac{1}{3}$:
$$s_{n+1} = a_1 \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} = 1 \cdot \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} - 1}{\frac{1}{3} - 1} = -\frac{3}{2}\left(\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} - 1\right) = \frac{3}{2}.$$
Ve jmenovateli máme součet prvních $n+1$ členů geometrické posloupnosti s prvním členem $a_1 = 1$ a kvocientem $q = \frac{1}{2}$:
$$s^{\star}_{n+1} = a_1 \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} = 1 \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 1}{\frac{1}{2} - 1} = -2\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 1\right) = 2.$$

Celkem tedy

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{3^n}}{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{s_{n+1}}{s^\star_{n+1}}=\frac{\frac{3}{2}}{2}=\frac{3}{4}.$$

▲

Věta 5.43. *Nechť* $\lim a_n = 0$ *a nechť existuje* $n_0 \in \mathbb{N}$ *takové, že pro všechna* $n \geqq n_0$ *platí* $a_n > 0$ *(resp.* $a_n < 0$*). Pak* $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}=\infty$ *(resp.* $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}=-\infty$*).*

Pojmy k zapamatování

— posloupnost,
— rostoucí, klesající, nerostoucí, neklesající, ohraničená posloupnost,
— limita posloupnosti,
— konvergentní, divergentní posloupnost.

Kontrolní otázky

1. Vysvětlete, co to znamená, že posloupnost je rostoucí.
2. Uveďte příklad ohraničené posloupnosti.
3. Vysvětlete geometrický význam skutečnosti, že limita posloupnosti se rovná dvěma.
4. Uveďte příklad posloupnosti, která má limitu rovnu plus nekonečnu.
5. Uveďte příklad vybrané posloupnosti z posloupnosti dané předpisem $a_n = n$.
6. Kolik limit může mít posloupnost?
7. Zformulujte větu o limitě sevřené posloupnosti.

Příklady k procvičení

1. Vypočtěte limity posloupností:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-2n^3-5n+7}{5n^2+n-8}$, b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n^2+8n+1}{7n^2+8n-1}$,

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+3}{n^3-n}$, d) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{6n^2+5n-2}{1-2n+6n^2}$.

2. Vypočtěte limity posloupností:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2}\right)$, b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{2n+1}\right)$,

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{4n^2-5}-2n\right)$, d) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}$,

e) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{4n^2-n}-n\right)$, f) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{4n^2-n}-2n\right)$.

3. Vypočtěte limity posloupností:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{6n}$, b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{3n+2}$, c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{3n}\right)^{n}$,

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^{3n+6}$, e) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n+2}{3n+1}\right)^{n}$, f) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{k}$, $k\in\mathbb{Z}$.

4. Vypočtěte limity posloupností:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[5n]{n}$, b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^7}$, c) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[7n]{6^n}$.

5. Vypočtěte limity užitím věty o limitě sevřené posloupnosti:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\cdot\sin n^2}{n^2+1}$, b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\cos n}{n+1}$, c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^2-5n+1}$,

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{9^n+4^n}$, e) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n+5}$, f) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^2+1}$.

6. Vypočtěte limity posloupností:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\cos e^{n^2+n+1}}{n}$, b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\sin n!}{n^2+1}$, c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n}$.

7. Vypočtěte limity posloupností:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n}{\left(\frac{1}{2}\right)^n+1}$, b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{2}-1}{\sqrt[n]{2}-2}$, c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n-1}{2^n+2}$,

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3^n}{1-3^n}+\sqrt[n]{3}\right)$, e) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{6^n+4^n-2^n}{6^{n+1}-3^n}$, f) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n}{2n-1}\right)^n$.

8. Rozhodněte, zda existují následující limity. Pokud ano, vypočtěte je. Neexistenci zdůvodněte.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\cdot n^2$, b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^2}$, c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^n+2}{2-(-1)^n}$,

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\cos(2n\pi)$, e) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\cos(2n\pi)}{n}$, f) $\lim\limits_{n\to\infty}n^{(-1)^n}$.

9. Vypočtěte limity posloupností:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3(n+2)!-(n+1)!}{(n+3)!}$, b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)!-2n!}{3(n+1)!+1}$.

10. Vypočtěte limity posloupností:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+2+3+\cdots+n}{n+2}-\dfrac{n}{2}\right)$, b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{3^n}}{1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{4^n}}$.

11. Rozhodněte, které z následujících tvrzení jsou pravdivá.

a) Každá ohraničená posloupnost má limitu.
b) Posloupnost se členy $a_n=\frac{3-\sin n}{n^2}$ je ohraničená.

c) Každá nerostoucí posloupnost má zápornou limitu.
d) Každá monotónní posloupnost je konvergentní.
e) Každá geometrická posloupnost má limitu.
f) Je-li aritmetická posloupnost konvergentní, je konstantní.

12. Dokažte, že je posloupnost $a_n = 3 + 4n$ aritmetická a určete její diferenci.

13. Najděte všechny aritmetické posloupnosti, u nichž součet prvních tří členů je 27 a součet mocnin týchž členů je 275.

14. Určete všechny geometrické posloupnosti, u nichž součet prvního a čtvrtého členu je 18, součet druhého a třetího členu je 12.

15. Mezi čísla 4 a 37 vložte čísla tak, aby s danými čísly tvořila aritmetickou posloupnost o součtu 246. Určete počet vložených čísel a diferenci takto vytvořené aritmetické posloupnosti.

16. Autobus jede po přímé silnici stálou rychlostí $10\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$. V okamžiku, kdy projíždí místem M, vyjíždí z tohoto místa týmž směrem osobní auto, které za první sekundu ujede 3 m a za každou následující sekundu ujede o 2 m více než za předcházející sekundu. Za kolik sekund dohoní auto autobus?

17. Drát má průměr 5 mm. Jedním protažením se průměr drátu zmenší o 10 %. Jaký bude průměr drátu po deseti protaženích?

18. Určete délky stran pravoúhlého trojúhelníka, víte-li, že tvoří tři po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti a že obsah trojúhelníka je 54 cm^2.

19. Do čtverce o straně délky 1 m je vepsán čtverec, jehož vrcholy jsou středy stran původního čtverce. Do tohoto čtverce je opět stejným způsobem vepsán další čtverec, atd. Jaký je obsah desátého čtverce?

Autotest

Máte za sebou obsahově i časově náročnou kapitolu o posloupnostech. Pokud jste si nové pojmy řádně promysleli, propočítali řešené i neřešené příklady, pak můžete přistoupit k následujícímu testu. Test obsahuje otázky a příklady podobného typu, s jakými se můžete setkat u zkoušky. Pomůže vám proto zhodnotit, nakolik jste učivo zvládli a zda se můžete pustit do studia dalších kapitol. Test by vám neměl zabrat více než 45 minut.

1. Vypočtěte limity posloupností:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{5n^2+3n-1}-\sqrt{5n^2+2n-3}\right)$,

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3\sqrt{n+2}\,\sin(n^2+2n)}{6n-\sqrt{n}}$,

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n+1}{2n}\right)^n$,

d) $\lim\limits_{n\to\infty}(n-\sqrt{6n^2+5n+7})$.

2. Užitím věty o limitě sevřené posloupnosti vypočtěte:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^3+5}$, b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin 5n}{n^2}$.

3. Uveďte příklad divergentní posloupnosti.

Výsledky autotestu najdete v *Klíči k řešeným příkladům*. Zkontrolujte si výsledky a pokuste se objektivně sami sebe ohodnotit. V případě, že máte více než třetinu příkladů špatně, budete se muset k příslušnému učivu znovu vrátit. Prostudujte znovu definice, věty i řešené příklady. V případě, že některou pasáž nechápete ani po opětovném prostudování, kontaktujte svého vyučujícího. Někdy stačí malá rada a vše je rázem jasné nebo přinejmenším jasnější.

*****

O mnohé věci se nepokoušíme ne proto, že jsou těžké,
ale těžké jsou proto, že se o ně nepokoušíme.
(Seneca)

*****

Kapitola 6

Limita a spojitost funkce

Průvodce studiem

Při vyšetřování průběhu funkce je nutné zkoumat chování funkce v „blízkém okolí“ některých bodů. Například těch, které nepatří do definičního oboru funkce. Zajímá nás, zda se v „blízkém okolí“ bodu x funkční hodnoty dané funkce „blíží“ k nějakému konkrétnímu číslu nebo zda neomezeně rostou, popř. klesají. Tento proces „blížení se“ popíšeme pomocí pojmu limita.

Pojem limity je základním pojmem celé matematické analýzy. Na základě tohoto pojmu pak budeme definovat další významné pojmy diferenciálního počtu, a to spojitost funkce a v další kapitole pak derivaci funkce. Budeme-li dále mluvit o limitě, budeme mít na mysli limitu funkce (nikoliv limitu posloupnosti).

Cíle

Po prostudování této kapitoly budete schopni

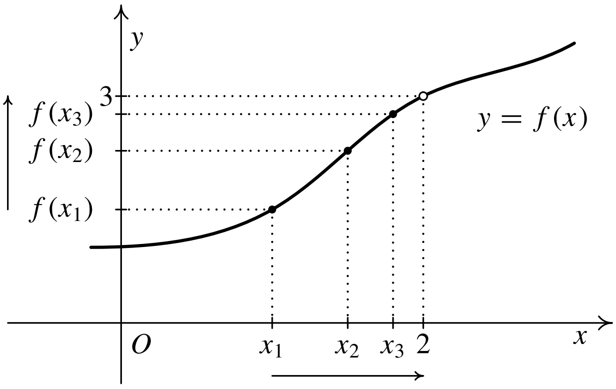
- definovat a pomocí obrázků vysvětlit pojem limita a jednostranná limita,
- uvést základní vlastnosti limit,
- definovat spojitost funkce v bodě,
- uvést základní pravidla pro počítání s limitami,
- vypočítat limity jednoduchých funkcí.

6.1 Definice limity

Protože je pojem limity funkce jedné reálné proměnné základním pojmem celé matematické analýzy, budeme mu věnovat poměrně velkou pozornost.

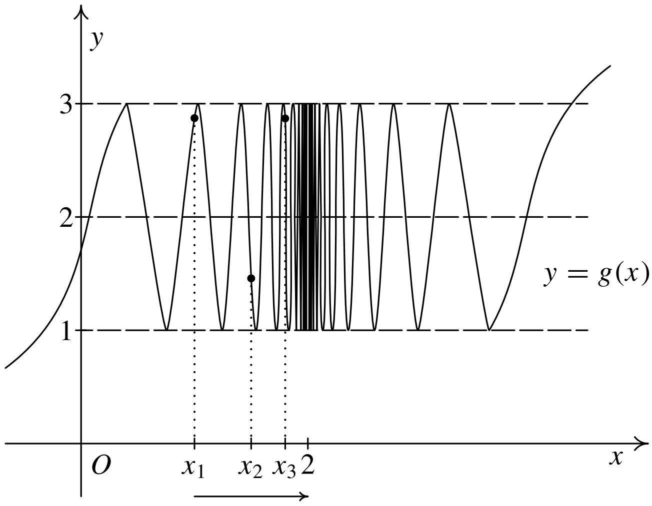
Podívejme se na následující obrázky.

Na obrázku 6.1 je znázorněn graf funkce f, která není definována v bodě $x = 2$. Vezměme hodnoty $x_1 = 1$, $x_2 = 1{,}5$, $x_3 = 1{,}8, \dots$ nezávisle proměnné, které se budou čím dál více přibližovat k hodnotě 2 (z levé strany), a podívejme se, jak se chovají funkční



Obr. 6.1

hodnoty v těchto bodech. Je vidět, že se tyto hodnoty, tj. $f(x_1)$, $f(x_2)$, $f(x_3)$, ..., čím dál víc přibližují k číslu $y = 3$. Při přibližování zprava k $x = 2$ je situace analogická.

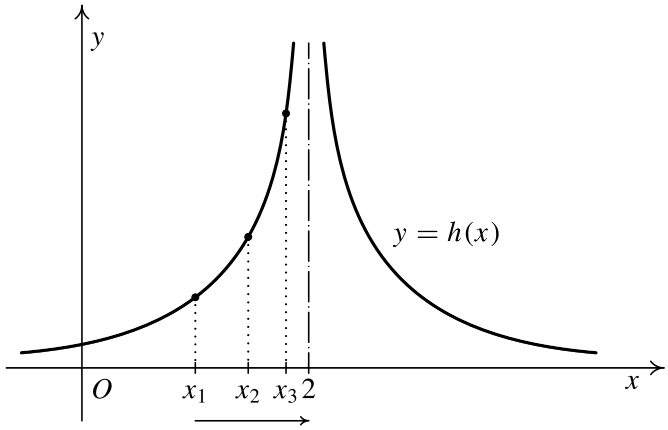


Obr. 6.2

Na obrázku 6.2 je znázorněn graf funkce g, která rovněž není definována v bodě $x = 2$. Její chování v blízkosti tohoto bodu je ale zcela odlišné. Jestliže se opět přibližujeme k bodu $x = 2$ zleva, např. po hodnotách $x_1 = 1$, $x_2 = 1{,}5$, $x_3 = 1{,}8, \ldots$, funkční hodnoty $g(x_1)$, $g(x_2)$, $g(x_3), \ldots$ se tentokrát k ničemu nepřibližují, ale „kmitají" mezi hodnotami $y = 1$ a $y = 3$. Tedy hodnoty $g(x)$ se nepřibližují k žádnému číslu (na ose y), když x se přibližuje k číslu 2 zleva (na ose x). Stejná situace je při přibližování k $x = 2$ zprava.

Na obrázku 6.3 je graf funkce h, která rovněž není definována v bodě $x = 2$. Tentokrát při přibližování se k bodu $x = 2$ zleva po bodech $x_1 = 1$, $x_2 = 1{,}5$, $x_3 = 1{,}8, \ldots$ se funkční hodnoty $h(x_1)$, $h(x_2)$, $h(x_3), \ldots$ neomezeně zvětšují. Stejná je situace při přibližování k $x = 2$ zprava.

Naším cílem bude nyní odlišit od sebe situaci, kdy se hodnoty $f(x)$ „k něčemu přibližují", a situaci, kdy se hodnoty k „ničemu nepřibližují".



Obr. 6.3

Vlastní limita ve vlastním bodě

Na obr. 6.1 jsme si ukázali příklad funkce f, která má tu vlastnost, že když se x přibližuje k číslu 2, hodnoty $f(x)$ se přibližují k číslu 3. Tato situace je popsána v následující definici a podrobněji znázorněna na obr. 6.4.

Definice 6.1. Řekneme, že *funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ limitu $A \in \mathbb{R}$*, jestliže ke každému $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ existuje $\delta \in \mathbb{R}^+$ takové, že pro všechna $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $x \neq x_0$, platí $f(x) \in (A - \varepsilon, A + \varepsilon)$. Píšeme:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A.$$

Symbolicky zapsáno:

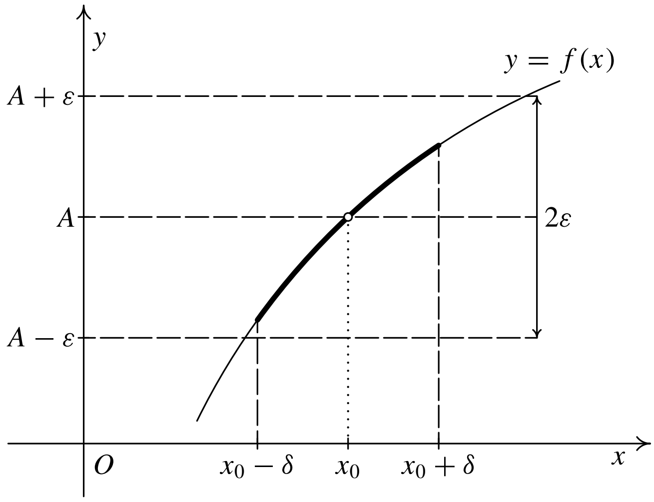
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \quad \Leftrightarrow$$
$$\big(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \, \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \, \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\} \colon \; f(x) \in (A - \varepsilon, A + \varepsilon)\big) .$$

Objasněme si smysl předchozí definice: Zvolíme libovolný (libovolně úzký) pás o šířce 2ε kolem přímky $y = A$. K němu musíme umět najít interval $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ o šířce 2δ kolem bodu x_0 tak, aby graf funkce f na množině $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$ ležel celý ve zvoleném pásu. Zřejmě číslo $\delta > 0$ zvolené v obr. 6.4 bychom mohli ještě poněkud zvětšit.

Poznámka 6.2. Písmena ε a δ jsou použita z tradičních historických důvodů.

Nevlastní limita ve vlastním bodě

Na obr. 6.3 jsme si ukázali příklad funkce h, která má tu vlastnost, že když se x přibližuje k číslu 2, hodnoty $h(x)$ se neomezeně zvětšují. Přesně je tato vlastnost popsána v následující definici a znázorněna na obr. 6.5 a).



Obr. 6.4

Definice 6.3. Řekneme, že *funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ limitu $+\infty$*, jestliže ke každému číslu $M \in \mathbb{R}$ existuje $\delta \in \mathbb{R}^+$ takové, že pro všechna $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $x \neq x_0$, platí $f(x) > M$. Píšeme:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty.$$

Symbolicky zapsáno:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \quad \Leftrightarrow$$
$$\big(\forall\, M \in \mathbb{R}\ \exists\, \delta \in \mathbb{R}^+\ \forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\} :\ f(x) > M\big)\,.$$

Tedy ke každému reálnému číslu M musíme umět najít interval $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ tak, aby graf funkce f na množině $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$ ležel celý nad přímkou $y = M$, tj. nad rovnoběžkou s osou x ve výšce M.

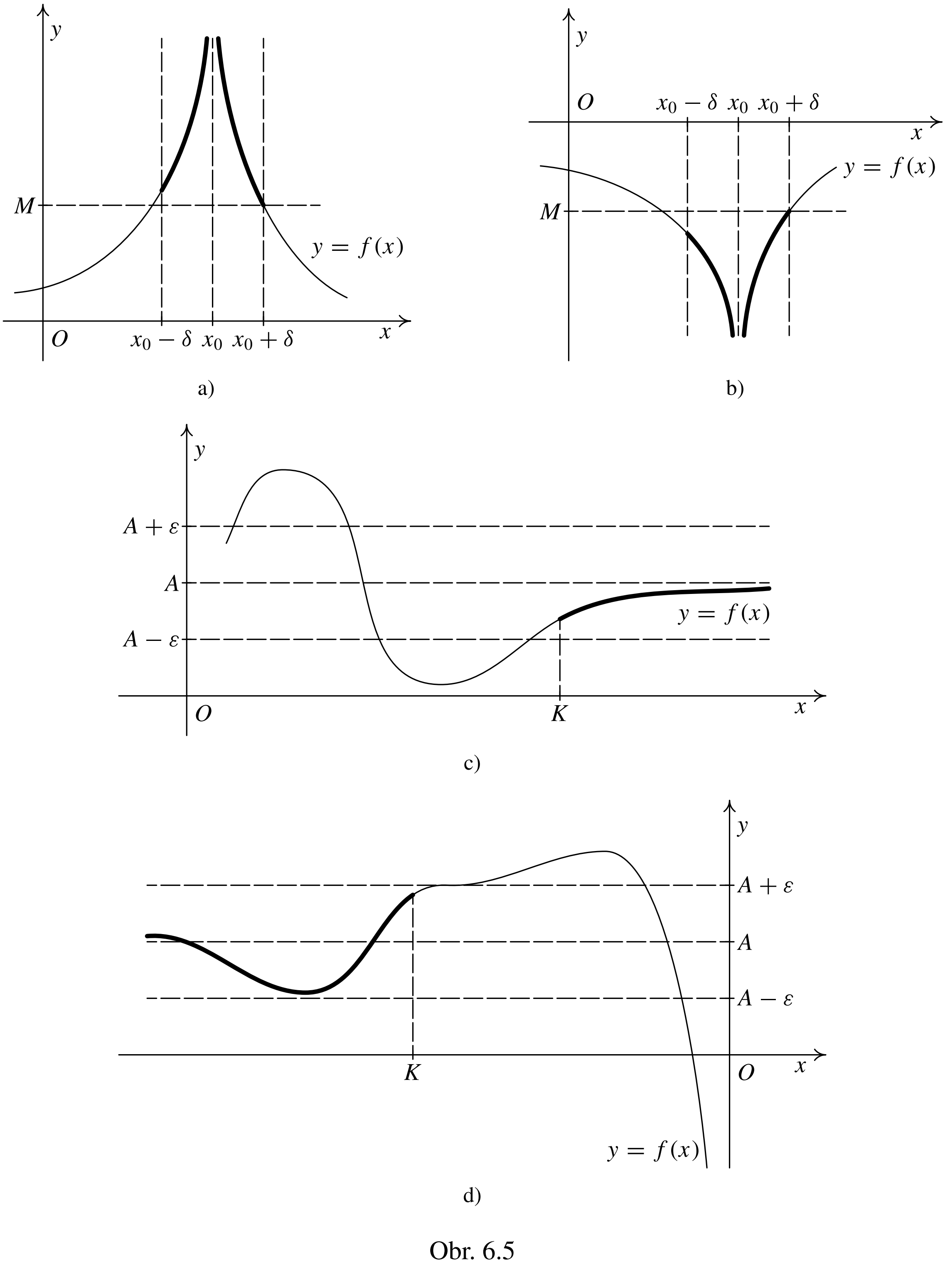
Obdobně definujeme $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$. (Pouze nerovnost $f(x) > M$ změníme na $f(x) < M$) — viz obr. 6.5 b).

Vlastní limita v nevlastním bodě

Zabývejme se nyní případem, kdy se x blíží k $+\infty$ nebo $-\infty$ (vzdaluje se neomezeně vpravo nebo vlevo) a hodnoty $f(x)$ se blíží ke konečnému číslu. Situace je znázorněna na obr. 6.5 c) a 6.5 d).

Definice 6.4. Řekneme, že *funkce f má v $+\infty$ (nebo podrobněji pro x jdoucí do $+\infty$) limitu $A \in \mathbb{R}$*, jestliže ke každému číslu $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ existuje číslo $K \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechna reálná čísla $x > K$ platí $f(x) \in (A - \varepsilon, A + \varepsilon)$. Píšeme:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = A.$$



y
M
O
$x_0-\delta$ x_0 $x_0+\delta$
x
$y=f(x)$
a)
y
O
$x_0-\delta$ x_0 $x_0+\delta$
x
M
$y=f(x)$
b)
y
$A+\varepsilon$
A
$A-\varepsilon$
$y=f(x)$
O
K
x
c)
y
$A+\varepsilon$
A
$A-\varepsilon$
K
O
x
$y=f(x)$
d)

Obr. 6.5

Symbolicky zapsáno:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = A \quad \Leftrightarrow$$
$$\big(\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}^+\ \exists\, K \in \mathbb{R}\ \forall\, x \in \mathbb{R}\,,\, x > K\ :\ f(x) \in (A - \varepsilon, A + \varepsilon)\big)\,.$$

To znamená, že lze najít hodnotu K takovou, aby pro každé $x > K$ ležel graf funkce f uvnitř pásu o šířce 2ε, který je sestrojen kolem přímky $y = A$ (číslo K by bylo možné v obrázku 6.5 c) zvolit poněkud menší).

Obdobně definujeme $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$ (pouze nerovnost $x > K$ se v předchozí definici změní na $x < K$) — viz obr. 6.5 d).

Nevlastní limita v nevlastním bodě

Nakonec si všimneme případu, kdy se x blíží k $+\infty$ nebo $-\infty$ (vzdaluje se neomezeně vpravo nebo vlevo) a hodnoty $f(x)$ se neomezeně zvětšují popř. zmenšují (limita je $\pm\infty$). Uvedeme přesnou definici pouze jedné varianty (ostatní dostaneme jednoduchými obměnami) a situaci budeme ilustrovat obrázky.

Definice 6.5. Řekneme, že *funkce f má v $+\infty$ (nebo podrobněji pro x jdoucí do $+\infty$) limitu $+\infty$*, jestliže ke každému číslu $M \in \mathbb{R}$ existuje číslo $K \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechna reálná $x > K$ platí $f(x) > M$. Píšeme:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

Symbolicky zapsáno:

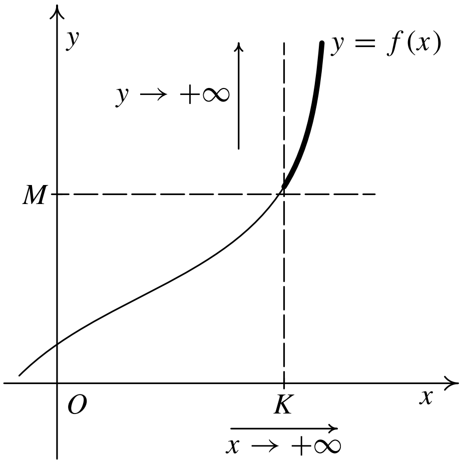
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \quad \Leftrightarrow \quad (\forall\, M \in \mathbb{R}\ \exists\, K \in \mathbb{R}\ \forall\, x \in \mathbb{R}\,,\, x > K\ :\ f(x) > M)\,.$$

Situaci popsanou v definici ilustruje obr. 6.6 a). Obrázky 6.6 b) až 6.6 d) ilustrují zbývající možnosti (v definici se změní nerovnost $x > K$ na $x < K$ nebo $f(x) > M$ na $f(x) < M$).

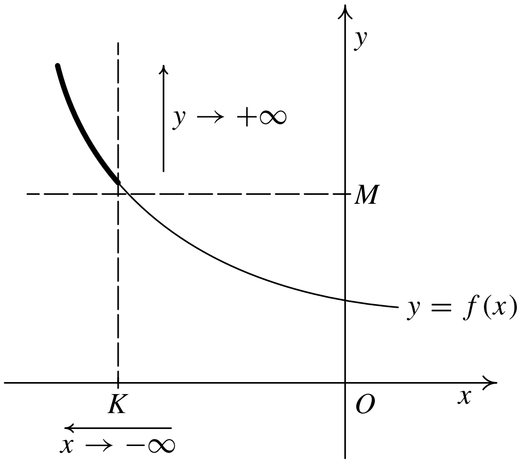
Souhrnná definice limity

V předchozích odstavcích jsme si popsali všechny možnosti, které v případě existence limity mohou nastat. Mluvili jsme o následujících případech (x_0, $A \in \mathbb{R}$):

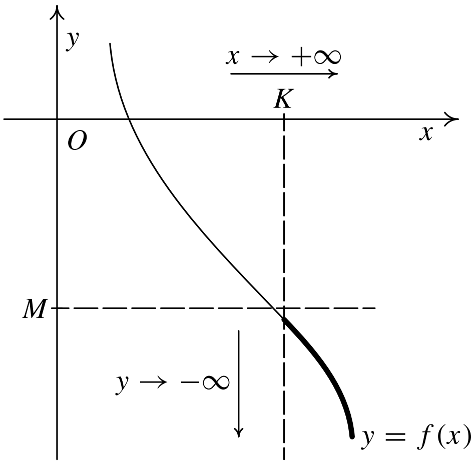
vlastní limita ve vlastním bodě	$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A,$
nevlastní limita ve vlastním bodě	$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty,$
vlastní limita v nevlastním bodě	$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = A,$
nevlastní limita v nevlastním bodě	$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty.$



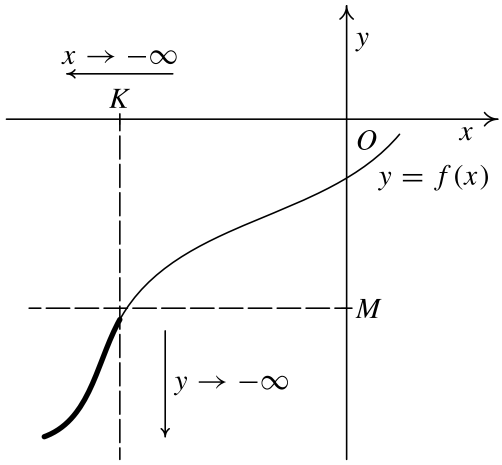
a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$



b) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$



c) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$



d) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

Obr. 6.6

O *limitě ve vlastním bodě* mluvíme tehdy, když se x se přibližuje ke konečnému číslu, a o *limitě v nevlastním bodě*, když se x blíží k $+\infty$ nebo k $-\infty$. Obdobně mluvíme o *vlastní limitě*, pokud je limita rovna konečnému číslu, a o *nevlastní limitě*, pokud je limita rovna $+\infty$ nebo $-\infty$.

Pokusme se nyní vyslovit definici limity, v níž budou zahrnuty všechny uvedené varianty. Abychom mohli danou situaci popsat, budeme potřebovat pojem okolí bodu. Obecně nás budou zajímat jednak případy, kdy se přibližujeme k nějakému vlastnímu bodu $x_0 \in \mathbb{R}$, ale také případy, kdy se budeme přibližovat k nevlastním bodům $\pm\infty$. Zaveďme proto pojem okolí bodu pro vlastní i nevlastní body.

Definice 6.6.

i) *Okolím* bodu $x_0 \in \mathbb{R}$ (podrobněji δ-okolím bodu x_0) rozumíme otevřený interval $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, kde δ je kladné reálné číslo. Značíme je $\mathscr{O}(x_0)$.

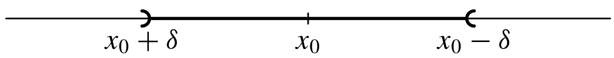
ii) *Okolím* bodu $+\infty$ rozumíme každý interval $(k, +\infty)$, kde $k \in \mathbb{R}$. Značíme je $\mathscr{O}(+\infty)$.

iii) *Okolím* bodu $-\infty$ rozumíme každý interval $(-\infty, k)$, kde $k \in \mathbb{R}$. Značíme je $\mathscr{O}(-\infty)$.

iv) *Prstencovým okolím* bodu $x_0 \in \mathbb{R}^\star$ rozumíme množinu $\mathscr{O}(x_0) \setminus \{x_0\}$. Značíme je $\mathscr{P}(x_0)$.

Poznámka 6.7.

1. Pokud je pro nás důležitá konkrétní velikost okolí bodu $x_0 \in \mathbb{R}$, píšeme místo $\mathscr{O}(x_0)$ podrobněji $\mathscr{O}_\delta(x_0)$. Obdobně pro prstencové okolí.
2. Je-li $x_0 \in \mathbb{R}$, pak $x \in \mathscr{O}_\delta(x_0)$ (tj. $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, tj. $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$), právě když $|x - x_0| < \delta$.
3. Je-li $x_0 \in \mathbb{R}$, pak $x \in \mathscr{P}_\delta(x_0)$ (tj. $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$, tj. když platí $x \in (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$), právě když $0 < |x - x_0| < \delta$.
4. Je-li $x_0 \in \mathbb{R}$, pak délka intervalu $\mathscr{O}_\delta(x_0)$ je 2δ.



Obr. 6.7

5. Platí $\mathscr{O}(+\infty) = \mathscr{P}(+\infty)$ a $\mathscr{O}(-\infty) = \mathscr{P}(-\infty)$.

Nyní uveďme souhrnnou definici limity.

Definice 6.8. Řekneme, že *funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}^\star$ limitu $A \in \mathbb{R}^\star$*, jestliže ke každému okolí $\mathscr{O}(A)$ bodu A existuje prstencové okolí $\mathscr{P}(x_0)$ bodu x_0 takové, že pro všechna $x \in \mathscr{P}(x_0)$ platí $f(x) \in \mathscr{O}(A)$. Píšeme:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A.$$

Symbolicky zapsáno:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \quad \Leftrightarrow \quad (\forall\, \mathscr{O}(A)\ \exists\, \mathscr{P}(x_0)\ \forall x \in \mathscr{P}(x_0) :\ f(x) \in \mathscr{O}(A))\,.$$

Poznámka 6.9.

1. Existuje-li limita $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, znamená to, že existuje prstencové okolí $\mathscr{P}(x_0)$ bodu x_0, ve kterém je funkce f definována.

2. Limita nám nic neříká o tom, jak se funkce chová přímo v bodě x_0. Tedy z existence limity nepoznáme, zda je funkce v bodě x_0 definována, či nikoliv. Jinými slovy, limita funkce f v bodě x_0 nezávisí na funkční hodnotě v bodě x_0.

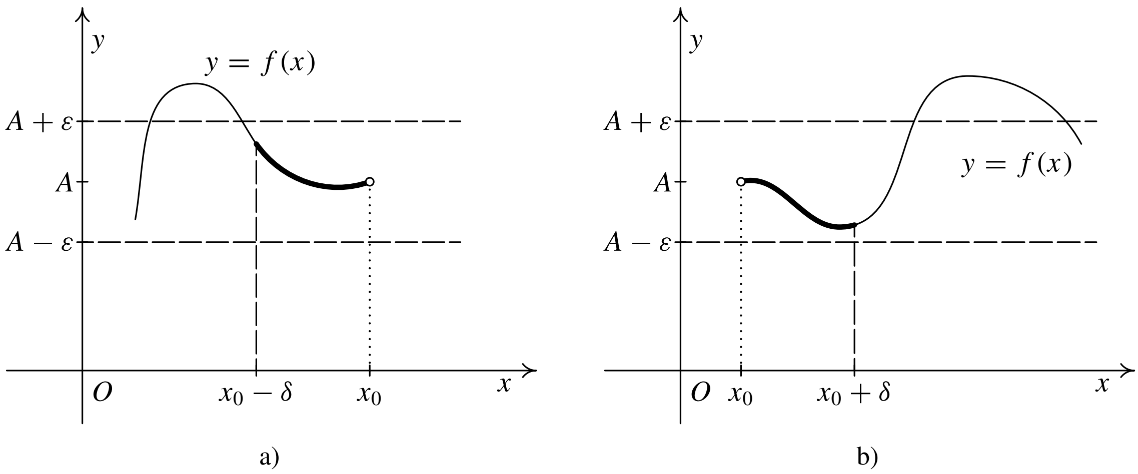
Jednostranné limity

Jestliže v definici limity funkce f ve vlastním bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ vezmeme v úvahu jen body ležící vlevo od x_0, tj. $x \in (x_0 - \delta, x_0)$, dostaneme *limitu zleva* (obr. 6.8 a)):

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = A.$$

Podobně když vezmeme v úvahu jen body ležící vpravo od $x_0 \in \mathbb{R}$, tj. $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, dostaneme *limitu zprava* (obr. 6.8 b)):

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = A.$$



Obr. 6.8

Těmto limitám říkáme *jednostranné limity*. Dříve než uvedeme jejich přesnou definici, je třeba zavést levé a pravé prstencové okolí bodu x_0:

Definice 6.10.

i) *Levým prstencovým okolím* bodu $x_0 \in \mathbb{R}$ rozumíme interval $(x_0 - \delta, x_0)$, kde δ je kladné reálné číslo. Značíme je $\mathscr{P}^-(x_0)$.

ii) *Pravým prstencovým okolím* bodu $x_0 \in \mathbb{R}$ rozumíme interval $(x_0, x_0 + \delta)$, kde δ je kladné reálné číslo. Značíme je $\mathscr{P}^+(x_0)$.

Definice 6.11.

i) Řekneme, že *funkce* f *má v bodě* $x_0 \in \mathbb{R}$ *limitu zleva* rovnu $A \in \mathbb{R}^\star$, jestliže ke každému okolí $\mathscr{O}(A)$ bodu A existuje levé prstencové okolí $\mathscr{P}^-(x_0)$ bodu x_0 takové, že pro všechna $x \in \mathscr{P}^-(x_0)$ platí $f(x) \in \mathscr{O}(A)$. Píšeme:

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = A.$$

ii) Řekneme, že *funkce* f *má v bodě* $x_0 \in \mathbb{R}$ *limitu zprava* rovnu $A \in \mathbb{R}^\star$, jestliže ke každému okolí $\mathscr{O}(A)$ bodu A existuje pravé prstencové okolí $\mathscr{P}^+(x_0)$ bodu x_0 takové, že pro všechna $x \in \mathscr{P}^+(x_0)$ platí $f(x) \in \mathscr{O}(A)$. Píšeme:

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = A.$$

Poznámka 6.12. Je-li $x_0 \in \mathbb{R}$, pak lze mluvit jednak o limitě zprava, kdy vyšetřujeme všechna $x \in \mathscr{P}^+(x_0)$, jednak o limitě zleva, kdy vyšetřujeme všechna $x \in \mathscr{P}^-(x_0)$, a konečně o limitě, kdy vyšetřujeme všechna $x \in \mathscr{P}(x_0)$.

Je-li $x_0 = +\infty$, pak mluvíme pouze o limitě, neboť $\mathscr{P}(+\infty) = (k, +\infty)$, $k \in \mathbb{R}$. To znamená, že okolí bodu $+\infty$ je vlastně „levé prstencové okolí“ bodu $+\infty$ a jiné ani nelze uvažovat. Analogicky pro bod $x_0 = -\infty$.

6.2 Vlastnosti limit

Nyní si uvedeme ve větách několik základních vlastností limit.

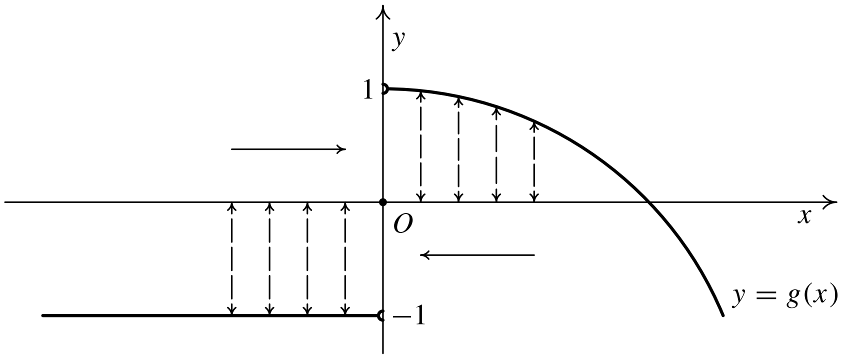
Věta 6.13. *Nechť $x_0 \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}^\star$. Limita v bodě x_0 existuje právě tehdy, když v tomto bodě existují obě jednostranné limity a jsou stejné. Zapsáno symbolicky:*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \quad\Leftrightarrow\quad \Big(\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = A\Big).$$

Tvrzení věty používáme k výpočtu limity funkce v bodě x_0, která je dána různými předpisy pro $x > x_0$ a $x < x_0$. Dále ji využíváme k důkazu faktu, že limita dané funkce v bodě x_0 neexistuje. Jestliže totiž některá z jednostranných limit neexistuje, nebo obě existují, ale jsou navzájem různé, pak limita neexistuje. Např. na obr. 6.9 je načrtnut graf funkce g, pro kterou platí

$$\lim_{x\to 0^-} g(x) = -1, \qquad \lim_{x\to 0^+} g(x) = 1, \qquad \text{a tedy } \lim_{x\to 0} g(x) \text{ neexistuje.}$$

Věta 6.14. *Funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}^\star$ nejvýše jednu limitu.*



Obr. 6.9

Důkaz. Nechť $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ a $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = B$. Důkaz provedeme pouze pro $x_0 \in \mathbb{R}$, $A, B \in \mathbb{R}$. Pro další varianty se důkaz provede analogicky.

Předpokládejme, že $A \neq B$. Nechť tedy např. $B > A$. Zvolme $\varepsilon = \frac{B-A}{2} > 0$. Pak podle definice limity existuje δ_1-okolí bodu x_0 tak, že pro $x_0 - \delta_1 < x < x_0 + \delta_1$, $x \neq x_0$, platí

$$A - \frac{B-A}{2} < f(x) < A + \frac{B-A}{2},$$

a současně existuje δ_2-okolí bodu x_0 tak, že pro $x_0 - \delta_2 < x < x_0 + \delta_2$, $x \neq x_0$, platí

$$B - \frac{B-A}{2} < f(x) < B + \frac{B-A}{2}.$$

Označme $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Pak pro $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$, $x \neq x_0$, z pravé poloviny první nerovnosti máme

$$f(x) < A + \frac{B-A}{2} = \frac{A+B}{2}$$

a z levé poloviny druhé nerovnosti máme

$$\frac{A+B}{2} = B - \frac{B-A}{2} < f(x),$$

což není současně možné. □

Poznámka 6.15. Předchozí věta říká, že mohou nastat pouze dvě možnosti — buď limita funkce v daném bodě neexistuje, nebo existuje a je právě jedna.

K definici limity funkce lze přistupovat i jinak než výše uvedeným způsobem „přes okolí“. Nyní si uvedeme větu, která popisuje ekvivalentní, tzv. *Heineho*[1], definici limity funkce pomocí posloupností.

[1]**Heinrich Eduard Heine** (1821–1881) (čti hajne) — věnoval se základům matematické analýzy, matematické fyzice a teorii funkcí.

Věta 6.16. *Nechť $x_0 \in \mathbb{R}^\star$, $A \in \mathbb{R}^\star$ a funkce f je definována na nějakém prstencovém okolí $\mathscr{P}(x_0)$ bodu x_0. Pak $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, právě když pro každou posloupnost (x_n) takovou, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $x_n \in \mathscr{P}(x_0)$, platí*

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x_0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \to \infty} f(x_n) = A.$$

Kdybychom dokazovali všechny věty o limitách, pak by nám Heineho definice limity umožnila jednoduše tyto věty dokázat na základě dříve uvedených vět o limitách posloupností.

Nyní si uvedeme větu důležitou pro konkrétní počítání limit funkcí. Pomocí této věty budeme schopni ze znalosti limit dvou funkcí f a g určit limitu jejich součtu, rozdílu, součinu a podílu.

Věta 6.17. *Nechť $x_0 \in \mathbb{R}^\star$ a nechť existují $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ a $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$. Pak platí:*

1) $\lim\limits_{x \to x_0} \big[f(x) \pm g(x)\big] = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$,

2) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)g(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$,

3) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}$,

4) $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = |\lim\limits_{x \to x_0} f(x)|$,

jsou-li definovány pravé strany výše uvedených rovností.

Věta říká, že limita součtu (rozdílu, součinu, podílu) je rovna součtu (rozdílu, součinu, podílu) limit, pokud mají výrazy na pravých stranách rovností smysl. Předpoklad smysluplnosti výrazů na pravých stranách rovností je velmi důležitý především pro počítání s nevlastními limitami. Je třeba znát, které operace s $\pm\infty$ jsou definovány a které nikoliv. Podrobněji se k tomu vrátíme v oddíle věnovanému výpočtu limit.

Abychom mohli předchozí větu využít k výpočtu limit, musíme znát limity jednotlivých funkcí. V následujícím oddílu (o spojitosti) si ukážeme, jak lze v některých případech určit limity elementárních funkcí.

6.3 Spojitost

Pomocí limity funkce v bodě budeme definovat spojitost funkce v bodě.

Definice 6.18. Řekneme, že *funkce f je spojitá v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$*, jestliže platí

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Poznámka 6.19.

1. Je-li f spojitá v bodě x_0, pak
   a) existuje vlastní (konečná) limita funkce f v bodě x_0,
   b) funkce f je definovaná v bodě x_0, tj. existuje $f(x_0)$,
   c) tato dvě čísla jsou si rovna.
2. Platí-li rovnost uvedená v definici jen pro některou jednostrannou limitu, mluvíme o *spojitosti zprava*, resp. o *spojitosti zleva* v bodě x_0.
3. Volně řečeno, spojitost v bodě x_0 znamená, že $f(x_0)$ je právě to číslo, k němuž se hodnoty funkce na okolí bodu x_0 přibližují.

Z věty 6.17 dostáváme, že součet, rozdíl, součin a podíl (pokud je definován) funkcí spojitých v bodě jsou funkce spojité v témže bodě.

Věta 6.20. *Nechť funkce f a g jsou spojité v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$. Pak i funkce $f \pm g$ a $f \cdot g$ jsou spojité v bodě x_0. Je-li navíc $g(x_0) \neq 0$, je i funkce $\frac{f}{g}$ spojitá v bodě x_0.*

Dále lze ukázat, že složením spojitých funkcí vznikne opět spojitá funkce.

Věta 6.21. *Nechť funkce f je spojitá v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ a nechť funkce g je spojitá v bodě $f(x_0)$. Pak funkce $g \circ f$ je spojitá v bodě x_0.*

Víme-li, že je funkce f spojitá v bodě x_0, pak se $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ počítá velice snadno, neboť je to vlastně přímo funkční hodnota $f(x_0)$. Proto je důležité znát co nejvíce příkladů spojitých funkcí. Lze dokázat následující tvrzení.

Věta 6.22. *Nechť f je základní elementární funkce a nechť x_0 je vnitřním bodem definičního oboru $D(f)$. Pak funkce f je spojitá bodě x_0.*

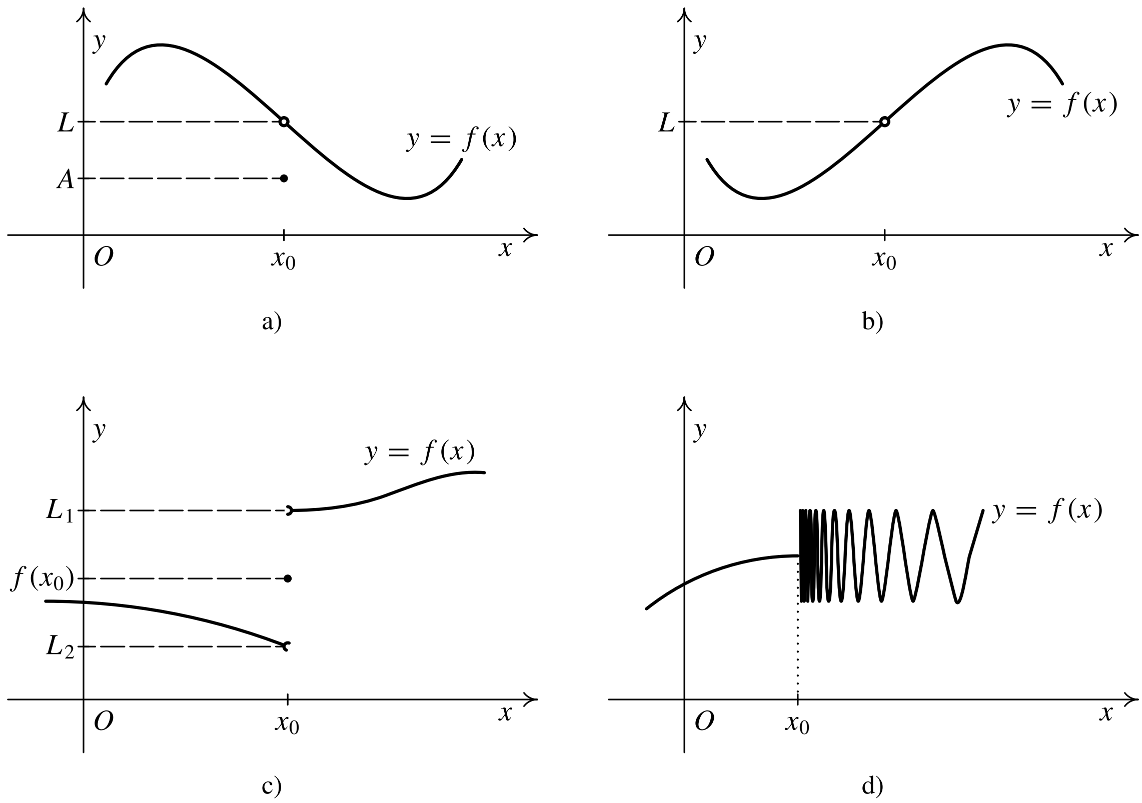
Poznamenejme, že bod x_0 je *vnitřním bodem $D(f)$* právě tehdy, když existuje okolí $\mathscr{O}(x_0)$ bodu x_0 takové, že platí: $\mathscr{O}(x_0) \subset D(f)$.

Dále připomeňme, že základními elementárními funkcemi nazýváme funkce exponenciální a logaritmické, mocninné, goniometrické a cyklometrické, hyperbolické a hyperbolometrické.

Z vět 6.20, 6.21 a 6.22 okamžitě plyne, že všechny elementární funkce (funkce, které lze vytvořit ze základních elementárních funkcí pomocí konečného počtu operací sčítání, odčítání, násobení, dělení a skládání funkcí) jsou spojité ve všech vnitřních bodech definičního oboru (v krajních bodech jde o jednostrannou spojitost).

Poznámka 6.23. Nechť $x_0 \in \mathbb{R}$ a nechť je funkce f definována v nějakém prstencovém okolí $\mathscr{P}(x_0)$ bodu x_0. Pak z hlediska spojitosti funkce v bodě mohou nastat následující případy.

1. Funkce f je v bodě x_0 spojitá. To znamená, že limita existuje ($\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$), funkce je v bodě x_0 definována ($f(x_0) = A$) a platí $L = A$.



Obr. 6.10

2. Funkce f není v bodě x_0 spojitá. Zde rozlišujeme několik případů.
   a) Limita existuje ($\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L \in \mathbb{R}$), funkce je v bodě definována ($f(x_0) = A$), ale $L \neq A$ — viz obr. 6.10 a).
   b) Limita existuje ($\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L \in \mathbb{R}$), ale funkce není v bodě x_0 definována — viz obr. 6.10 b).

   V obou těchto případech mluvíme o *odstranitelné nespojitosti* (stačí předefinovat resp. dodefinovat $f(x_0)$ a funkce f bude v bodě x_0 spojitá).

   c) Limita neexistuje. V tom případě ještě rozlišujeme, zda existují obě vlastní jednostranné limity $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = L_1$ a $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = L_2$, ale $L_1 \neq L_2$, pak mluvíme o *bodu nespojitosti prvního druhu* — viz obr. 6.10 c). Jestliže některá jednostranná limita neexistuje, nebo je nevlastní, mluvíme o *bodu nespojitosti druhého druhu* — viz obr. 6.10 d), kde limita zprava neexistuje.

Příklad 6.24. Určete body, v nichž nejsou následující funkce spojité.

a) $f\colon\ y = \dfrac{1}{(x^2-4)(x^3-1)}$, b) $f\colon\ y = \operatorname{sgn} x$, c) $f\colon\ y = \chi(x)$.

Řešení.

a) Jedná se o elementární funkci, přičemž $D(f) = \mathbb{R} \smallsetminus \{-2, 1, 2\}$. Funkce je spojitá ve všech bodech $x \in D(f)$, neboť každý bod $x \in D(f)$ je vnitřním bodem $D(f)$. Tedy funkce f není spojitá v bodech $x_1 = -2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, v nichž není definována.

b) Funkce signum (viz str. 41) není spojitá v bodě $x_0 = 0$. Obě jednostranné limity existují, ale jsou navzájem různé:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1, \qquad \lim_{x\to 0^-} f(x) = -1.$$

Jedná se o nespojitost prvního druhu.

c) Dirichletova funkce (viz str. 42) není spojitá v žádném bodě $x_0 \in \mathbb{R}$. V žádném bodě neexistuje ani jedna jednostranná limita. Jedná se o nespojitost druhého druhu. ▲

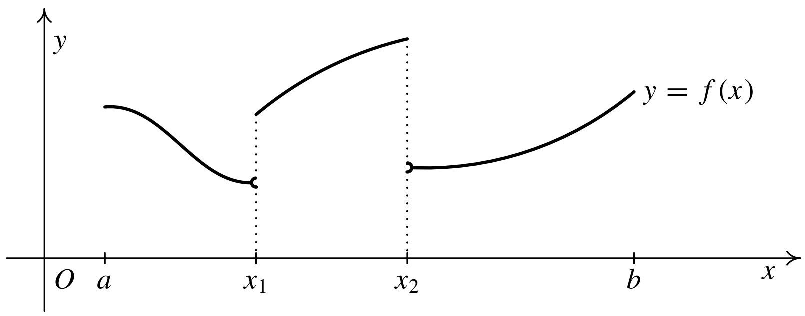
V definici 6.18 jsme zavedli pojem spojitosti funkce v bodě. Na základě této lokální vlastnosti nyní definujeme globální vlastnost — spojitost na intervalu.

Definice 6.25. Řekneme, že funkce f je *spojitá na intervalu* $J \subset \mathbb{R}$, platí-li

i) f je spojitá v každém vnitřním bodě intervalu J,

ii) patří-li počáteční (resp. koncový) bod intervalu J k tomuto intervalu, je v něm funkce f spojitá zprava (resp. zleva).

Poznámka 6.26. Funkce definovaná na intervalu $\langle a, b\rangle$ se nazývá *po částech spojitá*, je-li na $\langle a, b\rangle$ spojitá nejvýše s výjimkou konečného počtu bodů nespojitosti prvního druhu — viz obr. 6.11. Tyto funkce mají značný praktický význam v některých důležitých partiích matematiky používaných v aplikacích, jako jsou např. Fourierovy[1] řady nebo Laplaceova[2] transformace.



Obr. 6.11

[1] **Jean-Baptiste Joseph Fourier** (1768–1830) (čti furje) — významný francouzský matematik, jeden ze zakladatelů matematické fyziky.

[2] **Pierre Simon Laplace** (1749–1827) (čti laplas) — významný francouzský matematik, fyzik a astronom. Zabýval se parciálními diferenciálními rovnicemi a teorií pravděpodobnosti.

6.4 Limity základních elementárních funkcí

V této kapitole si ukážeme, jak počítat limity základních elementárních funkcí v bodě x_0. Připomeňme, že mezi základní elementární funkce patří funkce exponenciální, logaritmické, mocninné, goniometrické, cyklometrické, hyperbolické a hyperbolometrické. Budeme přitom rozlišovat dva případy — limity funkcí spojitých v bodě x_0 a limity funkcí, které v bodě x_0 nejsou spojité.

Limity funkcí spojitých v bodě

V předchozí části o spojitosti jsme si řekli, že pokud víme, že je funkce f spojitá v bodě x_0, pak $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ spočítáme velice snadno, neboť je to vlastně přímo funkční hodnota $f(x_0)$.

Příklad 6.27. Vypočtěte následující limity.

a) $\lim\limits_{x\to 0} \sin x$, b) $\lim\limits_{x\to 1} \operatorname{arctg} x$, c) $\lim\limits_{x\to 0} \mathrm{e}^x$.

Řešení. K výpočtu využijeme spojitost příslušných funkcí. Platí:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \sin x = \sin 0 = 0$,

b) $\lim\limits_{x\to 1} \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} 1 = \dfrac{\pi}{4}$,

c) $\lim\limits_{x\to 0} \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^0 = 1$.

▲

Limity v nevlastních bodech a v bodech, v nichž není funkce definována

Kvůli počítání složitějších limit je vhodné si zapamatovat mnohé limity základních elementárních funkcí v nevlastních bodech a v bodech, v nichž nejsou funkce definovány. Jejich odvození lze provést přímo z definice — viz následující příklad.

Příklad 6.28. Dokažte, že platí

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty, \qquad \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty.$$

Řešení. Nejprve dokážeme $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$. Podle definice limity musí ke každému okolí $\mathscr{O}(+\infty)$ bodu $+\infty$ existovat pravé prstencové okolí $\mathscr{P}^+(0)$ bodu nula tak, že pro každé $x \in \mathscr{P}^+(0)$ platí $\frac{1}{x} \in \mathscr{O}(+\infty)$. Neboli

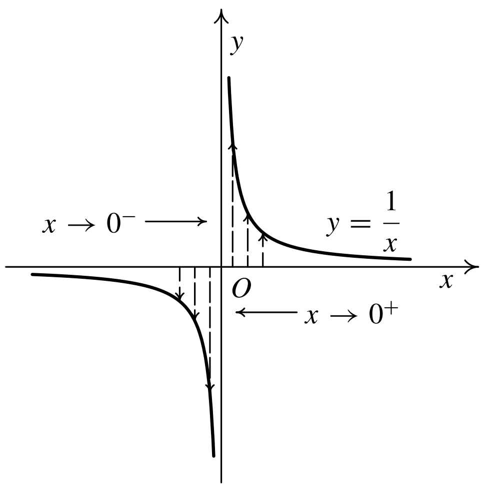
$$\forall k \in \mathbb{R}\ \exists \delta \in \mathbb{R}^+\ \forall x \in (0, \delta) :\ \frac{1}{x} > k.$$

To znamená, že ke každému k hledáme δ takové, že pro každé x z pravého δ-okolí bodu nula bude $\frac{1}{x}$ větší než k.

Přitom, je-li $k \leqq 0$, pak můžeme vzít $\delta \in \mathbb{R}^+$ libovolně, neboť pro $\forall x \in (0, \delta)$ platí $\frac{1}{x} > k$ (kladné číslo je vždy větší než záporné, příp. nula). V případě, že je $k > 0$, pak můžeme zvolit $\delta = \frac{1}{k}$. Pak pro $\forall x \in (0, \delta)$ platí $\frac{1}{x} > k$ (zdůvodnění: $x \in (0, \delta) = (0, \frac{1}{k})$, tedy $x < \frac{1}{k}$, a proto $\frac{1}{x} > k$). Dokázali jsme tedy, že ke každému k existuje δ takové, že pro každé x z pravého δ-okolí bodu nula bude $\frac{1}{x}$ větší než k.

Analogicky dokážeme druhou limitu. Poznamenejme, že z předchozích výsledků plyne, že $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x}$ neexistuje (jednostranné limity se nerovnají).

Grafem funkce $f\colon\ y = \frac{1}{x}$ je rovnoosá hyperbola — viz obr. 6.12. Pomocí grafu funkce si lze příslušné limity jednoduše zapamatovat. ▲



Obr. 6.12

Obdobně jako v předchozím příkladě lze dokázat následující limity základních elementárních funkcí. Lehce si je zapamatujete, znáte-li grafy příslušných funkcí.

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty,\ a > 1, \qquad \lim_{x \to -\infty} a^x = 0,\ a > 1,$$

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = 0,\ 0 < a < 1, \qquad \lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty,\ 0 < a < 1,$$

$$\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty, \qquad \lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty,$$

$$\lim_{x \to +\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}, \qquad \lim_{x \to -\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{x \to +\infty} \operatorname{arccotg} x = 0, \qquad \lim_{x \to -\infty} \operatorname{arccotg} x = \pi,$$

$$\lim_{x \to +\infty} x^s = +\infty \text{ pro } s > 0, \qquad \lim_{x \to 0^+} x^s = 0 \text{ pro } s > 0,$$

$$\lim_{x \to +\infty} x^s = 0 \text{ pro } s < 0, \qquad \lim_{x \to 0^+} x^s = +\infty \text{ pro } s < 0.$$

6.5 Limity elementárních funkcí

V této kapitole si ukážeme, jak počítat limity elementárních funkcí v bodě x_0. Připomeňme, že elementárními funkcemi rozumíme funkce, které lze vytvořit ze základních elementárních funkcí pomocí konečného počtu operací sčítání, odčítání, násobení, dělení a skládání funkcí.

Limity funkcí spojitých v bodě

Víme, že elementární funkce jsou spojité ve všech vnitřních bodech svých definičních oborů. Jejich limity v těchto v bodech tedy vypočteme prostým dosazením.

Příklad 6.29. Vypočtěte následující limity.

a) $\lim\limits_{x\to 1}(\ln x + x^2 + 3)$, b) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^3 + x^2 - 2x + 11}{x^2 + x + 1}$, c) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\cos x}{x}$,

d) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\sqrt{x\cos x + \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}}$, e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x + 2^x\sin x}{\ln(1+x) + (x+1)\cos x}$, f) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} x\operatorname{tg} x$.

Řešení. K výpočtu využijeme spojitost příslušných funkcí. Platí:

a) $\lim\limits_{x\to 1}(\ln x + x^2 + 3) = \ln 1 + 1 + 3 = 4$,

b) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^3 + x^2 - 2x + 11}{x^2 + x + 1} = \dfrac{-3 + 1 + 2 + 11}{1 - 1 + 1} = 11$,

c) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\cos x}{x} = \dfrac{\cos \pi}{\pi} = -\dfrac{1}{\pi}$,

d) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\sqrt{x\cos x + \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}} = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}\cos\dfrac{\pi}{2} + \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4}} = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}\cdot 0 + 1} = 1$,

e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x + 2^x\sin x}{\ln(1+x) + (x+1)\cos x} = \dfrac{e^0 + 2^0\sin 0}{\ln 1 + 1\cdot\cos 0} = \dfrac{1 + 1\cdot 0}{0 + 1\cdot 1} = 1$,

f) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} x\operatorname{tg} x = \dfrac{\pi}{4}\cdot\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{4}\cdot 1 = \dfrac{\pi}{4}$. ▲

Právě jsme si ukázali, jak lze využít spojitosti elementárních funkcí k výpočtu limit v bodech $x_0 \in D(f)$.

Při výpočtu limit postupujeme vždy tak, že nejprve zkusíme „dosadit“. Pokud nám vyjde smysluplný výsledek, pak jsme hotovi. V případě, že počítáme limitu v nevlastním bodě nebo v bodě, kde není funkce definována, pak můžeme využít dále uvedených vět.

A) Věta 6.17 o limitě součtu, rozdílu, součinu a podílu funkcí

Věta 6.17, která byla již uvedena, říká, že limita součtu (rozdílu, součinu, podílu) je rovna součtu (rozdílu, součinu, podílu) jednotlivých limit, má-li příslušná pravá strana rovnosti smysl.

Poznámka 6.30.

1. V této chvíli je třeba si zopakovat počítání s $+\infty$ a $-\infty$ (viz str. 21). Z hlediska konkrétního výpočtu limit je pro nás především důležitá operace
$$\frac{x}{+\infty} = \frac{x}{-\infty} = 0 \qquad \text{pro } x \in \mathbb{R}.$$
2. Dále je nutné znát výrazy, které nejsou definovány. Vzhledem k důležitosti si je znovu připomeneme (použijeme již stručnějšího zápisu než na str. 21).
$$\boxed{\infty - \infty, \qquad 0 \cdot (\pm\infty), \qquad \frac{A}{0}\ (A \in \mathbb{R}^\star), \qquad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}.}$$
Přitom je třeba si uvědomit, že do případu $\frac{A}{0}$ $(A \in \mathbb{R}^\star)$ spadají tyto možnosti: $\frac{0}{0}$, $\frac{+\infty}{0}$, $\frac{-\infty}{0}$ a $\frac{A}{0}$, kde $A \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
3. V případě, že $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ a $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$, budeme říkat, že $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ *je limita typu* $\frac{0}{0}$. V případě, že $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$ a $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$, budeme říkat, že $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ *je limita typu* $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$. Obdobně pro ostatní případy.
K výpočtu limit typu $\frac{0}{0}$ a $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ využíváme nejčastěji tzv. l'Hospitalovo pravidlo, se kterým se seznámíme později (viz str. 233). Limity většiny dalších nedefinovaných výrazů lze na limity typu $\frac{0}{0}$ a $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ převést a opět použít l'Hospitalovo pravidlo. V některých případech však lze limity tohoto typu spočítat i bez použití l'Hospitalova pravidla (někdy je to i výhodnější). Podívejte se na příklady 6.34, 6.35, 6.36 a 6.42. Ve všech těchto příkladech jde o limity typu $\frac{0}{0}$. Typickým příkladem na limitu typu $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, který řešíme bez použití l'Hospitalova pravidla, je limita racionální lomené funkce — viz příklad 6.39 a), b).

Příklad 6.31. Vypočtěte následující limity.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} (\mathrm{e}^x + x)$, b) $\lim\limits_{x\to-\infty} (\mathrm{e}^x + x)$, c) $\lim\limits_{x\to+\infty} x \operatorname{arctg} x$,

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2+1}$, e) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2+1} - x\right)$.

Řešení.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} (\mathrm{e}^x + x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x + \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty + \infty = +\infty$,

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} (\mathrm{e}^x + x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x + \lim\limits_{x\to-\infty} x = 0 - \infty = -\infty$,

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} x \operatorname{arctg} x = \lim\limits_{x\to+\infty} x \cdot \lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x = +\infty \cdot \dfrac{\pi}{2} = +\infty$,

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2+1} = \dfrac{1}{(+\infty)^2+1} = \dfrac{1}{+\infty+1} = \dfrac{1}{+\infty} = 0$,

e) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2+1} - x\right) = \sqrt{(-\infty)^2+1} - (-\infty) =$
$= \sqrt{+\infty+1} + \infty = +\infty + \infty = +\infty.$ ▲

V předchozích příkladech jsme počítali limity v nevlastních bodech. Nyní si uveďme příklad na výpočet limity ve vlastním bodě, v němž není funkce definována.

Příklad 6.32. Vypočtete $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2}$.

Řešení. Využijeme již známých limit z příkladu 6.28. Dostáváme

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} \cdot \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = (+\infty)\cdot(+\infty) = +\infty.$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^2} = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} \cdot \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = (-\infty)\cdot(-\infty) = +\infty.$$

Obě jednostranné limity se rovnají, původní limita tedy existuje a je rovna $+\infty$. Tedy

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty.$$

▲

B) Věta o limitě funkcí shodujících se v prstencovém okolí bodu

Věta 6.33. *Nechť f a g jsou funkce a nechť existuje prstencové okolí $\mathscr{P}(x_0)$ bodu $x_0 \in \mathbb{R}^\star$ takové, že pro každé $x \in \mathscr{P}(x_0)$ platí $f(x) = g(x)$. Nechť $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = A$, $A \in \mathbb{R}^\star$. Pak existuje $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ a platí $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$.*

Stačí tedy najít jinou funkci g, jejíž funkční hodnoty se ve všech bodech prstencového okolí bodu x_0 shodují s funkčními hodnotami funkce f a jejíž limitu umíme vypočítat. Pak se limity obou funkcí rovnají. K nalezení funkce g využijeme známých úprav výrazů. Například u racionální lomené funkce využijeme rozkladu čitatele i jmenovatele na součin a následného krácení, u zlomků s odmocninami obvykle využíváme rozšiřování čitatele i jmenovatele vhodným výrazem, u výrazů s goniometrickými funkcemi využíváme k úpravě známých vztahů pro goniometrické funkce atd. Ukažme si postup na následujících příkladech.

Příklad 6.34. Vypočtěte $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2-1}{x+1}$.

Řešení. Označme $f(x) = \frac{x^2-1}{x+1}$. Chceme určit limitu v bodě $x_0 = -1$, v němž není funkce f definována. Avšak pro $x \neq -1$ je

$$\frac{x^2-1}{x+1} = \frac{(x+1)(x-1)}{x+1} = x-1.$$

Položme nyní $g(x) = x-1$. Pro $x \neq -1$ platí $f(x) = g(x)$. Funkce g je ale navíc definovaná i pro $x = -1$ a je v tomto bodě spojitá. Dle věty 6.33 tedy dostáváme

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^2-1}{x+1} = \lim_{x\to -1} (x-1) = -1-1 = -2.$$

▲

Příklad 6.35. Vypočtěte $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$.

Řešení. Označme $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$. Chceme určit limitu v bodě $x_0 = 0$, v němž není funkce f definována. Avšak pro $x \neq 0$ je (rozšíříme čitatele i jmenovatele výrazem $\sqrt{x+1}+1$) platí:

$$\frac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \frac{\left(\sqrt{x+1}-1\right)\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)} = \frac{x+1-1}{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)} = \frac{1}{\sqrt{x+1}+1}\,.$$

Položme $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}+1}$. Pro $x \neq 0$ platí $f(x) = g(x)$. Funkce g je ale navíc definována i pro $x = 0$ a je spojitá. Dle věty 6.33 tedy platí

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+1}+1} = \frac{1}{\sqrt{1}+1} = \frac{1}{2}\,.$$ ▲

Abychom mohli zvolit správnou úpravu, je třeba si uvědomit, čeho chceme dosáhnout, co je naším cílem. Podívejme se na příklad 6.34. Původní limita je typu $\frac{0}{0}$ (funkce f není v bodě x_0 definována). Cílem je nalézt funkci g, která již bude v bodě x_0 definována, tj. po dosazení x_0 do g nedostaneme nulu ve jmenovateli. Všechny úpravy tedy směřují k tomu, aby se vykrátil člen, který „způsoboval“ nulu ve jmenovateli. V našem příkladě člen $x+1$. Obdobně v příkladě 6.35 je třeba vést úpravy tak, aby nakonec došlo ke krácení x.

Příklad 6.36. Vypočtěte následující limity:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin^3 x}$, b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2 - x}{\sqrt{x}-1}$, c) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-8}{x^4-16}$.

Řešení. K výpočtu využijeme stejně jako v předchozích příkladech větu 6.33, budeme však postupovat rychleji.

a) $$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin^3 x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin x}{\cos x} - \sin x}{\sin x \sin^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1-\cos x}{\cos x}}{\sin^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\cos x(1-\cos^2 x)} =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\cos x(1-\cos x)(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x(1+\cos x)} = \frac{1}{2}\,,$$

b) $$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-x}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2-x}{\sqrt{x}-1} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} = \lim_{x\to 1} \frac{x(x-1)(\sqrt{x}+1)}{x-1} =$$
$$= \lim_{x\to 1} x(\sqrt{x}+1) = 2,$$

c) $$\lim_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x^4-16} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x^2-4)(x^2+4)} =$$
$$= \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(x+2)(x^2+4)} = \lim_{x\to 2} \frac{x^2+2x+4}{(x+2)(x^2+4)} = \frac{3}{8}\,.$$ ▲

Příklad 6.37. Vypočtěte jednostranné limity $\lim\limits_{x\to 1^{\pm}} \dfrac{|x^2-1|}{x-1}$.

Řešení. Nejprve vypočteme limitu zprava. Přitom musíme odstranit absolutní hodnotu (v pravém okolí bodu 1 je výraz v absolutní hodnotě kladný):

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{|x^2-1|}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} (x+1) = 2.$$

Analogicky pro limitu zleva:

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{|x^2-1|}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{-x^2+1}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{(1+x)(1-x)}{-(1-x)} = \lim_{x\to 1^-} (-1-x) = -2. \quad \blacktriangle$$

Nakonec si uveďme využití věty při výpočtu limit v nevlastních bodech. Jedná se o případy, kdy nelze ihned využít větu 6.17, tj. přímo dosadit, neboť bychom dostali nedefinované výrazy. Cílem je tedy „upravit“ danou funkci tak, aby se při výpočtu limity z upravené funkce již věta 6.17 použít dala. Přitom nejčastější úpravou je vytýkání (u polynomů většinou vytýkáme nejvyšší mocninu, u lomené funkce nejvyšší mocninu ze jmenovatele) nebo rozšiřování vhodným výrazem.

Příklad 6.38. Vypočtěte $\lim\limits_{x\to+\infty} (a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0)$, kde $n \in \mathbb{N}$, $n \geqq 1$, $a_n \neq 0$.

Řešení. Pokud by byly všechny koeficienty a_n kladné, pak bychom s využitím věty 6.17 dostali součet konečného počtu $+\infty$ a výsledek by byl $+\infty$. Obdobně pro všechna a_n záporná. V obecném případě, kdy jsou některé koeficienty kladné a jiné záporné, nestačí využít větu 6.17.

V $\mathscr{P}(\infty)$ platí

$$\lim_{x\to+\infty} (a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0) = \lim_{x\to+\infty} x^n \Big(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}\Big).$$

S využitím věty 6.33 a faktu, že $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty$ a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{a_i}{x^{n-i}} = 0$, $i = 0, \dots, n-1$, vyjde

$$\lim_{x\to+\infty} (a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0) = +\infty(a_n + 0 + \dots + 0) = +\infty \operatorname{sgn} a_n.$$

Podobně pro $x \to -\infty$ je výsledek limity $+\infty(-1)^n \operatorname{sgn} a_n$. $\blacktriangle$

Příklad 6.39. Vypočtěte limity

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-x+1}{2x^2+x-3}$, b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2+3}{\sqrt{3x^4-1}}$,

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} x\left(\sqrt{x^2+9} - \sqrt{x^2-9}\right)$.

Řešení.

a) Z příkladu 6.38 víme, že o výsledku limity polynomu rozhoduje nejvyšší mocnina. V našem případě x^2 (v čitateli i ve jmenovateli). Jde tedy o limitu typu $\frac{+\infty}{+\infty}$. Vytkneme nejvyšší mocninu jmenovatele. Vyjde

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-x+1}{2x^2+x-3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(2+\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{2+\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}} = \frac{1-0+0}{2+0-3\cdot 0} = \frac{1}{2}.$$

Využili jsme toho, že $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{+\infty} = 0$ a $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{(+\infty)^2} = \frac{1}{+\infty} = 0$.

b) Nyní již budeme postupovat rychleji: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2+3}{\sqrt{3x^4-1}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2+3}{\sqrt{x^4\left(3-\frac{1}{x^4}\right)}} =$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\left(2+\frac{3}{x^2}\right)}{x^2\sqrt{3-\frac{1}{x^4}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2+\frac{3}{x^2}}{\sqrt{3-\frac{1}{x^4}}} = \frac{2+0}{\sqrt{3-0}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

c) U tohoto příkladu nevyužijeme vytýkání (to by vedlo k nedefinovanému výrazu $\infty\cdot 0$), ale rozšiřování.

$$\lim_{x\to-\infty} x\left(\sqrt{x^2+9}-\sqrt{x^2-9}\right) =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} x\frac{\sqrt{x^2+9}-\sqrt{x^2-9}}{1}\cdot\frac{\sqrt{x^2+9}+\sqrt{x^2-9}}{\sqrt{x^2+9}+\sqrt{x^2-9}} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} x\frac{x^2+9-(x^2-9)}{\sqrt{x^2+9}+\sqrt{x^2-9}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{18x}{\sqrt{x^2+9}+\sqrt{x^2-9}} =$$

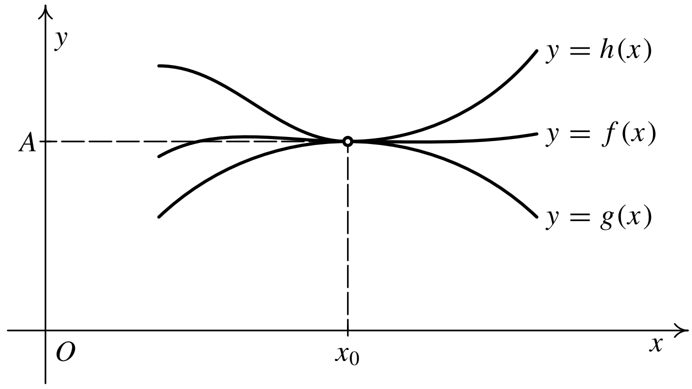
$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{18x}{|x|\left(\sqrt{1+\frac{9}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{9}{x^2}}\right)} = \frac{-18}{2} = -9.$$

Využili jsme faktu, že $\sqrt{x^2} = |x|$ a pro záporná čísla ($x\to-\infty$) je $|x| = -x$. Proto je u výsledku znaménko mínus. ▲

C) Věta o sevření

Věta 6.40. *Nechť f, g, h jsou funkce a nechť existuje prstencové okolí $\mathscr{P}(x_0)$ bodu $x_0\in\mathbb{R}^\star$ takové, že pro každé $x\in\mathscr{P}(x_0)$ platí $g(x)\leqq f(x)\leqq h(x)$. Nechť $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \lim\limits_{x\to x_0} h(x) = A$, $A\in\mathbb{R}^\star$. Pak existuje $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ a platí $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$.*

Obsah věty je zřejmý z obrázku 6.13. Jestliže grafy funkcí g, f a h leží v okolí x_0 „nad sebou" a hodnoty „horní" a „dolní" funkce se blíží ke stejnému číslu, musí to platit i pro „prostřední" funkci. Věta platí i pro jednostranné limity.



Obr. 6.13

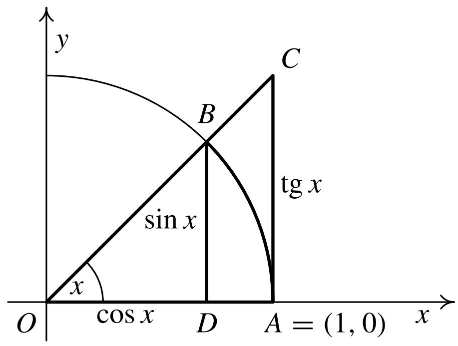
Poznámka 6.41.

1. V případě, že $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = +\infty$, pak také limita $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ a funkci h vůbec nepotřebujeme.
2. V případě, že $\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = -\infty$, pak také limita $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ a funkci g nepotřebujeme.

Pomocí předchozí věty si nyní dokážeme platnost následující důležité limity

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.}$$

Tuto limitu budeme často využívat při výpočtech dalších limit, je proto dobré si ji zapamatovat.



Obr. 6.14

Důkaz. Uvažujme zatím jen $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Použijeme větu 6.40, v níž zvolíme $f(x) = \frac{\sin x}{x}$. Musíme nyní najít vhodnou funkci g, která leží „pod funkcí f“, a vhodnou funkci h, která leží „nad funkcí f“ na intervalu $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Vyjdeme z obrázku 6.14.

Připomeňme, že velikost úhlu je délka oblouku jednotkové kružnice. Tedy oblouk $\widehat{AB}$ má délku x. Dále z definice goniometrických funkcí máme:

$$\overline{BD} = \sin x, \quad \overline{OD} = \cos x, \quad \overline{AC} = \operatorname{tg} x.$$

Označme

P_1 .... obsah $\triangle ODB$,

P_2 .... obsah kruhové výseče OAB,

P_3 .... obsah $\triangle OAC$.

Z obrázku je zřejmé, že $P_1 < P_2 < P_3$. Vypočteme tyto obsahy.

$$\begin{aligned}
P_1 &= \frac{1}{2}\,\overline{OD}\cdot\overline{BD} = \frac{1}{2}\cdot\cos x\cdot\sin x,\\
P_2 &= \frac{\pi\overline{OA}^2}{2\pi}\,x = \frac{\pi\cdot 1^2}{2\pi}\,x = \frac{1}{2}\,x,\\
P_3 &= \frac{1}{2}\,\overline{OA}\cdot\overline{AC} = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot\operatorname{tg} x = \frac{1}{2}\,\frac{\sin x}{\cos x}.
\end{aligned}$$

Z nerovností mezi P_1, P_2 a P_3 dostaneme

$$\frac{1}{2}\cos x\sin x < \frac{1}{2}\,x < \frac{1}{2}\,\frac{\sin x}{\cos x}$$

a odtud

$$\cos x < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \implies \frac{1}{\cos x} > \frac{\sin x}{x} > \cos x.$$

Celkem jsme pro každé $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ obdrželi

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < \frac{1}{\cos x}\,. \tag{6.1}$$

Lze jednoduše ukázat, že pokud $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$, pak také platí vztah (6.1). (Zdůvodnění: jestliže $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$, pak $-x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Ze sudosti uvažovaných funkcí plyne požadovaný vztah.)

Tedy nerovnost (6.1) platí pro každé $x \in \mathscr{P}_{\pi/2}(0)$. Zvolíme nyní $g(x) = \cos x$ a $h(x) = \frac{1}{\cos x}$. Jelikož $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = \cos 0 = 1$ a $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\cos 0} = 1$, pak podle věty 6.40 platí $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$. □

Uveďme si několik příkladů, při jejichž řešení využijeme právě dokázanou limitu.

Příklad 6.42. Vypočtěte limity.

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$, b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x - x}{\sin x + x}$, c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x + \operatorname{tg}^2 x}{x\sin x}$.

Řešení.

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{x}{1}} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{1}{\cos x} = 1\cdot 1 = 1,$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x - x}{\sin x + x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{\sin x}{x} - 1}{\frac{\sin x}{x} + 1} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-1}{1+1} = 0,$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x + \operatorname{tg}^2 x}{x\sin x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 x + \sin^2 x + \operatorname{tg}^2 x}{x\sin x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2 x + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{x\sin x} =$

$= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2 x\cos^2 x + \sin^2 x}{x\sin x\cos^2 x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{2\cos^2 x + 1}{\cos^2 x} = \lim\limits_{x\to 0} 1\cdot\dfrac{2+1}{1} = 3.$ ▲

D) Věta o limitě součinu „nulové“ a ohraničené funkce

Věta 6.43. *Nechť f, g jsou funkce a $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$. Nechť existuje prstencové okolí $\mathscr{P}(x_0)$ bodu $x_0 \in \mathbb{R}^\star$ takové, že funkce g je na tomto okolí ohraničená. Pak $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = 0$.*

Pro jednoduchost budeme užívat názvu věta o limitě součinu „nulové“ a ohraničené funkce, i když přesnější by bylo říkat věta o součinu ohraničené funkce a funkce, jejíž limita je nula.

Příklad 6.44. Vypočtěte $\lim_{x\to 0} x \sin \dfrac{1}{x}$.

Řešení. I když limita $\lim_{x\to 0} \sin \frac{1}{x}$ neexistuje, zadaná limita existuje, neboť $\lim_{x\to 0} x = 0$ a funkce $g\colon\ y = \sin \frac{1}{x}$ je ohraničená ($\left|\sin \frac{1}{x}\right| \leqq 1$). Tudíž podle věty 6.43 je

$$\lim_{x\to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0.$$

▲

Příklad 6.45. Vypočtěte $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\cos \mathrm{e}^{x^2+x+1}}{x}$.

Řešení. Platí

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\cos \mathrm{e}^{x^2+x+1}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \cdot \cos \mathrm{e}^{x^2+x+1} = 0,$$

neboť $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$ a funkce $g(x) = \cos \mathrm{e}^{x^2+x+1}$ je ohraničená. ▲

E) Věty o limitě složené funkce

Z hlediska praktických výpočtů mají velký význam následující věty o limitě složené funkce.

Věta 6.46. *Nechť $x_0 \in \mathbb{R}^\star$, $A \in \mathbb{R}$ a nechť platí*

i) $\lim_{x\to x_0} g(x) = A$,

ii) *funkce f je spojitá v bodě A.*

Pak složená funkce $f \circ g$ má v bodě x_0 limitu a platí

$$\lim_{x\to x_0} f\big(g(x)\big) = f\big(\lim_{x\to x_0} g(x)\big) = f(A).$$

Všimněte si, že k platnosti věty o limitě složené funkce nestačí existence limit vnitřní a vnější složky. Je ještě třeba, aby vnější složka byla spojitá. Stručně řečeno, předchozí věta říká, že s limitou je možné „vejít“ dovnitř složené funkce, je-li vnější složka spojitá.

Příklad 6.47. Vypočtěte $\lim\limits_{x\to 0} \cos\left(x^2 \sin\dfrac{1}{x}\right)$.

Řešení. Jedná se o složenou funkci. Vnější složka (funkce kosinus) je spojitá všude a limita vnitřní složky existuje a je vlastní. Platí, že

$$\lim_{x\to 0} x^2 \sin\frac{1}{x} = 0,$$

neboť se jedná o limitu součinu „nulové" a ohraničené funkce. Tedy zadaná limita

$$\lim_{x\to 0} \cos\left(x^2 \sin\frac{1}{x}\right) = \cos\left(\lim_{x\to 0} x^2 \sin\frac{1}{x}\right) = \cos 0 = 1. \qquad \blacktriangle$$

Nyní si uvedeme jinou variantu věty o složené funkci, která nevyžaduje spojitost vnější funkce, ale zato klade doplňující podmínku na vnitřní funkci.

Věta 6.48. *Nechť $x_0 \in \mathbb{R}^\star$, $A, B \in \mathbb{R}^\star$ a nechť platí*

i) $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = A$,

ii) $\lim\limits_{y\to A} f(y) = B$,

iii) *existuje prstencové okolí $\mathscr{P}(x_0)$ bodu x_0 takové, že pro každé $x \in \mathscr{P}(x_0)$ je $g(x) \neq A$.*

Pak $\lim\limits_{x\to x_0} f\big(g(x)\big) = B$.

Poznámka 6.49. Uvědomte si, že v předchozí větě je předpoklad $g(x) \neq A$ na nějakém $\mathscr{P}(x_0)$ velmi důležitý. Uvažujme například funkce g a f dané předpisy

$$g(x) = 0, \qquad f(y) = \begin{cases} 1, & y \neq 0, \\ 2006, & y = 0. \end{cases}$$

Platí $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$, $\lim\limits_{y\to 0} f(y) = 1$. Přitom ale $\lim\limits_{x\to 0} f(g(x)) = \lim\limits_{x\to 0} f(0) = \lim\limits_{x\to 0} 2006 = 2006 \neq 1$.

Příklad 6.50. Vypočtěte limity

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 5x}{x}$, b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}$.

Řešení.

a) Limitu nejprve upravíme a pak použijeme větu o složené funkci. Budeme chtít využít známé limity $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{x} \cdot \frac{5}{5} = 5 \lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{5x} \overset{(\star)}{=} 5 \lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y} = 5 \cdot 1 = 5.$$

Zdůvodněme rovnost ($\star$): Označme $x_0 = 0$, $f(y) = \frac{\sin y}{y}$, kde $y = g(x) = 5x$. Dále postupujme podle věty 6.48.

i) $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \lim\limits_{x\to 0} 5x = 0 = A$,

ii) $\lim\limits_{y\to A} f(y) = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{\sin y}{y} = 1 = B$,

iii) existuje $\mathscr{P}(0)$ takové, že pro každé $x \in \mathscr{P}(0)$ platí $g(x) = 5x \neq 0$. (Je splněno pro každé prstencové okolí bodu nula.)

Tedy podle věty 6.48 platí rovnost ($\star$).

b) Obdobně jako v předchozím příkladě dostáváme

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x} \overset{(\star)}{=} \lim_{y\to 1} \frac{y-1}{y^3-1} = \lim_{y\to 1} \frac{y-1}{(y-1)(y^2+y+1)} = \lim_{y\to 1} \frac{1}{y^2+y+1} = \frac{1}{3}.$$

Zdůvodněme rovnost ($\star$): Označme $x_0 = 0$, $f(y) = \frac{y-1}{y^3-1}$, kde $y = g(x) = \sqrt[3]{1+x}$ (z toho $x = y^3 - 1$) a postupujme podle věty 6.48.

i) $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt[3]{1+x} = 1$,

ii) $\lim\limits_{y\to 1} \frac{y-1}{y^3-1} = \frac{1}{3}$,

iii) zřejmě pro každé $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ platí $\sqrt[3]{1+x} \neq 1$. Tedy existuje $\mathscr{P}(0)$ takové, že pro každé $x \in \mathscr{P}(0)$ platí $g(x) = \sqrt[3]{1+x} \neq 1$. (Je opět splněno pro každé prstencové okolí bodu nula.) ▲

Dále si uvedeme tvrzení, jež plyne ihned z vět 6.46 a 6.48 o složených funkcích. Pokuste se tento důsledek sami dokázat.

Důsledek 6.51. *Nechť g je funkce a $x_0 \in \mathbb{R}^\star$. Pak*

i) *jestliže* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = A$, $A \in \mathbb{R}$, *pak* $\lim\limits_{x\to x_0} \mathrm{e}^{g(x)} = \mathrm{e}^A$,

ii) *jestliže* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = +\infty$, *pak* $\lim\limits_{x\to x_0} \mathrm{e}^{g(x)} = +\infty$,

iii) *jestliže* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = -\infty$, *pak* $\lim\limits_{x\to x_0} \mathrm{e}^{g(x)} = 0$.

Předchozí důsledek budeme často potřebovat při výpočtu limit tzv. *exponenciálních výrazů* $f(x)^{g(x)}$ (volně řečeno, jde o výrazy typu „funkce na funkci“).

Přitom, jsou-li f a g dvě funkce, pak

$$f(x)^{g(x)} = \mathrm{e}^{g(x)\ln f(x)}, \qquad \text{je-li } f(x) > 0. \tag{6.2}$$

Pro limitu pak platí

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \mathrm{e}^{g(x)\ln f(x)}.$$

Dále stačí určit limitu výrazu v exponentu, tj. $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\ln f(x)$, a využít důsledek 6.51.

Příklad 6.52. Vypočtěte limitu $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\ln x}$.

Řešení. Výraz v limitě nejprve musíme upravit.

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\ln x} = \lim_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{\ln x\cdot\ln x}.$$

Nyní určíme limitu výrazu v exponentu, tj.

$$\lim_{x\to 0^+} \ln x\cdot\ln x = (-\infty)\cdot(-\infty) = +\infty.$$

Pomocí důsledku 6.51 dostáváme

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\ln x} = \lim_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{\ln x\cdot\ln x} = +\infty.$$

▲

Limity, které jsme doposud počítali, byly většinou typu $\frac{0}{0}$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, $0\cdot\infty$ nebo $\infty-\infty$. Všechny tyto typy se dále naučíme řešit i jinak — pomocí l'Hospitalova pravidla.

Zbývá nám seznámit se s posledním typem limity „$\frac{1}{0}$“. S tímto typem limity se budeme dále setkávat poměrně často, věnujme mu tedy dostatečnou pozornost. Navíc — tento typ limity nelze řešit l'Hospitalovým pravidlem.

F) Věta o limitě typu „$\frac{1}{0}$“

Věta 6.53. *Nechť f je funkce a nechť existuje pravé prstencové okolí $\mathscr{P}^+(x_0)$ bodu $x_0\in\mathbb{R}^\star$ takové, že pro každé $x\in\mathscr{P}^+(x_0)$ platí $f(x)>0$ (resp. $f(x)<0$). Nechť $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=0$. Pak platí $\lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{1}{f(x)}=+\infty$ (resp. $-\infty$).*

Analogicky pro levé prstencové okolí.

Poznámka 6.54. Skutečnost obsažená v předchozí větě se někdy symbolicky zapisuje takto:

$$„\frac{1}{0^+} = +\infty“, \qquad „\frac{1}{0^-} = -\infty“.$$

Tuto větu využíváme především k výpočtu limit $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{g(x)}{f(x)}$, kde platí $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=k$, $k\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, a $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$. Výpočet zadané limity pak převedeme na výpočet jednostranných limit a využijeme větu 6.53

Příklad 6.55. Vypočtěte limity

a) $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x}{x-2}$, b) $\lim\limits_{x\to \pi^+} \dfrac{1}{\sin x}$, c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\operatorname{arctg} x}{\operatorname{arccotg} x}$.

Řešení. a) Limitu nejprve upravíme a pak použijeme větu 6.53.

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{x}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} x \cdot \lim_{x\to 2^+} \frac{1}{x-2}.$$

Označme $f(x) = x-2$. Pak $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+}(x-2) = 0$. Dále víme, že funkce f je v pravém prstencovém okolí bodu 2 kladná. Tedy podle věty 6.53 platí $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{1}{x-2} = +\infty$. Celkem tedy

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{x}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} x \cdot \lim_{x\to 2^+} \frac{1}{x-2} = 2\cdot(+\infty) = +\infty.$$

b) Budeme postupovat stejně jako v předchozím příkladě. Označme $f(x) = \sin x$. Pak $\lim\limits_{x\to\pi^+} f(x) = \lim\limits_{x\to\pi^+} \sin x = 0$. Dále víme, že funkce f je v dostatečně malém pravém prstencovém okolí bodu π záporná. Tedy podle věty 6.53 platí

$$\lim_{x\to\pi^+} \frac{1}{\sin x} = -\infty.$$

c) Limitu nejprve upravíme

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{\operatorname{arccotg} x} = \lim_{x\to\infty} \operatorname{arctg} x \cdot \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\operatorname{arccotg} x}.$$

Označme $f(x) = \operatorname{arccotg} x$. Pak $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{arccotg} x = 0$. Dále víme, že funkce f je v levém prstencovém okolí (jiné ani nelze uvažovat) bodu ∞ kladná. Tedy podle věty 6.53 platí

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{\operatorname{arccotg} x} = \lim_{x\to\infty} \operatorname{arctg} x \cdot \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\operatorname{arccotg} x} = \frac{\pi}{2}(+\infty) = +\infty.$$

▲

Příklad 6.56. Existují-li následující limity, určete jejich hodnotu.

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x + 1}{\sin x}$, b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x + 1}{\cos x - 1}$, c) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^3}{(x+2)^2}$.

Řešení. a) Jedná se o limitu $\lim\limits_{x\to 0} \frac{g(x)}{f(x)}$, kde $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \lim\limits_{x\to 0}(\sin x + 1) = 1$ a $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \sin x = 0$. Abychom mohli použít větu 6.53, musíme vyšetřit zvlášť obě jednostranné limity:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x + 1}{\sin x} = \lim_{x\to 0^+}(\sin x + 1)\cdot \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sin x} = 1\cdot \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sin x} = +\infty,$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x + 1}{\sin x} = \lim_{x\to 0^-} (\sin x + 1) \cdot \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{\sin x} = 1 \cdot \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{\sin x} = -\infty.$$

Využili jsme toho, že $\lim\limits_{x\to 0^+} \sin x = \lim\limits_{x\to 0^-} \sin x = 0$ a že funkce f je v pravém prstencovém okolí bodu 0 kladná a v levém prstencovém okolí bodu 0 záporná.
Celkem tedy dostáváme, že zadaná limita neexistuje, neboť jednostranné limity se nerovnají.

b) Budeme postupovat obdobně jako v bodě a).

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x + 1}{\cos x - 1} = \lim_{x\to 0} (\cos x + 1) \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x - 1} = 2 \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x - 1}.$$

Abychom mohli použít větu 6.53, musíme vyšetřit zvlášť obě jednostranné limity. Označme $f(x) = \cos x - 1$. Pak

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{f(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\cos x - 1} = -\infty, \qquad \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{f(x)} = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{\cos x - 1} = -\infty,$$

neboť funkce f je v pravém i levém prstencovém okolí bodu 0 záporná.
Celkem tedy dostáváme, že zadaná limita existuje a platí

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x + 1}{\cos x - 1} = 2 \cdot (-\infty) = -\infty.$$

c) Limitu nejprve upravíme

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^3}{(x+2)^2} = \lim_{x\to -2} x^3 \cdot \lim_{x\to -2} \frac{1}{(x+2)^2} = (-2)^3 \cdot \lim_{x\to -2} \frac{1}{(x+2)^2}.$$

Označme $f(x) = (x+2)^2$. Platí, že $\lim\limits_{x\to -2} f(x) = 0$ a že funkce f je v každém prstencovém okolí bodu -2 kladná, tedy $\lim\limits_{x\to -2} \frac{1}{f(x)} = \lim\limits_{x\to -2} \frac{1}{(x+2)^2} = \infty$. Celkem

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^3}{(x+2)^2} = -8 \cdot \infty = -\infty.$$

▲

Příklady na spojitost funkce

Na závěr kapitoly si uveďme ještě několik příkladů týkajících se spojitosti funkce.

Příklad 6.57. Určete, zda jsou následující funkce spojité v bodě x_0.

a) $x_0 = 1,\ f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{pro } x \neq 1, \\ 3 & \text{pro } x = 1, \end{cases}$ b) $x_0 = 1,\ f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{pro } x \geqq 1, \\ 0 & \text{pro } x < 1, \end{cases}$

c) $x_0 = 2,\ f(x) = \dfrac{|x-2|}{x-2}.$

Řešení.

a) Připomeňme, že funkce f je spojitá v bodě x_0 právě tehdy, když existuje $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ a platí $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. Vypočtěme tedy příslušnou limitu.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to 1}(x+1) = 2.$$

Neboť $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 2$ a $f(1) = 3$, funkce f není spojitá v bodě 1.

b) Funkce f je definována jiným předpisem pro $x \geqq 1$ a jiným pro $x < 1$. Budeme proto vyšetřovat jednostranné limity.

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}(x-1) = 0; \qquad \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} 0 = 0.$$

Obě jednostranné limity existují a jsou si rovny, tedy $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 0$. Funkční hodnota $f(1) = 0$. Funkce f je tudíž v bodě 1 spojitá.

c) Funkce f není v bodě 2 definována, tedy není v tomto bodě spojitá.
Pro zajímavost uveďme ještě výpočet limity funkce f:

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{|x-2|}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{x-2}{x-2} = 1; \qquad \lim_{x\to 2^-} \frac{|x-2|}{x-2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{-x+2}{x-2} = -1.$$

Jednostranné limity se nerovnají, limita funkce f v bodě 2 tedy neexistuje. ▲

Příklad 6.58. Určete, ve kterých bodech nejsou následující funkce spojité, a je-li to možné, dodefinujte je tak, aby byly spojité na celém $\mathbb{R}$.

a) $f(x) = \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x}$, b) $g(x) = \dfrac{x^2 + x|3x-1|}{2x}$.

Řešení. a) Máme určit, ve kterých bodech není funkce f spojitá a zda je tato nespojitost odstranitelná nebo neodstranitelná. Jinými slovy, máme zjistit, zda lze funkci v bodech nespojitosti dodefinovat tak, že výsledná funkce bude spojitá všude.
Funkce f je elementární, a tedy spojitá ve všech vnitřních bodech svého definičního oboru. Není definována pro $x = 0$, budeme tedy zkoumat druh nespojitosti právě v bodě $x = 0$.
Nejprve vypočítáme $\lim\limits_{x\to 0^-} \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$ a $\lim\limits_{x\to 0^+} \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$ s využitím věty o limitě složené funkce. Víme, že $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$, z čehož plyne

$$\lim_{x\to 0^-} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \lim_{y\to -\infty} \operatorname{arctg} y = -\frac{\pi}{2}.$$

Dále víme, že $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$, a proto

$$\lim_{x\to 0^+} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \lim_{y\to \infty} \operatorname{arctg} y = \frac{\pi}{2}.$$

Protože $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ a $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ se nerovnají, funkce f nemá v nule limitu, a proto nelze dodefinovat funkční hodnotu $f(0)$ tak, aby platilo $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$. Nespojitost funkce f v bodě nula je tedy neodstranitelná. Bod $x = 0$ je bod nespojitosti 1. druhu.

b) Jedná se o elementární funkci, která není definována, a tudíž není spojitá v bodě $x = 0$. Vypočtěme limitu v tomto bodě.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 + x|3x-1|}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{x + |3x-1|}{2} = \frac{1}{2}.$$

Pokud tedy dodefinujeme $g(0) = \frac{1}{2}$, pak bude funkce g spojitá v celém $\mathbb{R}$. ▲

Pojmy k zapamatování

Σ

— limita funkce v bodě,
— jednostranná limita,
— spojitost funkce v bodě,
— spojitost funkce na intervalu.

Kontrolní otázky

?

1. Vysvětlete pojem limity funkce zprava (zleva) v bodě x_0 a souvislost těchto pojmů s existencí limity funkce v bodě x_0.
2. Nakreslete graf nějaké funkce, která má v bodě x_0
   a) vlastní limitu,
   b) různé limity zleva a zprava,
   c) pouze limitu zprava.
3. Pomocí vhodných obrázků vysvětlete pojmy
   a) nevlastní limita ve vlastním bodě,
   b) nevlastní limita v nevlastním bodě,
   c) vlastní limita ve vlastním bodě,
   d) vlastní limita v nevlastním bodě.
4. Vysvětlete vztah mezi spojitostí a limitou funkce v bodě x_0.
5. Jak využíváme spojitosti elementárních funkcí k výpočtu limit?
6. Jak počítáme limitu funkce $f(x)^{g(x)}$?
7. Jak postupujeme při výpočtu limity typu „$\frac{1}{0}$“?

Příklady k procvičení

1. Vypočítejte limity:

a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4x+1}{2x+1}$, b) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{1+\sin 2x}{1-\cos 4x}$,

c) $\lim\limits_{x\to 2} (x-1)\sin\dfrac{\pi x}{4}$, d) $\lim\limits_{x\to 4} \log(x^2-2x+2)$,

e) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin^4 x}{x}$, f) $\lim\limits_{x\to 1} x \operatorname{arctg} x$.

2. Vypočítejte limity:

a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-2}{x^2-3x+2}$, b) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{3x^2+11x+6}{x^3+27}$, c) $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\operatorname{tg} x}{\sin 2x}$,

d) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin x-\cos x}{\cos 2x}$, e) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2+x-2}{x^2+2x}$, f) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{3x^2+3x-6}{2x^2-2x-12}$,

g) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$, h) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1}$, i) $\lim\limits_{x\to 2} \left[\dfrac{1}{2-x}-\dfrac{x+10}{8-x^3}\right]$.

3. Vypočítejte limity:

a) $\lim\limits_{x\to 6} \dfrac{x-6}{\sqrt{x+3}-3}$, b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$, c) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3+1}{\sqrt{x^2-3x}+2x}$,

d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2-\sqrt{x+3}}{x^3-1}$, e) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x^2-4x-5}$, f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$.

4. Vypočítejte limity:

a) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^3+x}{x^4+3x^2+1}$, b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{3x^2+1}{5x^2-x+1}$, c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^4-x^2+2}{x^3-x^2+1}$,

d) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^4+3x-1}{2x^2+5}$, e) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^3-2x+1}{x^5-2x+2}$, f) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2x^3-2x^2+1}{5x^3+2x-1}$.

5. Vypočítejte limity:

a) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$, b) $\lim\limits_{x\to -\infty} (\sqrt{x^2+4}+x)$, c) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+3x}}{\sqrt[3]{x^3-2x^2}}$.

6. Vypočítejte limity:

a) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sin 5x}{2x}$, b) $\lim\limits_{x\to 0} x\cos\dfrac{1}{x}$, c) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\cos(4x-\pi)}{2x}$.

7. Vypočítejte limity:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 7x}{\sin 4x}$, b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x^2}{x\sin 3x}$, c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin x}{x}$.

8. Existují-li následující limity, určete jejich hodnotu.

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2-1}{x^2}$, b) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{2x}{x+1}$, c) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{4x+4}{x^2}-2\right)$, d) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-1}{x^2-2x}$,

e) $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{1}{1-x}$, f) $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{1}{1-x}$, g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(x+2)}{\operatorname{arctg} x}$, h) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x}{x^2-4}$.

9. Vypočtěte jednostranné limity:

a) $\lim\limits_{x\to 1^\pm} \dfrac{x^2-1}{x-1}$, b) $\lim\limits_{x\to -1^\pm} \dfrac{1}{x+1}$, c) $\lim\limits_{x\to 2^\pm} \dfrac{|x-2|}{x-2}$.

10. Vyšetřete spojitost funkce funkce f v bodě x_0:

a) $f\colon y = |x-2| + 3x - 1,\ x_0 = 2$, b) $f\colon y = \dfrac{x^3+x}{|x|},\ x_0 = 0$,

c) $f\colon y = \dfrac{x+1}{|x^3+1|} + 2x,\ x_0 = -1$, d) $f\colon y = \dfrac{|x+1|}{x^2-1},\ x_0 = -1$.

11. Určete body, v nichž funkce f není spojitá:

a) $f\colon y = \begin{cases} 4 & \text{pro } x < 0, \\ 0 & \text{pro } x \geqq 0, \end{cases}$ b) $f\colon y = \dfrac{1}{x+1}$, c) $f\colon y = \sin\dfrac{1}{x}$,

d) $f\colon y = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{pro } x < 0, \\ 0 & \text{pro } x \geqq 0, \end{cases}$ e) $f\colon y = \begin{cases} x+1 & \text{pro } x < 0, \\ x & \text{pro } x \geqq 0. \end{cases}$

Autotest

Právě jste dočetli kapitolu o limitách. Osvojili jste si pojmy limita, jednostranná limita a spojitost a naučili se počítat jednoduché typy limit. Zda-li se vám skutečně podařilo pochopit vše podstatné, to si ověříte následujícím autotestem.

V testu jsou zahrnuty jak otázky testového charakteru (výběr z předem daných možností), tak početní příklady. Přitom na každou otázku je správná právě jedna z uvedených odpovědí. Test není časově náročný — jeho vypracování by vám nemělo zabrat více než 30 minut.

1. Má-li funkce vlastní limitu v bodě x_0, $\left\{\begin{array}{l} \text{je} \\ \text{není} \\ \text{nemusí být} \end{array}\right\}$ v bodě x_0 definovaná.
2. Je-li funkce spojitá v bodě x_0, $\left\{\begin{array}{l} \text{je} \\ \text{není} \\ \text{nemusí být} \end{array}\right\}$ v bodě x_0 definovaná.
3. Je-li funkce f spojitá v bodě x_0, $\left\{\begin{array}{l} \text{existuje vlastní} \\ \text{existuje nevlastní} \\ \text{neexistuje} \end{array}\right\}$ limita $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.
4. Funkce má v daném bodě (nejvýše, právě, alespoň) jednu limitu.
5. Uveďte příklad funkce, která nemá v bodě $x_0 = 1$ limitu.

6. Uveďte příklad funkce, která má

   a) v nevlastním bodě $+\infty$ nevlastní limitu $+\infty$,
   b) ve vlastním bodě $x_0 = 0$ nevlastní limitu $+\infty$.

   Nakreslete příslušné obrázky.

7. Vypočtěte limity:

   a) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x-3}{x^2-8x+15}$, b) $\lim\limits_{x\to -\infty} (x^3 + x^2)$,

   c) $\lim\limits_{x\to \pm\infty} \dfrac{7x^3-3x^2+5}{4x^3+5}$, d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 7x}{\sin 2x}$.

8. Rozhodněte, zda existují zadané limity, a v případě, že ano, určete jejich hodnotu.

   a) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x}{x^3-27}$, b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-1}{x^2}$.

Výsledky autotestu naleznete v *Klíči k řešeným příkladům*. Máte-li vše správně, pak vám nelze než gratulovat. Tím, že jste zvládli pojem limity (tedy pochopili význam sledu tří kvantifikátorů), máte otevřené dveře diferenciálního a integrálního počtu. Nové pojmy, postupy a metody, které se tímto počtem naučíte, pak budete využívat ve fyzikálních a technických aplikacích. Pokud jste v některých otázkách neuspěli, vraťte se k příslušným definicím, větám a příkladům.

*****

Vědomosti jsou vskutku to, co vedle ctností pozdvihuje jednoho člověka nad druhého.

(J. Addison)

*****

Kapitola 7

Derivace

Průvodce studiem

Vše kolem nás je v neustálém pohybu. Mění se roční doby, počasí, zvířata se pohybují, rostliny rostou, lidé se rodí, dospívají, stárnou, umírají atd. S pohybem se setkáme všude, bez něj by život neexistoval.

Většina pohybů, ač se jeví chaoticky, má jakousi svou pravidelnost a svůj řád. Mělo by být tedy možno tento pohyb matematicky zkoumat. Lidstvu trvalo téměř 2000 let než byl nalezen způsob, jak matematicky zachytit pohyb — výsledkem byl diferenciální počet. Diferenciální a zároveň integrální počet vyvinuli v 17. století nezávisle na sobě dva matematici — Angličan Isaac Newton a Němec Gottfried Wilhelm Leibniz.

Diferenciálním počtem lze analyzovat pohyb a změnu. Jaký je vztah mezi pohybem a změnou? Základní operací diferenciálního počtu je proces nazvaný derivování. Jejím účelem je získat „rychlost změny“ nějaké měnící se veličiny. Hodnota, poloha nebo směr pohybu musí být popsány nějakou funkcí (analytickým výrazem, vzorcem). Derivováním této funkce vzniká nová funkce, která již udává hledanou „rychlost změny“. Stručně řečeno, derivování transformuje jednu funkci na druhou.

Uvažujme například pohybující se auto. Nechť proměnná s *označuje dráhu pohybu auta, která se mění v závislosti na čase* t *podle vztahu*

$$s = 4t^2 + 3t.$$

Jak dále uvidíme, derivací tohoto vztahu dostaneme výraz $8t + 3$*. Tento výraz udává „rychlost změny“ polohy auta neboli rychlost* v *auta v libovolném čase* t*, tj.*

$$v = 8t + 3.$$

Zderivujeme-li tento výraz znovu, získáme „rychlost změny“ rychlosti neboli zrychlení, tj.

$$a = 8.$$

Po tomto fyzikálním příkladě se ještě podívejme na geometrický model. Chceme stanovit „rychlost změny“ funkce, tj. poměr změny $f(x)$ ke změně x. V grafickém znázornění to znamená najít v daném bodě x sklon křivky (to, jak je křivka strmá), který je dán velikostí úhlu, jenž svírá tečna ke křivce v daném bodě s osou x. Číselně se tato velikost úhlu vyjadřuje jako směrnice tečny neboli tangens úhlu. Je jasné, že pokud funkce v daném bodě prudce roste, pak je směrnice tečny v tomto bodě velké kladné číslo. Naopak, pokud funkce v daném bodě prudce klesá, pak je směrnice tečny v tomto bodě velké záporné číslo. Vidíme tedy, že směrnice tečny k dané funkci v jejím libovolném bodě závisí na hodnotě x. Hodnoty směrnic tedy definují další funkci.

Proces přechodu od funkce f, jenž udává vztah mezi proměnnými x a y, k funkci g, jenž udává vztah mezi proměnnou x a směrnicí tečny funkce f v bodě x, se nazývá derivování. Hodnota $g(x)$ udává v každém bodě x sklon funkce f (směrnici její tečny). Takováto funkce g je derivací funkce f a označuje se f'.

Všimněme si, co vzniku diferenciálního počtu předcházelo. V 17. století byla v zásadě vytvořena úplná nauka o pohybu. Byly zkoumány dráhy pohybujících se a vržených těles, studovány pojmy rychlosti, zrychlení, dráhy a času. Sám I. Newton, který byl matematikem, fyzikem a astronomem, formuloval základní úlohy matematické analýzy takto:

1. *Ze znalosti dráhy pohybu hmotného bodu v každém okamžiku nalézt rychlost tohoto pohybu v určitém čase.*
2. *Ze znalosti rychlosti hmotného bodu v každém okamžiku určit dráhu, kterou tento bod urazí za určitý čas.*

Přitom první z těchto úloh je výpočtem derivace, druhá vede k výpočtu integrálu.

Nejenom nauka o pohybu byla motivací vzniku diferenciálního počtu. V matematice byla v 16. a 17. století věnována velká pozornost studiu křivek (spirály, řetězovky, cykloidy atd.). Byly studovány konstrukce tečen ke křivkám, obsahy úsečí, objemy a povrchy těles vzniklých rotací úsečí, těžiště těchto těles atd. Existovalo obrovské množství izolovaných, jednotlivých výsledků. Bylo třeba vytvořit teorii, která by tyto jednotlivosti sjednotila. A to se podařilo právě Newtonovi a Leibnizovi, jejichž teorie sjednotila proces hledání směrnic tečen (derivování) a výpočty ploch a objemů (integrování). Tito matematikové došli také k pozoruhodnému výsledku — derivování je v podstatě inverzní operací k integrování.

V této kapitole se seznámíte s derivacemi a naučíte se derivovat elementární funkce.

Cíle

Po prostudování této kapitoly budete schopni

- definovat pojem derivace,
- vysvětlit geometrický a fyzikální význam derivace,
- popsat souvislost mezi existencí derivace a spojitostí funkce,

- na konkrétních příkladech použít pravidla pro počítání s derivacemi,
- definovat derivace vyšších řádů,
- najít rovnici tečny a normály ke grafu funkce v daném bodě.

7.1 Definice derivace

Geometrický model

Již jsme naznačili, že geometricky je derivace funkce v daném bodě směrnicí tečny k této funkci sestrojené v tomto bodě. Pokusme se nyní směrnici tečny ke grafu funkce $f\colon\ y = f(x)$ v bodě $T = \big(x_0,\ f(x_0)\big)$ vyjádřit. Budeme postupovat následujícím způsobem — viz obr. 7.1:

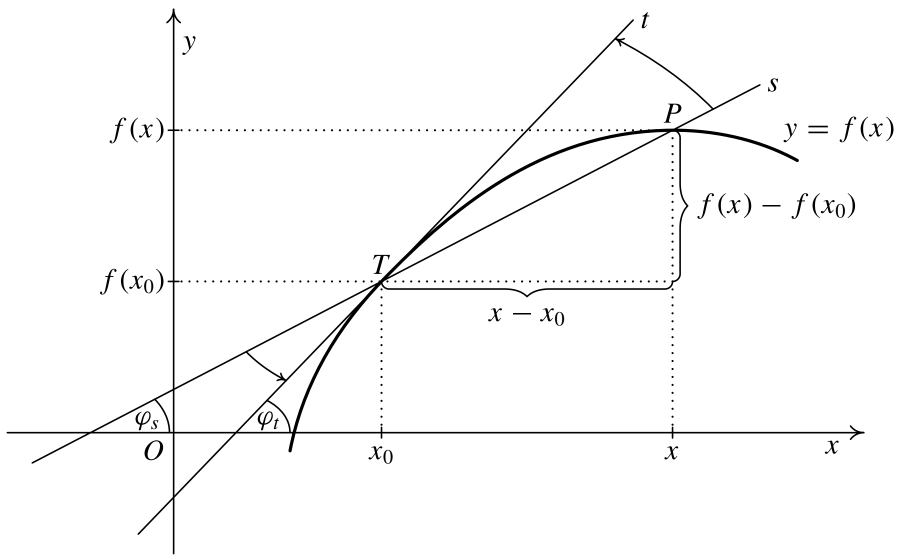
- Zvolíme bod $P = \big(x,\ f(x)\big)$ na grafu funkce.

- Sestrojíme sečnu s grafu funkce f určenou body T a P.

- Bod x budeme přibližovat k bodu x_0; odpovídající bod P se „bude pohybovat“ po grafu funkce f a přibližovat se k bodu T. Sečna s se přitom bude „pootáčet“ (bude pořád procházet body T a P).

- V okamžiku, kdy x splyne s x_0, tj. P splyne s T, přejde sečna s v přímku t, kterou nazýváme tečnou ke grafu funkce f v bodě T.

- Směrnice sečny pak přejde ve směrnici tečny.



Obr. 7.1

Vyjádříme tento postup početně.

Z analytické geometrie víme, že rovnice přímky ve směrnicovém tvaru, která je určena dvěma body (x_0, y_0) a (x_1, y_1), je

$$y_1 - y_0 = k(x_1 - x_0), \qquad \text{kde } k = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \text{ je směrnice přímky.}$$

Dále víme, že $k = \operatorname{tg} \varphi$, kde φ je úhel, který svírá příslušná přímka s kladnou částí osy x.

Označme k_s směrnici sečny a k_t směrnici tečny a φ_s a φ_t odpovídající úhly — viz obr. 7.1. Protože sečna s je určena dvěma body $T = \big(x_0, f(x_0)\big)$ a $P = \big(x, f(x)\big)$, platí, že

$$k_s = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Zajímá nás nyní směrnice tečny. Přibližujeme-li bod x k bodu x_0, přejde úhel φ_s v úhel φ_t, a směrnice sečny $k_s = \operatorname{tg} \varphi_s$ přejde ve směrnici tečny $k_t = \operatorname{tg} \varphi_t$.

Tedy

$$k_t = \lim_{x \to x_0} k_s = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Pokud tato limita bude existovat a bude konečná, bude mít význam směrnice k_t tečny t v bodě T.

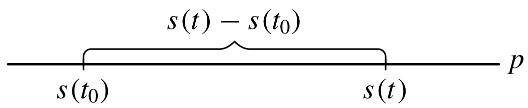
Poznámka 7.1.

1. Všimněte si, že limitu $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ nelze vypočítat prostým dosazením. Dostali bychom totiž limitu typu $\frac{0}{0}$.
2. Z předchozích úvah je zřejmé, že rovnice tečny v bodě T bude (při označení $f(x_0) = y_0$)

$$y - y_0 = k_t(x - x_0).$$

Mechanický model

Uvažujme hmotný bod, který se pohybuje po přímce p. Označme t čas a $s(t)$ polohu, v níž se bod v čase t nachází — viz obr. 7.2 (připouštíme, že bod se může i zastavit nebo vracet).



Obr. 7.2

Naším úkolem je určit okamžitou rychlost bodu v čase t_0. Myšlenka je následující.

- Zvolíme časový okamžik t (např. $t > t_0$) a budeme pro názornost předpokládat, že v intervalu $\langle t_0, t \rangle$ se bod pohybuje doprava.

- Průměrná rychlost za dobu $t - t_0$ (což je délka uvažovaného časového intervalu) je podle definice dráha, kterou bod v této době urazil, tj. $s(t) - s(t_0)$, dělená přírůstkem času $t - t_0$.

- Přibližováním okamžiku t k t_0, tj. zkracováním uvažovaného časového intervalu, přejde průměrná rychlost na časovém intervalu $\langle t_0, t\rangle$ v okamžitou rychlost v čase t_0.

Vyjádříme opět tento postup početně.

Označme v_t průměrnou rychlost v časovém intervale $\langle t_0, t\rangle$ a v_0 okamžitou rychlost v čase t_0. Dráha, kterou bod urazí za dobu $t - t_0$, je $s(t) - s(t_0)$. Pak platí

$$v_t = \frac{\text{dráha}}{\text{čas}} = \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}.$$

Tedy pro okamžitou rychlost dostaneme

$$v_0 = \lim_{t \to t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}.$$

Odhlédneme-li od označení (s místo f a t místo x), vidíme, že jsme u obou modelů dospěli k vyšetřování limity obdobného podílu. Vzhledem k důležitosti této limity zavádíme následující definici.

Definice 7.2. Nechť $x_0 \in D(f)$. Existuje-li limita

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

značíme ji $f'(x_0)$ a nazýváme *derivací funkce f v bodě x_0*.
Je-li $f'(x_0) \in \mathbb{R}$, pak říkáme, že *f má v bodě x_0 vlastní derivaci*.
Je-li $f'(x_0) = \pm\infty$, říkáme, že *funkce f má v bodě x_0 nevlastní derivaci*.

Definice 7.3. Nechť $x_0 \in D(f)$. Existuje-li limita $\lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, značíme ji $f'_+(x_0)$ a nazýváme *derivací zprava funkce f v bodě x_0*.
Existuje-li limita $\lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, značíme ji $f'_-(x_0)$ a nazýváme *derivací zleva funkce f v bodě x_0*.

Z vlastností limit (viz věta 6.13) plyne, že funkce f má derivaci v bodě x_0, právě když existují obě jednostranné derivace funkce f v bodě x_0 a jsou si rovny. Tedy

$$f'(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0).$$

Poznámka 7.4.

1. Jestliže má funkce f derivaci v bodě x_0, pak je nutně definovaná v nějakém okolí bodu x_0.
2. Označíme-li $x - x_0 = h$, pak x se blíží k x_0 právě tehdy, když h se blíží k nule. Dosadíme-li do vzorce definujícího derivaci za x výraz $x_0 + h$, vyjde
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$
Tento vztah se rovněž používá při definici derivace.
3. Označení derivace čárkou zavedl Lagrange[1]. Někdy se však pro označení derivace místo čárky používá tečka — např. píšeme $\dot{x}(t)$ (obzvláště jedná-li se o derivaci podle času).

Příklad 7.5. Užitím definice derivace zjistěte, zda existují derivace následujících funkcí daných předpisy

a) $f(x) = \sin x$, b) $f(x) = |\sin x|$, c) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

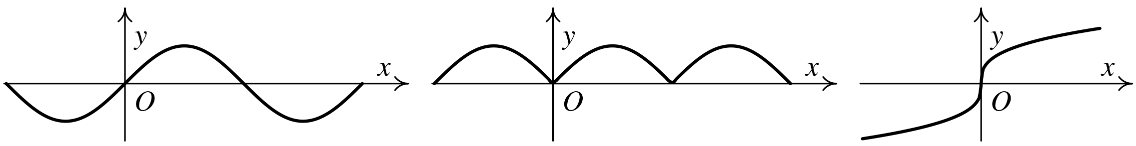
v bodě $x_0 = 0$.

Řešení.

a) Postupujme podle definice 7.2.
$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$
Derivace funkce $f(x) = \sin x$ v bodě nula tedy existuje a je rovna číslu 1. Zamysleme se nad geometrickým významem tohoto výsledku. Již víme, že derivace $f'(0)$ představuje směrnici tečny ke grafu funkce v bodě $(0, f(0))$. Směrnice je tangenta úhlu, který svírá tečna s kladnou částí osy x. Tangens je roven 1 pro úhel $\pi/4$. Tečna tedy svírá s osou x úhel $\pi/4$ — viz obr. 7.3 a).

b) Vypočtěme jednostranné derivace funkce $f(x) = |\sin x|$ v bodě 0.
$$f'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{|\sin x| - |\sin 0|}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{|\sin x|}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1,$$
$$f'_-(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{|\sin x| - |\sin 0|}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{|\sin x|}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-\sin x}{x} = -1.$$
Tedy $f'_+(0) \neq f'_-(0)$, a proto $f'(0)$ neexistuje. Graf funkce f má v tomto bodě jakýsi „hrot“, „špičku“. V takovém bodě nelze sestrojit tečnu — viz obr. 7.3 b).

[1] **Joseph Louis Lagrange** (1736–1813) (čti lagranž) — významný francouzský matematik a mechanik. Zabýval se mnoha oblastmi matematiky.



a) $f(x) = \sin x$ b) $f(x) = |\sin x|$ c) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

Obr. 7.3

c) Vypočtěme jednostranné derivace funkce f dané předpisem $f(x) = \sqrt[3]{x}$:

$$f'_{\pm}(0) = \lim_{x\to 0^{\pm}} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{0}}{x-0} = \lim_{x\to 0^{\pm}} \frac{\sqrt[3]{x} - 0}{x-0} = \lim_{x\to 0^{\pm}} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = +\infty.$$

Platí $f'_{+}(0) = f'_{-}(0) = +\infty$, a proto $f'(0)$ existuje a platí $f'(0) = +\infty$. Opět srovnejte výsledek s chováním grafu funkce — viz obr. 7.3 c). ▲

Příklad 7.6. Užitím definice derivace zjistěte, zda existují derivace následujících funkcí daných předpisy

a) $f(x) = x^4 + 1$, b) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$, c) $f(x) = \operatorname{sgn} x$

v bodě $x_0 = 0$.

Řešení.

a) Budeme postupovat obdobně jako v předchozím příkladě.

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{x^4 + 1 - (0^4 + 1)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x} = \lim_{x\to 0} x^3 = 0.$$

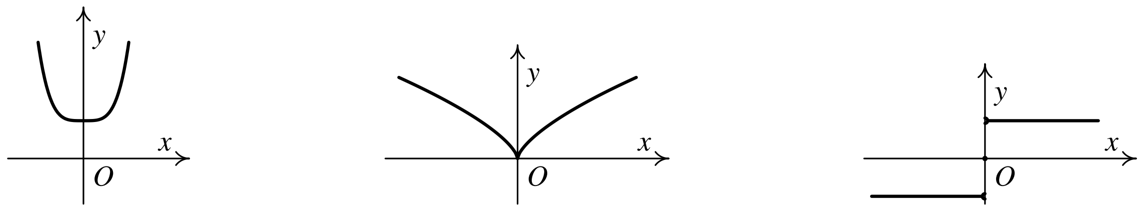
Derivace funkce f v bodě nula existuje a je rovna číslu 0. Opět se zamysleme nad geometrickým významem tohoto výsledku. Derivace $f'(0)$ představuje směrnici tečny ke grafu funkce v bodě $(0, f(0))$. Směrnice je tangenta úhlu, který svírá tečna s kladnou částí osy x. Tangens je roven 0 pro úhel 0. Tečna je tedy rovnoběžná s osou x — viz obr. 7.4 a).

b) Vypočtěme jednostranné derivace funkce f dané předpisem $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$:

$$f'_{+}(0) = \lim_{x\to 0^{+}} \frac{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{0^2}}{x-0} = \lim_{x\to 0^{+}} \frac{\sqrt[3]{x^2} - 0}{x-0} = \lim_{x\to 0^{+}} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = +\infty.$$

$$f'_{-}(0) = \lim_{x\to 0^{-}} \frac{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{0^2}}{x-0} = \lim_{x\to 0^{-}} \frac{\sqrt[3]{x^2} - 0}{x-0} = \lim_{x\to 0^{-}} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = -\infty.$$

Tedy $f'_{+}(0) \neq f'_{-}(0)$, a proto $f'(0)$ neexistuje. Z grafu funkce — viz obr. 7.4 b) — vidíme, že v tomto bodě nelze sestrojit tečnu. Graf má v tomto bodě „hrot“.



a) $f(x) = x^4 + 1$ b) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ c) $f(x) = \operatorname{sgn} x$

Obr. 7.4

c) Připomeňme, že funkci signum jsme definovali na str. 41.
Určeme opět jednostranné derivace:

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sgn} x - \operatorname{sgn} 0}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1-0}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty.$$

$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\operatorname{sgn} x - \operatorname{sgn} 0}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-1-0}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-1}{x} = (-1)\cdot \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} =$$
$$= -1\cdot(-\infty) = +\infty.$$

Platí $f'_+(0) = f'_-(0) = +\infty$, a proto $f'(0)$ existuje a platí: $f'(0) = +\infty$. Jedná se o funkci nespojitou v bodě 0. Jdeme-li po grafu funkce zleva doprava, pak „v bodě 0 musíme provést skok z -1 do 0 (směrem nahoru) a pak z 0 do 1 (opět směrem nahoru)“. Takto si u nespojité funkce můžeme představit geometrický význam nevlastních derivací $f'_+(0) = +\infty$ a $f'_-(0) = +\infty$ — viz obr. 7.4 c). ▲

Zkuste si nyní nakreslit graf nějaké nespojité funkce, která bude mít v bodě 0 derivaci zleva rovnu $-\infty$ a derivaci zprava rovnu $+\infty$.

Věta 7.7. *Má-li funkce f v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ vlastní derivaci, je v tomto bodě spojitá.*

Analogické tvrzení platí pro jednostranné derivace a jednostranné spojitosti.

Důkaz. Nechť $x_0 \in \mathbb{R}$. Předpokládejme, že funkce f má v bodě x_0 vlastní derivaci, tj. existuje $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = A$, $A \in \mathbb{R}$. Chceme ukázat, že funkce f je spojitá, tj. že $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. Pro $x \neq x_0$ platí

$$f(x) = f(x) - f(x_0) + f(x_0) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(x-x_0) + f(x_0).$$

Tedy

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(x-x_0) + f(x_0)\right] =$$
$$= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \cdot \lim_{x\to x_0}(x-x_0) + \lim_{x\to x_0} f(x_0) =$$
$$= A\cdot 0 + f(x_0) = 0 + f(x_0) = f(x_0).$$ □

Poznámka 7.8. Věta 7.7 je velmi důležitá. Dává do souvislosti derivaci funkce v bodě a spojitost funkce v bodě. Říká, že z existence vlastní derivace funkce f v bodě x_0 plyne spojitost funkce f v bodě x_0. Opačná implikace ale neplatí. Je-li funkce spojitá v daném bodě, nemusí mít v tomto bodě derivaci. Např. funkce $f\colon\ y = |\sin x|$, je spojitá v bodě $x = 0$, ale nemá v tomto bodě derivaci (viz příklad 7.5 b)), a tudíž ani tečnu. Také funkce $f\colon\ y = \sqrt[3]{x^2}$ je spojitá v bodě $x = 0$, ale nemá v tomto bodě derivaci (viz příklad 7.6 b)).

Shrneme-li naše dosavadní pozorování, dostáváme:

a) Má-li funkce v daném bodě vlastní derivaci, pak je v tomto bodě spojitá.
b) Má-li funkce v daném bodě nevlastní derivaci, pak v tomto bodě může být spojitá, ale nemusí. Například funkce signum (viz příklad 7.6 c)) má nevlastní derivaci a není spojitá v bodě 0 a naopak funkce $f\colon\ y = \sqrt[3]{x}$ (viz příklad 7.5 c)) má nevlastní derivaci a je spojitá v bodě 0.
c) Nemá-li funkce v daném bodě derivaci, pak může, ale nemusí být v tomto bodě spojitá. Příklady spojitých funkcí, nemajících derivaci jsou 7.5 b), 7.6 b).

Na předchozích příkladech vidíme, že předpoklad vlastní derivace je ve větě 7.7 podstatný. Nevlastní derivace nezaručuje spojitost.

Je zajímavé si uvědomit, že ve větě 7.7 stačí předpokládat existenci vlastních jednostranných derivací $f'_+(x_0)$, $f'_-(x_0)$ a funkce f bude v bodě x_0 spojitá. Poznamenejme, že tyto jednostranné derivace mohou být různé, derivace $f'(x_0)$ tedy nemusí existovat, a přesto je f v bodě x_0 spojitá (např. funkce absolutní hodnota). Zhruba řečeno, obě vlastní jednostranné derivace dávají obě jednostranné spojitosti, a tedy spojitost.

Doposud jsme mluvili o derivaci funkce v jednom bodě x_0. Tato derivace je nějaké číslo. Jestliže má f derivaci v každém bodě definičního oboru (popř. nějaké jeho části), dostáváme novou funkci f' definovanou takto:

Definice 7.9. Nechť existuje vlastní derivace $f'(x)$ funkce f pro všechna $x \in M$, kde $M \subset D(f)$. Pak funkci $f'\colon\ y = f'(x)$, $x \in M$, nazýváme *derivací funkce f na M*.

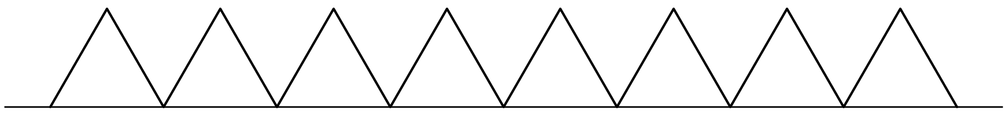
Obdobně definujeme i f'_+, f'_-.
Uvědomme si, že, je-li $M = \langle a, b\rangle$, pak musí platit

- $\forall x \in (a, b)\colon\ f'(x) \in \mathbb{R}$,
- $f'_+(a) \in \mathbb{R}$,
- $f'_-(b) \in \mathbb{R}$.

Úmluva: Nebude-li dále řečeno jinak, budeme pod pojmem *derivace* rozumět *vlastní derivaci*.

Pro zájemce:

S jistou nepřesností lze říci, že graf funkce, která má v každém bodě vlastní derivaci, je bez „hrotů“ (říkáme, že taková funkce je *hladká*). V bodech, kde má graf funkce „hroty“, nemá funkce vlastní derivaci.

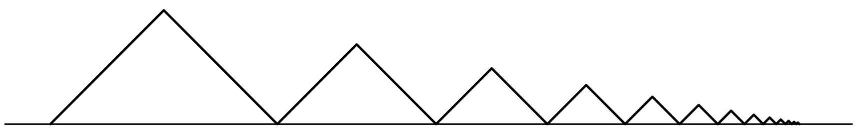


Obr. 7.5

Často se říká, že funkce spojitá v každém bodě intervalu je v podstatě taková, jejíž graf lze nakreslit jedním tahem. Ve skutečnosti je situace podstatně složitější. Ruka, kterou graf kreslíme, není nehmotná, a má tudíž jistou setrvačnost. To, že se pohybuje, znamená, že má nějakou okamžitou rychlost. Tedy, jak víme z části o mechanickém modelu derivace, funkce udávající její polohu (jejíž graf vlastně kreslíme) má derivaci. Setrvačnost způsobuje, že během pohybu ruky nemůžeme z ničeho nic zahnout a vytvořit hrot.

Abychom vytvořili hrot, musíme ruku zastavit. Můžeme tak vytvořit lomenou čáru, která je spojitá a má konečně mnoho bodů, v nichž neexistuje tečna, tj. derivace. Dokonce si můžeme představit, že vlevo i vpravo pokračujeme do nekonečna, takže výsledkem by byla lomená čára mající takových hrotů nekonečně mnoho — viz obr. 7.5.

Předchozí funkce (obr. 7.5) byla definovaná na intervalu $(-\infty, +\infty)$. Ale i na ohraničeném intervalu si lze snadno představit spojitou funkci, která nemá derivaci v nekonečně mnoha bodech, jak ukazuje obrázek 7.6.



Obr. 7.6

V obou předchozích příkladech byly body, v nichž neexistovala derivace, spíše výjimečné. Ve „většině“ bodů byly uvedené funkce nejen spojité, ale měly i derivaci. Vzhledem k fyzikálním vlastnostem reálné ruky můžeme nakreslit pouze právě takové funkce. Jsou to tedy funkce nejen spojité ale mající až na konečný počet výjimečných bodů i derivaci.

Již v 19. století si matematikové položili otázku, zda by spojitá funkce mohla mít i více bodů, v nichž neexistuje derivace, než ve výše uvedených příkladech. Původní domněnka byla, že ne. Jaké ale bylo zděšení, když v r. 1875 Weierstrass[1] sestrojil příklad funkce spojité na intervalu, která neměla derivaci v žádném bodě! Významný představitel klasické matematické analýzy Hermite[2] napsal v dopise svému příteli Stieltjesovi[3] (viz [24]): *„S hrůzou se odvracím od tohoto*

---

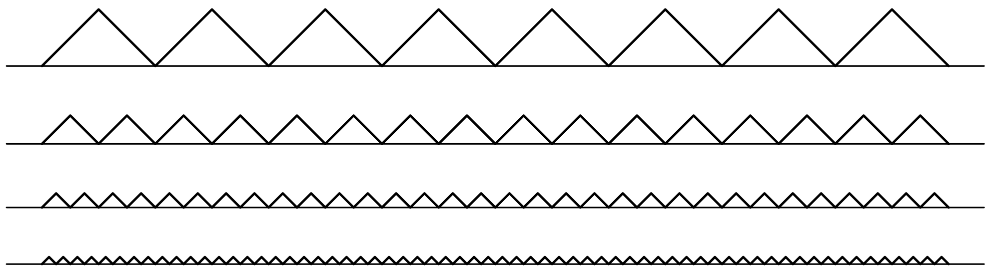
[1]**Karl Theodor Wilhelm Weierstrass** (1815–1897) (čti vajerštras) — vynikající německý matematik. Zabýval se především matematickou analýzou a lineární algebrou.

[2]**Charles Hermite** (1822–1901) (čti ermit) — francouzský matematik. Zabýval se eliptickými funkcemi, matematickou analýzou, algebrou a teorií čísel.

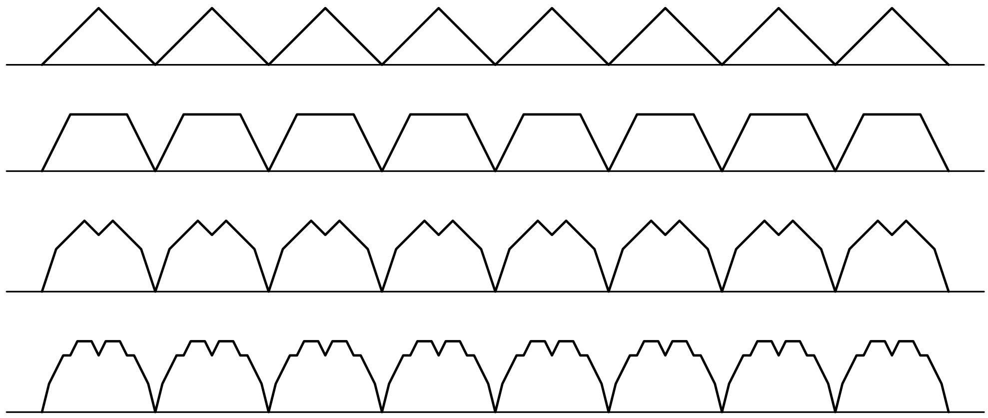
[3]**Thomas Jean Stieltjes** (1856–1894) — holandský matematik a astronom. Zabýval se matematickou analýzou a zejména teorií určitého integrálu.

politováníhodného vředu na těle spojitých funkcí — od funkce, která nemá derivaci ani v jediném bodě.“

Pokusme se popsat, jak se taková funkce, jež Hermita tolik rozhořčila, zkonstruuje. Weierstrass, jehož příklad je příliš komplikovaný, ve skutečnosti nebyl první. Již dříve (před r. 1830) sestrojil jednodušší příklad Bolzano[1]. Jeho postup byl zhruba následující (ve skutečnosti byl jeho příklad složitější). Představme si nekonečnou posloupnost funkcí, jejichž grafy jsou lomené čáry na obr. 7.7. Nyní sečteme první dvě tyto funkce, pak tři atd. Dostaneme výsledky na obr. 7.8. Jeden oblouk součtu sedmi těchto funkcí je znázorněn (ve větším měřítku) na obr. 7.9. Lze přesně dokázat, že když postup provedeme nekonečněkrát, dostaneme spojitou funkci, která nemá derivaci v žádném bodě, tj. má v každém bodě „hrot“. Z předchozích úvah vyplývá, že takovou spojitou funkci nelze nakreslit.



Obr. 7.7

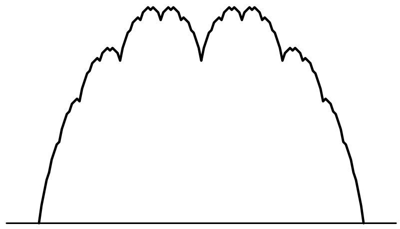


Obr. 7.8

Naskýtá se otázka, k čemu takové funkce jsou. Známý učenec Poincaré[2] napsal (viz [24]): *„Dříve bylo hledání nových funkcí vyvoláno nějakým praktickým cílem, nějakým účelem. Nyní*

[1] **Bernard Bolzano** (1781–1848) — český matematik, filosof a teolog. Náš největší matematik 19. století. Působil na Karlově univerzitě jako profesor náboženství. Své matematické výsledky vesměs nepublikoval. Dnes je mu přiznávána v řadě věcí priorita, ale jeho výsledky bohužel neovlivnily další vývoj a byly vesměs později znovuobjeveny.

[2] **Henri Poincaré** (1854–1912) (čti puenkare) — vynikající francouzský matematik, fyzik, astronom a filosof. Významně ovlivnil řadu disciplín. Zabýval se teorií čísel, algebrou, množinovou a algebraickou topologií, diferenciálními rovnicemi, matematickou fyzikou, nebeskou mechanikou a základy matematiky. Napsal přes 1000 prací.



Obr. 7.9

se však funkce vynalézají výhradně proto, aby byla odhalena nedostatečnost úsudků našich otců; kromě tohoto důsledku žádný jiný z nich nelze vyvodit.“ Avšak další vývoj ukázal, že tentokrát se mýlil. Jistě víte, co je to Brownův pohyb (pohyb částic, např. pylových zrnek, vlivem nárazů molekul). V r. 1920 Wiener[1] ukázal, že pohyb brownovské částice, která je tak malá, že její setrvačnost můžeme zanedbat, se děje po spojité křivce nemající nikde tečnu. Tyto tzv. *Wienerovy procesy* hrají mimořádně důležitou roli v teorii stochastických procesů, které mají rozsáhlé aplikace v řadě oborů (fyzika, elektrotechnika, ekonomie apod.).

7.2 Pravidla pro počítání s derivacemi

Abychom mohli derivace úspěšně používat, je nutné se naučit derivovat základní elementární funkce, pomocí nichž pak zderivujeme ostatní elementární funkce. Uvedeme si postupně čtrnáct základních vzorců, které je nezbytné umět zpaměti vzhledem k dalšímu častému použití.

$$\boxed{1} \qquad (c)' = 0,\ c \in \mathbb{R} \text{ (konst.)},\ x \in \mathbb{R}, \tag{7.1}$$

$$\boxed{2} \qquad (x^r)' = r \cdot x^{r-1},\ r \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^+, \tag{7.2}$$

$$\boxed{3} \qquad (\sin x)' = \cos x,\ x \in \mathbb{R}, \tag{7.3}$$

$$\boxed{4} \qquad (\cos x)' = -\sin x,\ x \in \mathbb{R}, \tag{7.4}$$

$$\boxed{5} \qquad (\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x,\ x \in \mathbb{R}. \tag{7.5}$$

Poznámka 7.10.

1. Zdůrazněme, že ve vztahu (7.1) je c reálná konstanta a x je proměnná. Čteme: derivace konstanty je nula.
2. Obecně vzorec (7.2) platí pro každé $x \in \mathbb{R}^+$, ale pro některé hodnoty r je definiční obor širší — viz definice mocninné funkce na str. 73. Například:

$$(x^5)' = 5x^4, x \in \mathbb{R}, \quad (x^{-4})' = -4x^{-5}, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad (x^{\frac{1}{2}})' = \tfrac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}, x \in \langle 0, \infty)$$

apod. Uvědomte si, že pomocí tohoto vzorce se derivují i všechny odmocniny.

[1]**Norbert Wiener** (1894–1964) (čti viner) — významný americký matematik, zakladatel kybernetiky. Zabýval se abstraktním integrálem, funkcionální analýzou, stochastickými procesy a kvantovou teorií.

Příklad 7.11. Pomocí definice derivace odvoďte vztahy (7.1) pro derivaci konstantní funkce a (7.3) pro derivaci funkce sinus.

Řešení.

a) Odvoďme nejprve vztah (7.1) pro derivaci konstantní funkce. Označme $f(x) = c$. Pak dostáváme

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{c - c}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} 0 = 0.$$

b) Označme $f(x) = \sin x$. Pak

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x\to x_0} \frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{2\sin\frac{x-x_0}{2}\cos\frac{x+x_0}{2}}{x - x_0} = \\ &= \lim_{x\to x_0} \frac{\sin\frac{x-x_0}{2}}{\frac{x-x_0}{2}} \cdot \lim_{x\to x_0} \cos\frac{x+x_0}{2} = \\ &= \lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y} \cdot \lim_{x\to x_0} \cos\frac{x+x_0}{2} = 1 \cdot \cos x_0 = \cos x_0. \end{aligned}$$ ▲

Příklad 7.12. Vypočtěte f', je-li f dána předpisem:

a) $f(x) = x$, b) $f(x) = x^2$, c) $f(x) = \sqrt{x}$,

d) $f(x) = \dfrac{1}{x} = x^{-1}$, e) $f(x) = \sqrt[4]{x^7}$.

Řešení.

a) $f'(x) = (x)' = (x^1)' = 1x^{1-1} = x^0 = 1, \ x \in \mathbb{R}$.

b) $f'(x) = (x^2)' = 2x^{2-1} = 2x, \ x \in \mathbb{R}$.

c) $f'(x) = \left(\sqrt{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \dfrac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}, \ x \in \mathbb{R}^+$.

d) $f'(x) = (x^{-1})' = -1x^{-1-1} = -x^{-2} = -\dfrac{1}{x^2}, \ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

e) $f'(x) = \left(x^{\frac{7}{4}}\right)' = \dfrac{7}{4}x^{\frac{7}{4}-1} = \dfrac{7}{4}x^{\frac{3}{4}} = \dfrac{7}{4}\sqrt[4]{x^3}, \ x \in \mathbb{R}^+$. ▲

Následující věta dává návod, jak spočítat derivaci součtu, rozdílu, součinu a podílu funkcí f a g, známe-li derivace těchto funkcí. Připomeňme, že derivací rozumíme vlastní derivaci.

Věta 7.13. *Nechť existují derivace funkcí f a g v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$. Pak také funkce $f \pm g$, fg, $\dfrac{f}{g}$ a cf, kde $c \in \mathbb{R}$ je konstanta, mají v bodě x_0 derivaci a platí:*

i) $$(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0), \tag{7.6}$$

ii) $$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0), \tag{7.7}$$

iii) $$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)} \qquad \textit{pro } g(x_0) \neq 0, \tag{7.8}$$

iv) $$(cf)'(x_0) = cf'(x_0). \tag{7.9}$$

Důkaz. V důkazu (i) použijeme definici derivace (7.2), definici součtu funkcí (3.20) a pravidla pro počítání s limitami (věta 6.17):

$$\begin{aligned}
(f+g)'(x_0) &= \lim_{x\to x_0} \frac{\big(f+g\big)(x) - \big(f+g\big)(x_0)}{x - x_0} = \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{\big(f(x)+g(x)\big) - \big(f(x_0)+g(x_0)\big)}{x - x_0} = \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x\to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + g'(x_0).
\end{aligned}$$

Důkaz vzorce pro rozdíl je analogický. Pro derivaci součinu — vztah (ii) — dostaneme

$$\begin{aligned}
(f\cdot g)'(x_0) &= \lim_{x\to x_0} \frac{(fg)(x) - (fg)(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x)}{x - x_0} = \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{\big(f(x) - f(x_0)\big)g(x) + f(x_0)\big(g(x) - g(x_0)\big)}{x - x_0} = \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \lim_{x\to x_0} g(x) + f(x_0) \lim_{x\to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \\
&= f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).
\end{aligned}$$

Konečně pro derivaci podílu — vztah (iii) — platí

$$\begin{aligned}
\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) &= \lim_{x\to x_0} \frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x) - \left(\frac{f}{g}\right)(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{x - x_0} = \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{g(x)g(x_0)(x - x_0)} = \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x_0) - f(x_0)g(x_0)}{g(x)g(x_0)(x - x_0)} =
\end{aligned}$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{\big(f(x) - f(x_0)\big)g(x_0) - f(x_0)\big(g(x) - g(x_0)\big)}{g(x)g(x_0)(x - x_0)} =$$

$$= \frac{1}{g(x_0)g(x_0)}\left[\lim_{x\to x_0} \frac{g(x_0)(f(x) - f(x_0))}{x - x_0} - \lim_{x\to x_0} \frac{f(x_0)(g(x) - g(x_0))}{x - x_0}\right] =$$

$$= \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}\,.$$

Vztah (iv) nemusíme dokazovat, neboť se jedná o speciální případ vztahu (ii). □

Poznámka 7.14.

1. Mají-li funkce f, g na množině $M \subset D(f)$ derivace f', g', pak na M platí:

   i) $(f \pm g)' = f' \pm g'$, ii) $(fg)' = f'g + fg'$,

   iii) $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$, iv) $(cf)' = cf'$.

   Pro zapamatování je vhodné číst vzorce takto:

   i) „derivace součtu je součet derivací“ a „derivace rozdílu je rozdíl derivací“,
   ii) „derivace součinu je první derivovaná krát druhá nederivovaná plus první nederivovaná krát druhá derivovaná“,
   iii) „derivace podílu je derivovaný čitatel krát nederivovaný jmenovatel minus nederivovaný čitatel krát derivovaný jmenovatel děleno jmenovatel na druhou“,
   iv) multiplikativní konstantu (tj. konstantu, kterou se násobí) vytkneme.

2. V konkrétních příkladech často používáme místo správného zápisu $f'(x)$ ne příliš korektní označení $(f(x))'$.

Příklad 7.15. Vypočtěte f', je-li f dána předpisem:

a) $f(x) = x^3 + 2x - \sin x + 2$, b) $f(x) = -2\cos x + 4\mathrm{e}^x + \frac{1}{3}x^7$, c) $f(x) = x\mathrm{e}^x$,

d) $f(x) = x^2 \cos x$, e) $f(x) = \dfrac{3x - 2}{x^2 + 1}$, f) $f(x) = \operatorname{tg} x$.

Řešení. S využitím věty 7.13 dostáváme:

a) $$f'(x) = (x^3 + 2x - \sin x + 2)' = (x^3)' + (2x)' - (\sin x)' + (2)' =$$
$$= 3x^{3-1} + 2(x)' - \cos x + 0 = 3x^2 + 2 - \cos x.$$

b) $$f'(x) = \left(-2\cos x + 4\mathrm{e}^x + \frac{1}{3}x^7\right)' = (-2\cos x)' + (4\mathrm{e}^x)' + \left(\frac{1}{3}x^7\right)' =$$
$$= -2(\cos x)' + 4(\mathrm{e}^x)' + \frac{1}{3}(x^7)' = -2(-\sin x) + 4\mathrm{e}^x + \frac{1}{3}\cdot 7x^{7-1} =$$
$$= 2\sin x + 4\mathrm{e}^x + \frac{7}{3}x^6.$$

c) $$f'(x) = (x\mathrm{e}^x)' = (x)'\mathrm{e}^x + x(\mathrm{e}^x)' = 1\mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x.$$

d) $f'(x) = (x^2\cos x)' = (x^2)'\cos x + x^2(\cos x)' = 2x^{2-1}\cos x + x^2(-\sin x) =$
$= 2x\cos x - x^2\sin x.$

e) $$f'(x) = \left(\frac{3x-2}{x^2+1}\right)' = \frac{(3x-2)'(x^2+1)-(3x-2)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} =$$
$$= \frac{(3\cdot 1-0)(x^2+1)-(3x-2)(2x+0)}{(x^2+1)^2} = \frac{3x^2+3-6x^2+4x}{(x^2+1)^2} =$$
$$= \frac{-3x^2+4x+3}{(x^2+1)^2}.$$

f) $$f'(x) = (\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} =$$
$$= \frac{\cos x\cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$ ▲

Podobně jako v f) předchozího příkladu se odvodí i vzorec pro derivaci funkce $\operatorname{cotg} x$. Tedy platí

$$\boxed{6} \qquad (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \qquad x \in \mathbb{R} \smallsetminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}, \tag{7.10}$$

$$\boxed{7} \qquad (\operatorname{cotg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}, \qquad x \in \mathbb{R} \smallsetminus \{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}. \tag{7.11}$$

Poznámka 7.16.

1. Často je třeba spočítat derivaci součinu tří a více funkcí. To lze udělat vícenásobným použitím vzorce pro derivaci součinu. Např. jsou-li f, g a h funkce mající derivaci, pak (vynecháme pro stručnost x) je

   $$(fgh)' = (fg)'h + fg(h)' = (f'g + fg')h + fgh' = f'gh + fg'h + fgh'.$$

   Např. je-li $f\colon\ y = xe^x\sin x$, pak

   $$f'(x) = (x)'e^x\sin x + x(e^x)'\sin x + xe^x(\sin x)' = e^x\sin x + xe^x\sin x + xe^x\cos x.$$

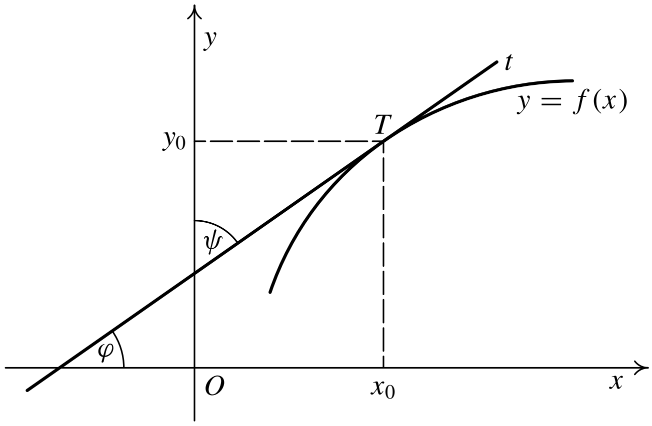
   Obdobný vzorec platí pro derivaci součinu čtyř a více funkcí. Například

   $$(fghk)' = f'ghk + fg'hk + fgh'k + fghk'.$$

   Předchozí vztahy pro derivace součinu tří a více funkcí je dobré si zapamatovat, neboť hodně urychlí počítání.
2. Je-li c konstanta, pak $(ce^x)' = c(e^x)' = ce^x$, tedy funkce ce^x je rovna své derivaci. Lze dokázat, že funkce ce^x jsou jediné funkce s touto vlastností.

Derivace inverzní funkce

Dále si všimněme výpočtu derivace inverzní funkce pomocí derivace funkce původní. To nám umožní např. spočítat derivace logaritmických a cyklometrických funkcí. Vyjdeme z obrázku 7.10. Nechť $f\colon\ y = f(x)$ je daná funkce a $f^{-1}\colon\ x = f^{-1}(y)$ inverzní funkce k funkci f (bez přeznačení proměnných). V tom případě je graf f a f^{-1} tvořen týmiž body v rovině, tedy i tečny ke grafům funkcí f a f^{-1} sestrojené v bodě $T = (x_0, y_0)$ jsou totožné.



Obr. 7.10

Derivace je, jak víme, směrnice tečny, tj. hodnota tangens jistého úhlu. Pro funkci $f\colon\ y = f(x)$ je to úhel φ, který svírá tečna s kladnou částí osy x (nezávisle proměnná je x) a pro funkci $f^{-1}\colon\ x = f^{-1}(y)$ je to úhel ψ, který svírá tečna s kladnou částí osy y (nezávisle proměnná je y) — viz obr. 7.10. Je zřejmé, že pro $f'(x_0) \neq 0$ je $f'(x_0) = \operatorname{tg}\varphi$ a $(f^{-1})'(y_0) = \operatorname{tg}\psi$. Protože $\varphi + \psi = \frac{\pi}{2}$, platí

$$(f^{-1})'(x_0) = \operatorname{tg}\psi = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \operatorname{cotg}\varphi = \frac{1}{\operatorname{tg}\varphi} = \frac{1}{f'(x_0)}\,.$$

Platí tedy následující věta (předchozí geometrické zdůvodnění není samozřejmě její důkaz, ten je obtížnější).

Věta 7.17. *Nechť funkce $f\colon\ x = f(y)$ je spojitá a ryze monotónní na intervalu I. Nechť y_0 je vnitřní bod intervalu I a nechť má f v y_0 derivaci $f'(y_0)$. Pak inverzní funkce $f^{-1}\colon\ y = f^{-1}(x)$ má v bodě $x_0 = f(y_0)$ derivaci a platí*

$$(f^{-1})'(x_0) = \begin{cases} \dfrac{1}{f'(y_0)}, & \text{je-li } f'(y_0) \neq 0,\\ +\infty, & \text{je-li } f'(y_0) = 0 \text{ a funkce } f \text{ je na } I \text{ rostoucí},\\ -\infty, & \text{je-li } f'(y_0) = 0 \text{ a funkce } f \text{ je na } I \text{ klesající}.\end{cases}$$

Obdobné tvrzení platí i pro jednostranné derivace.

Příklad 7.18. Vypočtěte derivaci funkce f dané předpisem:

a) $f(x) = \ln x$, b) $f(x) = \arcsin x$.

Řešení.

a) Uvažujme funkci $f: x = \mathrm{e}^y$ a inverzní funkci $f^{-1}: y = \ln x$. Podle předchozí věty je

$$(f^{-1})'(x) = (\ln x)' = \frac{1}{(\mathrm{e}^y)'} = \frac{1}{\mathrm{e}^y} = \frac{1}{x}, \qquad x > 0.$$

b) Uvažujme funkci $f: x = \sin y$, $y \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$ a inverzní funkci $f^{-1}: y = \arcsin x$, kde $x \in \langle -1, 1 \rangle$. Podle předchozí věty je

$$(f^{-1})'(x) = (\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y}.$$

Protože na intervalu $\left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$ je $\cos y \geqq 0$ a tedy $|\cos y| = \cos y$, je

$$\cos y = |\cos y| = \sqrt{\cos^2 y} = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2},$$

a tedy

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},$$

avšak pouze pro $x \in (-1, 1)$ (v krajních bodech existují nevlastní jednostranné derivace $+\infty$ podle věty 7.17). ▲

Obdobně se odvodí i zbývající vzorce z následující pětice.

$$\boxed{8} \qquad (\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad x \in \mathbb{R}^+, \tag{7.12}$$

$$\boxed{9} \qquad (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad x \in (-1, 1), \tag{7.13}$$

$$\boxed{10} \qquad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad x \in (-1, 1), \tag{7.14}$$

$$\boxed{11} \qquad (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{x^2 + 1}, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{7.15}$$

$$\boxed{12} \qquad (\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{x^2 + 1}, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{7.16}$$

Příklad 7.19. Vypočtěte derivaci funkce f dané předpisem $f(x) = \dfrac{x \ln x}{\arcsin x + \operatorname{arctg} x}$.

Řešení. Nejprve musíme použít vzorec pro derivaci podílu. Dostaneme

$$f'(x) = \frac{(x \ln x)'(\arcsin x + \operatorname{arctg} x) - x \ln x (\arcsin x + \operatorname{arctg} x)'}{(\arcsin x + \operatorname{arctg} x)^2}.$$

Výraz $x \ln x$ budeme derivovat jako součin, výraz $\arcsin x + \operatorname{arctg} x$ jako součet. Vyjde

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{[(x)' \ln x + x(\ln x)'](\arcsin x + \operatorname{arctg} x) - x \ln x[(\arcsin x)' + (\operatorname{arctg} x)']}{(\arcsin x + \operatorname{arctg} x)^2} = \\
&= \frac{\left(1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}\right)(\arcsin x + \operatorname{arctg} x) - x \ln x \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{x^2+1}\right)}{(\arcsin x + \operatorname{arctg} x)^2} = \\
&= \frac{(\ln x + 1)(\arcsin x + \operatorname{arctg} x) - x \ln x \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{x^2+1}\right)}{(\arcsin x + \operatorname{arctg} x)^2}.
\end{aligned}
$$

▲

Derivace složené funkce

Věta 7.20. *Uvažujme složenou funkci $F = f \circ g$. Předpokládejme, že existuje derivace funkce g v bodě x_0 a derivace funkce f v bodě $u_0 = g(x_0)$. Pak i složená funkce F má derivaci v bodě x_0 a platí*

$$F'(x_0) = (f \circ g)'(x_0) = f'(u_0) \cdot g'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0).$$

Příklad 7.21. Vypočtěte derivaci funkce F dané předpisem:

a) $F(x) = (3x^2 - 2x + 1)^{10}$, b) $F(x) = \sin 3x$, c) $F(x) = \ln \sin x$,

d) $F(x) = \sqrt{4 - x^2}$, e) $F(x) = a^x$, $a > 0, a \neq 1$.

Řešení.

a) Vnější složka je $f(u) = u^{10}$, vnitřní složka je $u = g(x) = 3x^2 - 2x + 1$.
Derivace vnější složky $f'(u) = (u^{10})' = 10u^9$ ($'$ znamená derivaci podle u).
Derivace vnitřní složky $g'(x) = (3x^2 - 2x + 1)' = 6x - 2$ ($'$ znamená derivaci podle x).
Výsledek: $F'(x) = 10(3x^2 - 2x + 1)^9(6x - 2)$ ($'$ znamená derivaci podle x).

b) Vnější složka je $f(u) = \sin u$, vnitřní složka je $u = g(x) = 3x$.
Derivace vnější složky $f'(u) = (\sin u)' = \cos u$.
Derivace vnitřní složky $g'(x) = (3x)' = 3$.
Výsledek: $F'(x) = \cos 3x \cdot 3 = 3 \cos 3x$ (tento zápis je vhodnější).

c) Vnější složka je $f(u) = \ln u$, vnitřní složka je $u = g(x) = \sin x$.
Derivace vnější složky $f'(u) = (\ln u)' = \dfrac{1}{u}$.
Derivace vnitřní složky $g'(x) = (\sin x)' = \cos x$.
Výsledek: $F'(x) = \dfrac{1}{\sin x} \cdot \cos x = \operatorname{cotg} x$.

d) Vnější složka je $f(u) = \sqrt{u}$, vnitřní složka je $u = g(x) = 4 - x^2$.
Derivace vnější složky $f'(u) = \left(\sqrt{u}\right)' = \left(u^{\frac{1}{2}}\right)' = \dfrac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{u}}$.

Derivace vnitřní složky $g'(x) = (4 - x^2)' = -2x$.

Výsledek: $F'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{4-x^2}} \cdot (-2x) = \dfrac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$.

e) Využijeme vztahu mezi exponenciální funkcí o základu a a o základu e, tj. $a^x = \mathrm{e}^{x \ln a}$. Přitom složená funkce $F(x) = \mathrm{e}^{x \ln a}$ má vnější složku $f(u) = \mathrm{e}^u$ a vnitřní složku $u = g(x) = x \ln a$, kde $\ln a$ je konstanta.
Derivace vnější složky $f'(u) = (\mathrm{e}^u)' = \mathrm{e}^u$.
Derivace vnitřní složky $g'(x) = (x \ln a)' = 1 \cdot \ln a = \ln a$.
Výsledek je: $(a^x)' = \mathrm{e}^{x \ln a} \ln a = a^x \ln a$. ▲

Tedy pomocí derivace složené funkce obdržíme předposlední vzorec našeho přehledu derivací elementárních funkcí.

$$\boxed{13} \qquad (a^x)' = a^x \ln a, \ a > 0, \ a \neq 1, \ x \in \mathbb{R}. \tag{7.17}$$

Zbývá odvodit vzorec pro derivaci obecné logaritmické funkce $f(x) = \log_a x$, kde $a > 0, \ a \neq 1$. Protože $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$, dostáváme okamžitě

$$f'(x) = \frac{1}{\ln a} \cdot (\ln x)' = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x}.$$

$$\boxed{14} \qquad (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, \ a > 0, \ a \neq 1, \ x \in \mathbb{R}^+. \tag{7.18}$$

Vzorec pro derivování složené funkce nevylučuje, že vnitřní složka g je složená funkce. Pak můžeme snadno derivovat i vícenásobně složené funkce. Například pro trojnásobně složenou funkci $F = f \circ g \circ h$ dostáváme

$$F'(x_0) = (f \circ g \circ h)'(x_0) = f'(g(h(x_0))) \cdot g'(h(x_0)) \cdot h'(x_0).$$

Příklad 7.22. Vypočtěte derivaci funkce F dané předpisem:

a) $F(x) = \sqrt{\sin 3x}$, b) $F(x) = \ln\big(x - 2 + \sqrt{x^2 - 4x + 2}\big)$,

c) $F(x) = \sin\big(\sin(\sin x)\big)$.

Řešení.

a) Vnější složka je $f(u) = \sqrt{u}$, vnitřní složka je $g(x) = \sin 3x$, což je opět složená funkce.
Derivace vnější složky $f'(u) = \left(\sqrt{u}\right)' = \left(u^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{u}}$.
Dílčí výsledek: $F'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{\sin 3x}} \cdot (\sin 3x)'$.
Protože $(\sin 3x)' = 3\cos 3x$ — viz předchozí příklad b) — je

$$F'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\sin 3x}} \cdot 3\cos 3x = \frac{3\cos 3x}{2\sqrt{\sin 3x}}.$$

b) Vnější složka je $f(u) = \ln u$, vnitřní složka je $g(x) = x - 2 + \sqrt{x^2 - 4x + 2}$. Vnitřní složka má tvar součtu a navíc jeden její sčítanec $\sqrt{x^2 - 4x + 2}$ je znovu složená funkce.
Derivace vnější složky $f'(u) = (\ln u)' = \dfrac{1}{u}$.
Derivace vnitřní složky

$$
\begin{aligned}
g'(x) &= \left(x - 2 + \sqrt{x^2 - 4x + 2}\right)' = 1 - 0 + \left[(x^2 - 4x + 2)^{\frac{1}{2}}\right]' = \\
&= 1 + \frac{1}{2}(x^2 - 4x + 2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (x^2 - 4x + 2)' = \\
&= 1 + \frac{x - 2}{\sqrt{x^2 - 4x + 2}} = \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 2} + x - 2}{\sqrt{x^2 - 4x + 2}}.
\end{aligned}
$$

Celkový výsledek je pak

$$
F'(x) = \frac{1}{x - 2 + \sqrt{x^2 - 4x + 2}} \cdot \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 2} + x - 2}{\sqrt{x^2 - 4x + 2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4x + 2}}.
$$

c) Budeme již postupovat rychleji

$$
\begin{aligned}
F'(x) &= \cos\big(\sin(\sin x)\big) \cdot (\sin(\sin x))' = \cos\big(\sin(\sin x)\big) \cdot \cos(\sin x) \cdot (\sin x)' = \\
&= \cos\big(\sin(\sin x)\big) \cdot \cos(\sin x) \cdot \cos x.
\end{aligned}
$$

▲

Poznámka 7.23.
Je třeba důsledně rozlišovat zápisy

$f(x) = \sin x^2$, což je složená funkce s vnější složkou $\sin u$ a vnitřní složkou x^2, a

$f(x) = \sin^2 x$, což je složená funkce s vnější složkou u^2 a vnitřní složkou $\sin x$ (vlastně je to zkrácený zápis pro $(\sin x)^2$).

Pro derivaci pak dostáváme

$$
(\sin x^2)' = (\cos x^2) \cdot 2x = 2x \cos x^2
$$

a

$$
(\sin^2 x)' = 2 \sin x \cdot \cos x.
$$

Podobně máme $\operatorname{tg} x^2$ a $\operatorname{tg}^2 x$, $\ln x^2$ a $\ln^2 x$ atd.

Příklad 7.24. Derivujte a upravte

$$
f(x) = x \arcsin \sqrt{\frac{x}{x + 1}} + \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \sqrt{x}.
$$

Řešení. Označme

$$f_1(x) = x \arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}, \quad f_2(x) = \operatorname{arctg}\sqrt{x}, \quad f_3(x) = \sqrt{x}.$$

Při derivaci jednotlivých funkcí použijeme věty o derivaci součinu a podílu funkcí a o derivaci složené funkce.

$$\begin{aligned}
f_1'(x) &= \arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}} + x\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x}{x+1}}}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x+1}{x}}\cdot\frac{x+1-x}{(x+1)^2} = \\
&= \arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}} + \frac{\sqrt{x}}{2(x+1)}.\\
f_2'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}(x+1)}.\\
f_3'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}}.
\end{aligned}$$

Protože $f'(x) = f_1'(x) + f_2'(x) - f_3'(x)$, dostáváme

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}} + \frac{\sqrt{x}}{2(x+1)} + \frac{1}{2\sqrt{x}(x+1)} - \frac{1}{2\sqrt{x}} = \\
&= \arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}} + \frac{x+1-(x+1)}{2\sqrt{x}(x+1)} = \arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}.
\end{aligned}$$

▲

Derivace funkcí tvaru $f(x)^{g(x)}$

Derivujeme-li „funkci na funkci“ $f(x)^{g(x)}$, nelze přímo použít ani vzorec $(x^n)' = nx^{n-1}$ (proměnná je jen v základu), ani vzorec $(a^x)' = a^x \ln a$ (proměnná je jen v exponentu). Musíme použít již známého vztahu

$$f(x)^{g(x)} = \mathrm{e}^{g(x)\ln f(x)}.$$

Funkci $f(x)^{g(x)}$ budeme tedy derivovat jako složenou funkci $\mathrm{e}^{g(x)\ln f(x)}$, tj.

$$\begin{aligned}
\left[f(x)^{g(x)}\right]' &= \left[\mathrm{e}^{g(x)\ln f(x)}\right]' = \mathrm{e}^{g(x)\ln f(x)}[g(x)\ln f(x)]' = \\
&= f(x)^{g(x)}\cdot\left[g'(x)\ln f(x) + \frac{g(x)}{f(x)}f'(x)\right], \quad x\in D(f)\cap D(g), \quad f(x)>0.
\end{aligned}$$

Příklad 7.25. Vypočtěte derivaci funkce f dané předpisem:

a) $f(x) = x^x$, b) $f(x) = (\sin x)^{\cos x}$.

Řešení.

a) Využijeme vztahu $x^x = \mathrm{e}^{x\cdot\ln x}$. Pak derivace

$$f'(x) = \left(\mathrm{e}^{x\cdot\ln x}\right)' = \mathrm{e}^{x\cdot\ln x}\cdot\left(1\cdot\ln x + x\,\frac{1}{x}\right) = x^x(\ln x + 1).$$

b) Nejprve funkci upravíme

$$f(x) = (\sin x)^{\cos x} = \mathrm{e}^{\cos x\cdot\ln(\sin x)}.$$

Derivace je pak

$$\begin{aligned} f'(x) &= \mathrm{e}^{\cos x\cdot\ln(\sin x)}\cdot(\cos x\cdot\ln(\sin x))' = \\ &= \mathrm{e}^{\cos x\cdot\ln(\sin x)}\cdot\left(-\sin x\ln(\sin x) + \cos x\,\frac{1}{\sin x}\cos x\right) = \\ &= (\sin x)^{\cos x}\left(-\sin x\ln(\sin x) + \frac{\cos^2 x}{\sin x}\right). \end{aligned}$$

▲

Poznámka 7.26.
Všimněte si, že funkce $f(x) = x^x$ z předchozího příkladu neobyčejně prudce roste a nabývá brzy doslova „astronomických“ hodnot. Např. $f(1) = 1^1 = 1$, $f(2) = 2^2 = 4$, $f(3) = 3^3 = 27$, $f(10) = 10^{10} = 10\,000\,000\,000$, $f(100) = 100^{100}$, což je číslo tvaru „jednička a 200 nul“ (viz také str. 80).

Dříve než přejdeme k dalším kapitolám, shrňme si přehledně derivace základních elementárních funkcí, s kterými jsme se postupně seznámili.

$\boxed{1}$ $(c)' = 0,\ c \in \mathbb{R}$ (konst.), $x \in \mathbb{R}$,

$\boxed{2}$ $(x^r)' = r\cdot x^{r-1},\ r \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^+$,

$\boxed{3}$ $(\sin x)' = \cos x,\ x \in \mathbb{R}$,

$\boxed{4}$ $(\cos x)' = -\sin x,\ x \in \mathbb{R}$,

$\boxed{5}$ $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x,\ x \in \mathbb{R}$,

$\boxed{6}$ $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x},\quad x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$,

$\boxed{7}$ $(\operatorname{cotg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x},\quad x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$,

$\boxed{8}$ $(\ln x)' = \dfrac{1}{x},\quad x \in \mathbb{R}^+$,

$\boxed{9}$ $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}},\quad x \in (-1, 1)$,

$\boxed{10}$ $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}},\quad x \in (-1, 1)$,

$$\boxed{11} \qquad (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{x^2+1}, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\boxed{12} \qquad (\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{x^2+1}, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\boxed{13} \qquad (a^x)' = a^x \ln a, \ a > 0, \ a \neq 1, \ x \in \mathbb{R},$$

$$\boxed{14} \qquad (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, \ a > 0, \ a \neq 1, \ x \in \mathbb{R}^+.$$

Je třeba si uvědomit, že známe-li derivace základních elementárních funkcí a pravidla pro derivování, pak umíme derivovat každou elementární funkci. Při výpočtu derivací je však třeba mít určitý cvik, který se získává propočítáváním velkého množství příkladů. Bezpodmínečným předpokladem je však znalost základních vzorců. Při jejich učení není účelné se vázat na proměnnou x. Je třeba vědět, že $(x^2)' = 2x$, $(s^2)' = 2s$, $(t^2)' = 2t$ atd. Derivujeme podle příslušné proměnné.

Vhodné je také učit se slovně vzorce bez proměnné, tj. např. „derivace sinu je kosinus“, „derivace kosinu je minus sinus“, „derivace přirozeného logaritmu je jedna lomeno argument“ atd.

V příkladech doposud uvedených jsme se zaměřovali pouze na výpočet derivace funkce a nezabývali jsme se definičními obory derivací. Správně bychom měli u každého příkladu určit definiční obor funkce f i derivace f'. Při určování $D(f')$ nesmíme zapomenout na to, že $D(f') \subset D(f)$. Derivováním transformujeme funkci f na funkci f'. Tato výsledná funkce může být tedy definována buď na množině stejné jako původní funkce, nebo na množině „užší“ než původní funkce.

Příklad 7.27. Vypočtěte f' a určete $D(f)$ a $D(f')$, je-li funkce f zadána předpisem

$$f(x) = \operatorname{arctg} x + \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,.$$

Řešení.

a) Určíme definiční obor funkce f:

$$\begin{aligned} D(f) &= \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{1+x}{1-x} > 0 \right\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R} : [(1+x > 0 \wedge 1-x > 0) \vee (1+x < 0 \wedge 1-x < 0)]\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x \in (-1,1)\} = (-1,1)\,. \end{aligned}$$

b) Derivujeme:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}} \frac{1}{2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}} \frac{1\,(1-x) - (1+x)\,(-1)}{(1-x)^2} = \\ &= \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{2}\frac{1-x}{1+x}\frac{2}{(1-x)^2} = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1-x^2} = \frac{2}{1-x^4}\,. \end{aligned}$$

c) Z bodů a), b) ihned plyne, že

$$D(f') = (-1, 1)\ .$$

Všimněte si přitom, že definiční obor funkce $g(x) = \frac{2}{1-x^4}$ je $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$. ▲

Příklad 7.28. Vypočtěte derivaci funkce f dané předpisem: $f(x) = \ln\big(\ln \sin x\big)$.

Řešení. Definiční obor zadané funkce je prázdná množina (funkce není definována pro žádné $x \in \mathbb{R}$). Tedy nemá derivaci v žádném bodě. ▲

7.3 Derivace vyšších řádů

Uvedli jsme již, že má-li funkce f první derivaci v každém bodě definičního oboru (popř. na nějaké jeho podmnožině), dostáváme novou funkci f'. Tato nová funkce může mít v některém bodě x_0 opět derivaci, tj. může existovat $(f')'$ v bodě x_0. Toto číslo nazýváme *druhá derivace* funkce f v bodě x_0 a značíme $f''(x_0)$. Tedy

$$f''(x_0) = (f')'(x_0).$$

Pokud f'' opět existuje v každém bodě definičního oboru (popř. v každém bodě nějaké podmnožiny definičního oboru), dostáváme novou funkci f'' — druhou derivaci funkce f. Tu můžeme opět derivovat (pokud to lze) a dostáváme *třetí derivaci* v bodě x_0,

$$f'''(x_0) = (f'')'(x_0)$$

atd. Pro $n \geqq 4$ již nepoužíváme pro označení derivace čárku — bylo by to příliš nepřehledné. Píšeme tedy f', f'', f''', $f^{(4)}$, $f^{(5)}$ atd. Přitom závorky nelze vynechat — f^3 je třetí mocnina funkce f zatímco $f^{(3)}$ je třetí derivace funkce f.

Definice 7.29. Nechť $n \in \mathbb{N}$. Potom *n-tou derivací* (nebo *derivací n-tého řádu*) *funkce f* rozumíme funkci, kterou označujeme $f^{(n)}$ a definujeme rovností

$$f^{(n)} = (f^{(n-1)})',$$

přičemž $f^{(0)} = f$.

Tedy n-tá derivace je derivací $(n-1)$-ní derivace. Pokud umíme počítat první derivace, výpočet vyšších derivací nepřináší žádné problémy. Výsledek prostě vždy opět zderivujeme. Např. třetí derivaci musíme spočítat tak, že vypočítáme nejprve první a druhou derivaci (neumíme „přímo“ vypočítat třetí derivaci). Geometrického a fyzikálního významu druhé derivace si všimneme později v oddílu 9.3.

Příklad 7.30. Vypočtěte pátou derivaci $f^{(5)}$ funkce f dané předpisem:

$$f(x) = 2x^4 - 4x^3 + 3x^2 - x + 1.$$

Řešení. Postupně dostaneme

$$f'(x) = 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1, \qquad f^{(4)}(x) = 48,$$
$$f''(x) = 24x^2 - 24x + 6, \qquad f^{(5)}(x) = 0.$$
$$f'''(x) = 48x - 24,$$

▲

Příklad 7.31. Vypočtěte druhou derivaci f'' funkce f dané předpisem:

$$f(x) = x^2 \sin\sqrt{x}.$$

Řešení. Funkce má tvar součinu a druhý činitel je složená funkce.

$$f'(x) = \left(x^2 \sin\sqrt{x}\right)' = (x^2)' \sin\sqrt{x} + x^2\left(\sin\sqrt{x}\right)'.$$

Přitom

$$\left(\sin\sqrt{x}\right)' = \cos\sqrt{x}\left(\sqrt{x}\right)' = \cos\sqrt{x}(x^{\frac{1}{2}})' = \cos\sqrt{x} \cdot \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}.$$

Tedy

$$f'(x) = 2x \sin\sqrt{x} + x^2 \cdot \frac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} = 2x \sin\sqrt{x} + \frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}} \cos\sqrt{x}.$$

Získanou derivaci budeme dále derivovat. Má tvar součtu a každý sčítanec má tvar součinu. Dostaneme

$$f''(x) = (f')'(x) = \left(2x \sin\sqrt{x}\right)' + \left(\frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}} \cos\sqrt{x}\right)' =$$
$$= (2x)' \sin\sqrt{x} + 2x\left(\sin\sqrt{x}\right)' + \left(\frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}}\right)' \cos\sqrt{x} + \frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}}\left(\cos\sqrt{x}\right)'.$$

Protože

$$\left(\cos\sqrt{x}\right)' = -\sin\sqrt{x}\left(\sqrt{x}\right)' = -\sin\sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = -\frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$$

a derivaci $\left(\sin\sqrt{x}\right)'$ již máme spočítanou, můžeme psát

$$f''(x) = 2\sin\sqrt{x} + 2x \cdot \frac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} \cos\sqrt{x} + \frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}}\left(-\frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\right) =$$
$$= 2\sin\sqrt{x} + \sqrt{x}\cos\sqrt{x} + \frac{3}{4}\sqrt{x}\cos\sqrt{x} - \frac{1}{4}x \sin\sqrt{x} =$$
$$= 2\sin\sqrt{x} + \frac{7}{4}\sqrt{x}\cos\sqrt{x} - \frac{1}{4}x \sin\sqrt{x}.$$

▲

Poznámka 7.32.

1. Počítáme-li derivace vyšších řádů funkce f, je vhodné výrazy pro f', f'' atd. před dalším derivováním upravit a co nejvíce zjednodušit (aby se nám snáze derivovalo).
2. Všimněme si obecně derivace polynomu. V příkladu 7.30 jsme zjistili, že pátá derivace polynomu stupně čtyři je nula. Obecně platí, je-li P polynom stupně n, pak $(n+1)$-ní a všechny vyšší derivace jsou identicky nulové (tj. jsou rovny nule v každém bodě).
3. Připomeňme, že má-li funkce f n-tou derivaci, $n > 1$, má i všechny nižší derivace, speciálně tedy existuje f', což podle věty 7.7 znamená, že f je spojitá. Zdůrazněme přitom, že mluvíme o vlastních, tj. konečných, derivacích.
4. Platí: $D(f^{(n)}) \subset D(f^{(n-1)}) \subset \cdots \subset D(f') \subset D(f)$.

7.4 Tečna a normála

Na závěr kapitoly o derivacích si uvedeme příklady na nalezení rovnice tečny. Předpokládejme dále, že existuje vlastní derivace funkce f v bodě $(x_0, f(x_0))$.

Definice 7.33. Přímka t o rovnici

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

se nazývá *tečna ke grafu funkce f v dotykovém bodě $T = (x_0, f(x_0))$*.
Přímka n, která prochází bodem T a je kolmá k tečně t, se nazývá *normála ke grafu funkce f v bodě T*.

Ze střední školy víme, že má-li přímka směrnici $k \neq 0$, má přímka k ní kolmá směrnici $-\frac{1}{k}$. Tedy, má-li tečna t ke grafu funkce f sestrojená v dotykovém bodě $T = (x_0, y_0)$ (viz obr. 7.11 a)) rovnici

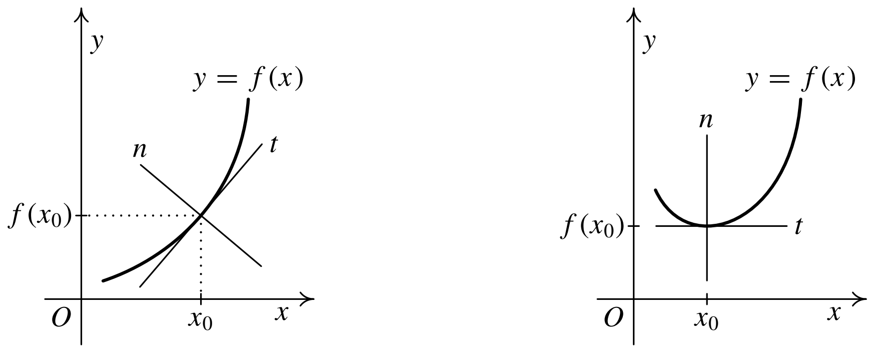
$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0), \qquad \text{kde } y_0 = f(x_0),$$

pak normála n má rovnici

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0), \qquad \text{pokud } f'(x_0) \neq 0.$$

Je-li $f'(x_0) = 0$, má tečna rovnici $y = y_0$ a je rovnoběžná s osou x. Normála je pak rovnoběžná s osou y a má rovnici $x = x_0$ (takové přímky nemají směrnicový tvar) — viz obr. 7.11 b).

Poznámka 7.34. Všimněte si, že připouštíme-li pouze vlastní derivaci $f'(x_0)$, pak není tečna nikdy rovnoběžná s osou y.



a) $f'(x_0) \neq 0$, b) $f'(x_0) = 0$

Obr. 7.11: Tečna a normála ke grafu funkce

Příklad 7.35. Najděte rovnici tečny a normály ke grafu funkce f dané předpisem:

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 11}$$

v dotykovém bodě $T = (2, ?)$.

Řešení. Nejprve určíme $f(x_0)$. Protože bod T leží na grafu funkce f, dostáváme

$$y_0 = f(x_0) = f(2) = \sqrt{4 - 6 + 11} = \sqrt{9} = 3.$$

Dále najdeme směrnici tečny $k_t = f'(2)$. Vypočteme (derivujeme jako složenou funkci)

$$f'(x) = \left[(x^2 - 3x + 11)^{\frac{1}{2}}\right]' = \frac{1}{2}(x^2 - 3x + 11)^{-\frac{1}{2}}(2x - 3)$$

a dosadíme $x = 2$. Dostaneme

$$f'(2) = \frac{1}{2}(4 - 6 + 11)^{-\frac{1}{2}}(4 - 3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{9}} \cdot 1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

Rovnice tečny tedy je $y - 3 = \frac{1}{6}(x - 2)$, tj.

$$t\colon\ y = \frac{x}{6} + \frac{8}{3}.$$

Nyní určíme směrnici normály:

$$k_n = -\frac{1}{k_t} \qquad \Longrightarrow \qquad k_n = \frac{1}{-\frac{1}{6}} = -6.$$

Rovnice normály n pak je $y - 3 = -6(x - 2)$, tj.

$$n\colon\ y = -6x + 15.$$

▲

Příklad 7.36. Napište rovnici tečny a normály ke grafu funkce g dané předpisem

$$g(x) = x \ln(1 + x^2) + 3$$

v dotykovém bodě $T = (0, ?)$.

Řešení. Nejprve vypočteme $g(x_0)$. Vyjde

$$y_0 = g(x_0) = g(0) = 0 \cdot \ln(1 + 0) + 3 = 0 \cdot \ln 1 + 3 = 0 \cdot 0 + 3 = 3.$$

Dále vypočteme derivaci $g'(x)$ (použijeme postupně pravidla pro derivaci součtu, součinu a složené funkce). Dostaneme

$$\begin{aligned} g'(x) &= (x)' \ln(1 + x^2) + x\big(\ln(1 + x^2)\big)' + (3)' = \\ &= 1 \cdot \ln(1 + x^2) + x \cdot \frac{1}{1 + x^2} \cdot (1 + x^2)' + 0 = \ln(1 + x^2) + \frac{2x^2}{1 + x^2}. \end{aligned}$$

Určíme směrnici tečny $k_t = g'(0)$. Vyjde

$$k_t = g'(0) = \ln(1 + 0) + \frac{2 \cdot 0^2}{2 + 0^2} = \ln 1 + 0 = 0.$$

Rovnice tečny t je $y - 3 = 0(x - 0)$, tj.

$$t\colon\ y = 3.$$

Normála tedy nemá směrnicový tvar a její rovnice je obecně $x = x_0$, je-li dotykový bod $(x_0, f(x_0))$. V našem případě je proto normála $n\colon\ x = 0$. ▲

Příklad 7.37. Najděte rovnice tečen ke grafu funkce $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$, které jsou kolmé k přímce $p\colon\ 2x - y = 0$.

Řešení. Rovnici přímky p upravíme na směrnicový tvar $p\colon\ y = 2x$, odkud vidíme, že směrnice přímky $k_p = 2$. Hledaná tečna má být na tuto přímku kolmá, tedy pro její směrnici platí $k_t = -1/2$.

Abychom našli tečnu ke grafu funkce f, je třeba nejprve najít bod dotyku $T = (x_0, y_0)$. K tomu využijeme faktu, že směrnice tečny je rovna první derivaci funkce f v bodě x_0. Určeme derivaci zadané funkce

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{-1}{1 + x^2}, \qquad \forall x \in \mathbb{R} \smallsetminus \{0\}.$$

Vzhledem k tomu, že $k_t = f'(x_0) = -1/2$, dostáváme rovnici

$$\frac{-1}{1 + x_0^2} = -\frac{1}{2},$$

jejímž vyřešením dostaneme $x_0 = \pm 1$. Vidíme tedy, že body dotyku jsou následující (y-ovou souřadnici vypočteme dosazením do zadané funkce)

$$T_1 = \left(1, \frac{\pi}{4}\right), \qquad T_1 = \left(-1, -\frac{\pi}{4}\right).$$

Rovnice tečen, které jsou kolmé na přímku p mají rovnice

$$t_1\colon\ y - \frac{\pi}{4} = -\frac{1}{2}(x-1) \qquad \Longrightarrow \qquad y = -\frac{x}{2} + \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4},$$

$$t_2\colon\ y + \frac{\pi}{4} = -\frac{1}{2}(x+1) \qquad \Longrightarrow \qquad y = -\frac{x}{2} - \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}.$$

▲

Příklad 7.38. Zjistěte, zda existuje tečna ke grafu funkce f dané předpisem

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \leqq 0, \\ \sin x, & x > 0 \end{cases}$$

v dotykovém bodě o x-ové souřadnici $x_0 = 0$. Pokud ano, najděte její rovnici a rovnici normály.

Řešení. Pokud hledáme tečnu, musíme nejprve zjistit, zda existuje derivace funkce f v hledaném bodě a zda je vlastní. Pokusme se tedy najít derivaci. Funkce je v pravém okolí bodu 0 definována jiným předpisem než v levém okolí bodu 0. Budeme proto postupovat podle definice.

Nejprve vypočteme derivaci zleva v bodě nula:

$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x - 0}{x - 0} = 1.$$

Nyní vypočteme derivaci zprava v bodě nula:

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x - 0}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

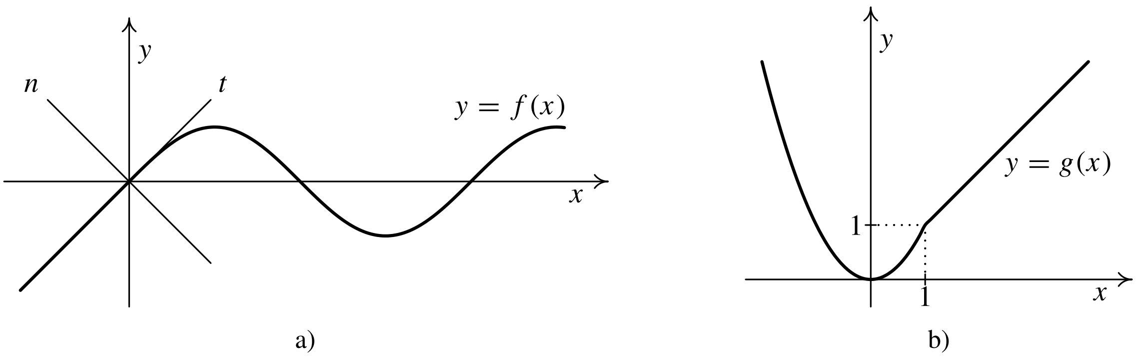
Vyšlo nám, že derivace zleva se rovná derivaci zprava, tudíž existuje derivace a je rovna $f'(0) = 1$. Tedy tečna t existuje a její rovnice je $y - f(0) = f'(0)(x - 0)$, tj.

$$t\colon\ y = x.$$

Směrnice tečny $k_t = 1$, tedy směrnice normály $k_n = -1/k_t = -1$, takže pro rovnici normály n dostaneme $y - f(0) = -(x - 0)$, tj.

$$n\colon\ y = -x.$$

Graf viz obr. 7.12 a). ▲



Obr. 7.12

Příklad 7.39. Zjistěte, zda existuje tečna ke grafu funkce g dané předpisem

$$g(x) = \begin{cases} x^2, & x < 1, \\ x, & x \geqq 1 \end{cases}$$

v dotykovém bodě o x-ové souřadnici $x_0 = 1$. Pokud ano, najděte její rovnici.

Řešení. Najdeme nejprve derivaci zleva dané funkce v příslušném bodě:

$$g'_{-}(1) = \lim_{x \to 1^-} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} (x+1) = 2.$$

Derivace zprava funkce g v bodě 1 je:

$$g'_{+}(1) = \lim_{x \to 1^+} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{x - 1}{x - 1} = 1.$$

Tedy $g'_{-}(1) \neq g'_{+}(1)$, tudíž neexistuje derivace funkce g v bodě 1, a tedy neexistuje ani tečna ke grafu funkce g v dotykovém bodě $(1, 1)$ — viz obr. 7.12 b) (na grafu je v uvažovaném bodě vidět „zub“). ▲

7.5 Fyzikální význam derivace

O fyzikálním významu derivace jsme se již zmínili v úvodu celé kapitoly. Předpokládejme, že je přímočarý pohyb hmotného bodu popsán funkcí $s(t)$, která udává polohu bodu v závislosti na čase t. Nechť přitom existuje první a druhá derivace funkce $s(t)$. Pro každý čas t_0 pak můžeme vypočítat číslo $s'(t_0)$, které udává „rychlost změny“ polohy bodu v tomto čase. Toto číslo značíme $v(t_0)$ a nazýváme okamžitou rychlostí bodu v čase t_0, tj.

$$v(t_0) = s'(t_0).$$

Dále můžeme pro každý čas t_0 vypočítat číslo $v'(t_0)$, které udává „rychlost změny" rychlosti bodu v tomto čase. Toto číslo značíme $a(t_0)$ a nazýváme okamžitým zrychlením bodu v čase t_0, tj.

$$a(t_0) = v'(t_0) = s''(t_0).$$

Pomocí zrychlení je v klasické mechanice formulován Newtonův zákon popisující pohyb bodu konstantní hmotnosti v silovém poli: „Výslednice sil působící na pohybující se bod je rovna (v každém čase) součinu hmotnosti pohybujícího se bodu a jeho zrychlení". (Nyní uvažujeme jednorozměrný případ — pohyb po přímce. Newtonův zákon platí samozřejmě i pro pohyb v rovině, příp. trojrozměrném prostoru.)

Ilustrujme si fyzikální význam derivace na následujícím příkladě.

Příklad 7.40. Těleso kmitá v přímce, přičemž jeho výchylka z rovnovážné polohy je určena funkcí s danou předpisem $s(t) = 2\cos 2\pi t - 3\sin 2\pi t$, kde s je v centimetrech, t v sekundách. Určete rychlost, zrychlení a výchylku v čase $1{,}75$ s. Najděte čas, ve kterém má těleso poprvé od začátku měření nulovou rychlost.

Řešení.

1. Nejprve vypočteme výchylku v zadaném čase $1{,}75$ s. Tj. určíme funkční hodnotu funkce s v bodě $t = 1{,}75$:

$$\begin{aligned} s(1{,}75) &= 2\cos(2\pi\cdot 1{,}75) - 3\sin(2\pi\cdot 1{,}75) = 2\cos\frac{7}{2}\pi - 3\sin\frac{7}{2}\pi = \\ &= 2\cos\left(2\pi + \frac{3}{2}\pi\right) - 3\sin\left(2\pi + \frac{3}{2}\pi\right) = \\ &= 2\cos\frac{3}{2}\pi - 3\sin\frac{3}{2}\pi = 3. \end{aligned}$$

   Těleso je v čase $1{,}75$ s vychýleno o 3 cm.

   Uveďme si ještě jinou možnost výpočtu. Protože s je periodická funkce s periodou 1, kosinus je sudá a sinus je lichá funkce, můžeme psát

$$s(1{,}75) = s\left(-\frac{1}{4}\right) = 2\cos\frac{\pi}{2} + 3\sin\frac{\pi}{2} = 3.$$

2. Okamžitá rychlost v je první derivací dráhy podle času:

$$v(t) = s'(t) = -4\pi\sin 2\pi t - 6\pi\cos 2\pi t, \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

   Vypočtěme rychlost v čase $1{,}75$ s. Tj. určeme funkční hodnotu funkce v v bodě $t = 1{,}75$:

$$\begin{aligned} v(1{,}75) &= s'(1{,}75) = -4\pi\sin(2\pi\cdot 1{,}75) - 6\pi\cos(2\pi\cdot 1{,}75) = \\ &= -4\pi\sin\frac{3}{2}\pi - 6\pi\cos\frac{3}{2}\pi = -4\pi(-1) - 6\pi\cdot 0 = 4\pi. \end{aligned}$$

   Tedy okamžitá rychlost tělesa v zadaném čase je 4π cm $\cdot$ s^{-1}.

3. Zrychlení tělesa určíme jako derivaci rychlosti, tj. druhou derivaci dráhy:

$$\begin{aligned}a(t) = s''(t) = v'(t) = (-4\pi \sin 2\pi t - 6\pi \cos 2\pi t)' = \\ = -8\pi^2 \cos 2\pi t + 12\pi^2 \sin 2\pi t, \qquad \forall t \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Určeme zrychlení tělesa v čase 1,75 s. Tj. vypočtěme funkční hodnotu funkce a v bodě $t = 1{,}75$:

$$\begin{aligned}a(1{,}75) = -8\pi^2 \cos(2\pi \cdot 1{,}75) + 12\pi^2 \sin(2\pi \cdot 1{,}75) = \\ = -8\pi^2 \cos \frac{3}{2}\pi + 12\pi^2 \sin \frac{3}{2}\pi = -12\pi^2.\end{aligned}$$

V zadaném čase má naše těleso zrychlení $-12\pi^2$ cm $\cdot$ s^{-2}.

4. Časy, ve kterých má těleso nulovou rychlost, jsou zřejmě nulovými body funkce v, tj. funkce s'.

$$\begin{aligned}v(t) = 0 \Leftrightarrow 6\pi \cos 2\pi t = -4\pi \sin 2\pi t \Leftrightarrow \frac{3}{2} \cos 2\pi t = -\sin 2\pi t \Leftrightarrow \\ \overset{(\star)}{\Leftrightarrow} \operatorname{tg} 2\pi t = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow t \in \left\{ -\frac{1}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{3}{2} + \frac{k}{2},\ k \in \mathbb{Z} \right\}.\end{aligned}$$

$(\star)$: je-li pro nějaké $t \in \mathbb{R}$ $\cos 2\pi t = 0$, pak $\sin 2\pi t \neq 0$, takže tato úprava je skutečně ekvivalentní.
Čas, ve kterém má těleso poprvé od počátku měření, tj. od času 0 s, nulovou rychlost, je $\frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{3}{2}$ s $\doteq 0{,}343\,584$ s. ▲

Pojmy k zapamatování

$\sum$

— derivace funkce v bodě, derivace zleva a zprava,
— vlastní a nevlastní derivace,
— derivace funkce na intervalu,
— derivace vyšších řádů,
— tečna, normála.

Kontrolní otázky

?

1. Vysvětlete geometrický a fyzikální význam první derivace.
2. Vysvětlete souvislost mezi derivací a spojitostí funkce.
3. Vysvětlete, co to znamená, že funkce má derivaci na intervalu J.
4. Vyslovte vzorce pro derivaci součtu, rozdílu, součinu a podílu dvou funkcí.
5. Uveďte vzorce pro derivaci elementárních funkcí e^x, $\cos x$, $\sin x$, x^n, $\operatorname{tg} x$ a $\operatorname{cotg} x$.
6. Uveďte vzorec pro derivaci inverzní funkce a vysvětlete jeho použití.

7. Uveďte vzorce pro derivaci elementárních funkcí $\ln x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$ a $\operatorname{arccotg} x$.
8. Vysvětlete postup při derivování složené funkce.
9. Uveďte vzorce pro derivaci elementárních funkcí a^x a $\log_a x$, kde $a \in \mathbb{R}^+$, $a \neq 1$.
10. Definujte n-tou derivaci funkce, kde $n \in \mathbb{N}$.
11. Napište rovnici tečny a normály ke grafu funkce f v dotykovém bodě (x_0, y_0).

Příklady k procvičení

1. Užitím definice derivace určete $f'(x_0)$, jestliže

a) $f(x) = x^4 - 3x^2 + 2, \quad x_0 = 0,$ b) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}, \quad x_0 = \sqrt{5}.$

2. Derivujte funkci f danou předpisem a výsledek upravte:

a) $f(x) = \dfrac{4}{3}x^6,$ b) $f(x) = \dfrac{1}{4x^4},$ c) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[5]{x}},$

d) $f(x) = \dfrac{5}{3}x - 2 + \dfrac{2}{3x^2},$ e) $f(x) = 6\sqrt[3]{x} - 4\sqrt[4]{x} + \dfrac{5}{3\sqrt[3]{x}},$ f) $f(x) = \dfrac{5}{3\sqrt[4]{x^3}},$

g) $f(x) = 3x^3 - 2\sqrt{x} + \dfrac{1}{x^3},$ h) $f(x) = 3\sqrt[3]{x^2} - \dfrac{1}{3}\operatorname{cotg} x,$ i) $f(x) = 2x^3 + 5\sin x.$

3. Vypočtěte:

a) $f'(1), f'(2), f'(-1),$ je-li $f(x) = 5x^2 - 3x,$

b) $f'(2), -f'(1), f'(4),$ je-li $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x}.$

4. Derivujte funkci f danou předpisem a výsledek upravte:

a) $f(x) = (x^2 - 1)(x^3 - 5),$ b) $f(x) = x^2 \operatorname{tg} x,$ c) $f(x) = (x^2 + 1)\ln x,$

d) $f(x) = x^2 \operatorname{cotg} x,$ e) $f(x) = \sqrt{x}\cos x,$ f) $f(x) = \sin x \cos x,$

g) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}\operatorname{arctg} x,$ h) $f(x) = x^3\sqrt{x}\,\mathrm{e}^x,$ i) $f(x) = x\mathrm{e}^x\cos x.$

5. Derivujte funkci f danou předpisem a výsledek upravte:

a) $f(x) = \dfrac{x}{x+1},$ b) $f(x) = \dfrac{\cos x}{1 - \sin x},$ c) $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\sin x},$

d) $f(x) = \dfrac{1 + x - x^2}{1 - x + x^2},$ e) $f(x) = \dfrac{x + \sqrt[3]{x}}{x - \sqrt[3]{x}},$ f) $f(x) = \dfrac{\operatorname{arctg} x}{\log x},$

g) $f(x) = \dfrac{x\mathrm{e}^x}{1 + x^2},$ h) $f(x) = \dfrac{(x^2 + 1)\operatorname{arctg} x}{\ln x},$ i) $f(x) = \dfrac{x^2 \ln x}{x + 1}.$

6. Derivujte funkci f danou předpisem a výsledek upravte:

a) $f(x) = 2\mathrm{e}^{3x}$, b) $f(x) = 3\ln 5x$, c) $f(x) = \ln(x^2-1)$,

d) $f(x) = \arcsin\dfrac{x-2}{2}$, e) $f(x) = \operatorname{arctg}\dfrac{1+x}{1-x}$, f) $f(x) = \dfrac{1}{(x^3-1)^2}$.

7. Derivujte funkci f danou předpisem a určete $D(f)$ a $D(f')$.

a) $f(x) = \dfrac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + \ln\cos x$, b) $f(x) = \arccos(1-x^2)$,

c) $f(x) = \ln(4-x^2) + \arcsin\dfrac{x-2}{2}$.

8. Derivujte funkci f danou předpisem a výsledek upravte:

a) $f(x) = \ln(1+\cos x)$, b) $f(x) = \operatorname{arctg}\sqrt{6x-1}$,

c) $f(x) = 2\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{2}} - \sqrt{2x-x^2}$, d) $f(x) = (x^2+4)\operatorname{arctg}\dfrac{x}{2} - 2x$,

e) $f(x) = (x-2)\sqrt{1+\mathrm{e}^x} - \ln\dfrac{\sqrt{1+\mathrm{e}^x}-1}{\sqrt{1+\mathrm{e}^x}+1}$, f) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1-\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}}$,

g) $f(x) = 2\sqrt{x+1} + \ln\dfrac{x+2-2\sqrt{x+1}}{x}$, h) $f(x) = \ln\left(\mathrm{e}^x + \sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}\right)$.

9. Derivujte funkci f danou předpisem a výsledek upravte:

a) $f(x) = \left(\dfrac{1}{1-x}\right)^x$, b) $f(x) = (x^2+1)^{\operatorname{arctg} x}$, c) $f(x) = x^{\sin x}$.

10. Vypočtěte druhou derivaci funkce f dané předpisem:

a) $f(x) = \sin^2 x$, b) $f(x) = \operatorname{tg}^2 x$, c) $f(x) = \sqrt{1+x^2}$, d) $f(x) = \ln(x^2+1)$.

11. Vypočtěte třetí derivaci funkce f dané předpisem:

a) $f(x) = \cos^2 x$, b) $f(x) = x\ln x$, c) $f(x) = x\mathrm{e}^{2x}$.

12. Nechť $n \in \mathbb{N}$. Vypočtěte n-tou derivaci funkce f dané předpisem:

a) $f(x) = \ln x$, b) $f(x) = x^n$, c) $f(x) = \dfrac{1}{x^k}$, $k \in \mathbb{R}$.

13. Určete rovnici tečny a normály ke grafu funkce f dané předpisem:

a) $f(x) = \dfrac{8}{4+x^2}$ v dotykovém bodě $T = (2, ?)$,

b) $f(x) = \operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1}$ v dotykovém bodě $T = (\sqrt{2}, ?)$,

c) $f(x) = 4 - x^2$ v dotykovém bodě T, jenž je průsečíkem grafu funkce f s kladnou částí osy x,

d) $f(x) = \ln x$ v dotykovém bodě $T = (\mathrm{e}, ?)$.

14. Určete rovnice tečen ke grafu funkce $f(x) = x^3 - 12x$, které jsou rovnoběžné s přímkou $p\colon y = 2$.

15. Najděte rovnice tečen ke grafu funkce $f(x) = \frac{x^3}{6} + 2$, které jsou kolmé k přímce $p\colon x + 2y + 3 = 0$.

16. Dráha pohybujícího se tělesa je popsána funkcí s danou předpisem $s(t) = 2t^3 - 15t^2 + 36t + 2$. Přitom dráha s je vyjádřena v metrech a čas t v sekundách. Zjistěte, ve kterém okamžiku je rychlost nulová.

17. Proud, který protéká indukční cívkou, je popsán funkcí i danou předpisem $i(t) = 15\sin^5 3t$. Přitom proud i je v ampérech a čas t v sekundách. Vypočtěte indukovanou elektromotorickou sílu $e_i = -Li'(t)$ v čase $\frac{2\pi}{9}$ s, je-li $L = 0{,}03$ H.

18. Vlak vyjíždí ze stanice, přičemž jeho pohyb je popsán funkcí s danou předpisem $s(t) = at^2 + bt + c$, kde s je dráha v kilometrech, t čas v hodinách. Po uplynutí jedné minuty dosáhne vlak rychlosti 60 km/h. Jakou dráhu ujede vlak, než dosáhne tuto rychlost?

19. Žebřík délky x je opřený o svislou stěnu. Dolní konec žebříku se posouvá od stěny konstantní rychlostí v_1. Určete okamžitou rychlost v_2, jíž se posouvá horní konec žebříku, v čase, kdy vzdálenost jeho dolního konce od stěny je y.

20. Po moři plují rovnoměrně přímočaře dvě lodi, první z nich rychlostí 30 km/h, druhá rychlostí 50 km/h. Jejich dráhy se křižují pod pravým úhlem. V okamžiku $t = 0\,h$, kdy první loď je v průsečíku drah, chybí druhé lodi k tomuto místu ještě 20 km. Najděte funkci, která vyjadřuje závislost okamžité rychlosti v, jíž se mění vzájemná vzdálenost obou lodí, na čase t. Vypočtěte nejmenší vzdálenost d lodí.

Autotest

Máte za sebou další velmi důležitou kapitolu. Nakolik jste ji zvládli, si můžete ověřit následujícím autotestem. Test by vám neměl zabrat více než 45 minut. První čtyři otázky jsou testového charakteru (výběr z předem daných možností). Přitom je vždy právě jedna z uvedených odpovědí správná.

1. Má-li funkce derivaci v bodě x_0, $\left\{\begin{array}{l}\text{je}\\ \text{není}\\ \text{nemusí být}\end{array}\right\}$ v bodě x_0 definovaná.

2. Má-li funkce vlastní derivaci v bodě x_0, $\left\{\begin{array}{l}\text{je}\\ \text{není}\\ \text{nemusí být}\end{array}\right\}$ v bodě x_0 spojitá.

3. Má-li funkce nevlastní derivaci v bodě x_0, $\left\{\begin{array}{l}\text{je}\\ \text{není}\\ \text{může být}\end{array}\right\}$ v bodě x_0 spojitá.

4. Je-li funkce spojitá v bodě x_0, $\left\{\begin{array}{l}\text{existuje}\\ \text{neexistuje}\\ \text{nemusí existovat}\end{array}\right\}$ derivace $f'(x_0)$.

5. Uveďte příklad funkce, která je spojitá v bodě $x_0 = 2$, ale nemá v tomto bodě derivaci.
6. Napište vzorce pro derivaci součtu, rozdílu, součinu a podílu dvou funkcí.
7. Derivujte funkci f danou předpisem a výsledek upravte:

   a) $f(x) = 3x^4 - 5\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - 2$, b) $f(x) = \dfrac{1 + \ln x}{x}$,

   c) $f(x) = \ln \dfrac{x^2}{1 - x^2}$, d) $f(x) = \arcsin \dfrac{x}{a}$, $a > 0$,

   e) $f(x) = \operatorname{arctg} e^{2x} + \ln \sqrt{\dfrac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}}$.
8. Vypočtěte $f'(1)$, $f'(-2)$, $-f'(3)$, je-li $f(x) = \dfrac{x}{1 + x^2}$.
9. Vypočtěte $f''(2)$, $f'''(1)$, je-li $f(x) = x \ln x$.
10. Napište rovnici tečny a normály ke grafu funkce $f : y = 1 - e^{\frac{x}{2}}$ v dotykovém bodě T, jenž je průsečíkem grafu funkce f s osou x.

Výsledky autotestu najdete v *Klíči k řešeným příkladům*. Věříme, že vám derivování nedělá žádné problémy. Pokud se přece našel příklad, ve kterém jste chybovali, pak si znovu projděte teorii, řešené příklady a hlavně si propočtěte příklady k procvičení. Cvik v derivování získáte pouze tím, že budete derivovat.

Pro zájemce:

Na začátku kapitoly jsme mluvili o tom, že díky diferenciálnímu počtu jsme schopni matematicky zachytit pohyb a změnu. Matematické pojmy (číslo, rovnice, bod, ...) jsou však ve své podstatě statické a pohyb nezahrnují. Abychom tedy byli schopni zkoumat pohyb a změnu, musíme být schopni popsat dynamický proces statickými nástroji.

Jak uvidíme dále, klíčem k porozumění podstatě pohybu a změny je pojem nekonečna a nekonečně malé veličiny.

Chceme stanovit „rychlost" změny funkce, jinými slovy poměr změny $f(x)$ ke změně x. Graficky to znamená najít v daném bodě x sklon křivky, který je dán velikostí úhlu mezi tečnou ke křivce v daném bodě a osou x. V číselném vyjádření je to tangens úhlu neboli směrnice tečny. Problém tedy zní:

- Známe předpis funkce, tj. vzorec, který udává vztah mezi proměnnými x a y. Máme najít předpis, který by udával vztah mezi proměnnou x a směrnicí.

Již na začátku kapitoly jsme si řekli — viz obr. 7.1 — že směrnice sečny spojující body T a P je dána vztahem

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Označíme-li $x - x_0 = h$, pak pro směrnici sečny dostáváme

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Ukažme si na příkladu funkce $f(x) = x^3$ některé problémy, které historický vývoj diferenciálního počtu provázely. Chceme určit směrnici křivky (tečny) v bodě x (kvůli zjednodušení nebudeme užívat x_0). Pro naši funkci f je tedy směrnice sečny

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)^3-x^3}{h} = \frac{x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-x^3}{h} = \\ = \frac{3x^2h+3xh^2+h^3}{h} = 3x^2+3xh+h^2.$$

Tento výraz udává směrnici úsečky PT. Jaká je ale směrnice křivky $f(x) = x^3$ v bodě T, kterou jsme chtěli vypočítat? A zde právě udělali Newton s Leibnizem geniální rozhodující krok. Podívali se na celou situaci dynamicky a zkoumali, co se bude dít, jestliže se vzdálenost h bude neustále zmenšovat.

Numericky: pro každou hodnotu h odpovídá výraz $3x^2 + 3xh + h^2$ směrnici úsečky PT. Položíme-li např. $x = 2$ a budeme-li následně uvažovat každou z následujících hodnot $h = 0{,}1$; $0{,}01$; $0{,}001$; $0{,}000\,1$; $\dots$, pak odpovídající směrnice úseček PT budou postupně $12{,}6$; $12{,}06$; $12{,}006$; $12{,}000\,6$; $\dots$ Vidíme, že směrnice úseček PT se blíží k hodnotě 12.

Geometricky: se zmenšujícím se h se bod P přibližuje k bodu T a směrnice sečny postupně přechází ve směrnici tečny, tj. směrnici křivky. Řečeno dnešním jazykem, limitní hodnota směrnice sečny PT bude přesnou hodnotou směrnice křivky v bodě T. Limitní hodnota výrazu $3x^2+3xh+h^2$ pro h blížící se nule je rovna $3x^2$. To je tedy směrnice křivky f v bodě x. Konkrétně pro $x = 2$ bude směrnice rovna číslu $3 \cdot 2^2 = 12$.

Náš popis problému vychází z toho, že známe pojem limity. Avšak v době, kdy diferenciální počet vznikal, pojem limity neexistoval. Jak tedy Newton a Leibniz dokázali popsat fakt, že se zmenšujícím se h se směrnice úseček PT přibližují ke směrnici křivky? Jak se s tímto dynamickým procesem dokázali vyrovnat? Jak pracovali s veličinou h, která se blíží k nule, tj. nekonečně malou veličinou?

Newton i Leibniz pochopili tento aproximační (limitní) proces intuitivně zcela správně a dokázali světu předložit užitečná a správná pravidla pro derivování řady funkcí. Nutno však říci, že s nekonečně malou veličinou se zcela vyrovnat nedokázali.

Z Newtonových výpočtů vyplývá, že členy násobené činitelem „h“ pokládá ve srovnání se členy, jež „h“ neobsahují, za nuly. Neplatí to však vždy. V případě, že s veličinou „h“ dělí, pokládá ji za nenulovou. Newton si byl vědom tohoto nedostatku, ale nedovedl se s ním vyrovnat. Při hledání východiska vytvořil „metodu prvních a posledních poměrů“, jakýsi prvopočátek teorie limit. Zavedl i pojem „limes“, i když pojem limity v dnešním smyslu nedefinoval; opíral se pouze o jeho intuitivně zřejmý význam.

To, že nebyla dostatečně podložena práce s nekonečně malou veličinou, se stalo zdrojem mnoha nedorozumění a zmatků, a to nejen pro současníky Newtona a Leibnize, ale i pro mnoho dalších generací.

Např. roku 1734 se anglikánský biskup **George Berkeley** (1685–1753) kriticky vyjádřil proti nekonečně malým veličinám veličinám, které přirovnal k „duchům zemřelých veličin“ — ty jednou jsou nulové a pak zase nejsou, podle potřeby operací, které se s nimi provádějí.

Tyto kritiky vyvolaly živou polemiku, která pak pokračovala mezi matematiky s velkou intenzitou celé 18. století a vedla k pokusům vyložit základní pojmy infinitezimálního počtu bez logických sporů. Základy matematické analýzy v období jejího vzniku skutečně stály na nejasných představách; používání metod pro praktické výpočty bylo spíše otázkou víry než rozumu. K situaci se dosti přiléhavě vyjádřil d'Alembert: „Jděme vpřed, důvěra se dostaví později!" Onen postup vpřed je nejtypičtějším znakem rozvoje matematické analýzy 18. století.

První skutečný krok k vyřešení problémů, o nichž mluvil Berkeley, udělal **Jean Baptiste Le Rond d'Alembert** (1717–1783) tím, že se pokusil definovat derivaci jako limitu poměru přírůstků veličin. Jeho definice limity zněla asi takto:

Jedna veličina je limitou druhé veličiny, jestliže tato druhá se může přiblížit k první více, než je libovolná daná veličina, ať je tato poslední jakkoli malá, přičemž však přibližující se veličina nikdy nemůže předstihnout veličinu, ke které se blíží.

Aby se vyhnul operacím s nulami, vyslovil d'Alembert ještě požadavek, že limita se nesmí ztotožnit s žádnou hodnotou proměnné.

Tyto snahy byly završeny až v 19. století. Tehdy nastupuje období zpřesňování matematické analýzy, jejímiž představiteli byli B. Bolzano, A.-L. Cauchy, N. H. Abel, P. G. L. Dirichlet a později R. Dedekind a K. Weierstrass. Až v tomto období, kdy došlo k aritmetizaci analýzy — vzniku ε-δ jazyka — byl diferenciální počet postaven na pevné základy.

Ukažme si na naší funkci, jak K. Weierstrass zachytil statickým způsobem dynamický proces derivování — proces, kdy se směrnice sečen stále více přibližují ke směrnici tečny, když se přírůstek h blíží k nule.

Nechť je dána funkce

$$f(h) = \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h},$$

kde x je konstanta a h proměnná. Řekneme, že číslo L (v našem případě $3x^2$) je limitou funkce $f(h)$ pro h blížící se k číslu 0, jestliže platí:

Pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že když $0 < |h| < \delta$, pak $|f(h) - L| < \varepsilon$.

Jistě v této definici rozpoznáte známou definici limity a uvědomíte si, že zde není řeč o žádném dynamickém procesu, o žádné nekonečně malé veličině, mluví se zde pouze o existenci čísla δ, které má určitou vlastnost. A tak 200 let po svém vzniku byl diferenciální počet postaven na pevné základy.

Jak bylo řečeno na začátku, k porozumění podstatě pohybu a změny je třeba umět pracovat s nekonečnem — s nekonečně malými veličinami. A k tomu zcela došlo až v 19. století vytvořením teorie limit a celkovou aritmetizací analýzy. Zajímavé je, že ačkoliv není nekonečno součástí našeho světa, lidská mysl ho potřebuje ovládnout, aby dokázala popsat a pochopit náš svět.

Kapitola 8

Základní věty diferenciálního počtu

Průvodce studiem

V předchozích dvou kapitolách jsme se věnovali limitě, spojitosti a derivaci funkce v bodě. To jsou tzv. lokální vlastnosti funkce. Popisují chování funkce v okolí daného bodu.

Vyšetřujeme-li chování funkce na nějaké množině (nejčastěji intervalu), mluvíme o globálních vlastnostech. Globální vlastností je například sudost, lichost, periodičnost nebo také spojitost funkce na intervalu.

Funkce spojité na intervalu mají řadu důležitých vlastností. V této kapitole uvedeme několik klasických vět, týkajících se funkcí definovaných na uzavřeném ohraničeném intervalu, které jsou spojité, popř. mají derivaci (připomeňme zde, že pokud mluvíme o derivaci, máme stále na mysli vlastní derivaci). Důkazy těchto vět jsou relativně obtížné a s našimi prostředky bychom je těžko mohli udělat. Avšak jejich geometrický význam je velmi názorný a jejich použití široké.

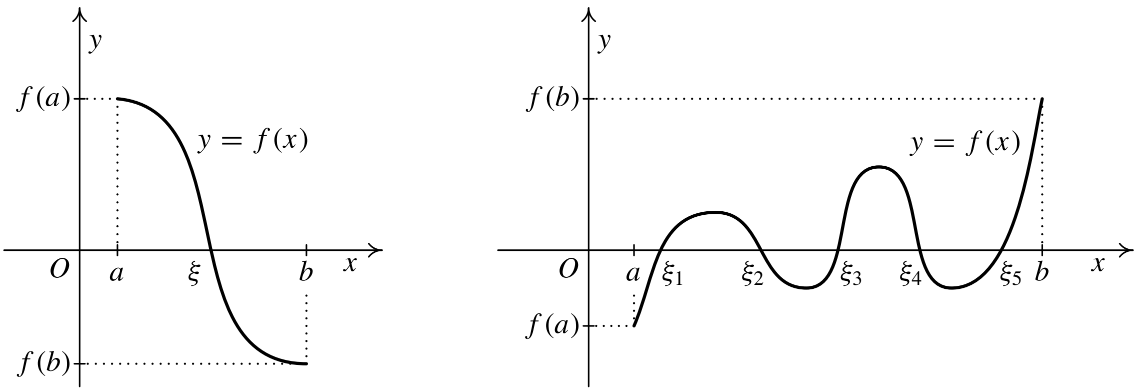
Cíle

Po prostudování této kapitoly budete umět

- určit intervaly, na nichž je funkce kladná, resp. záporná, užitím Cauchyovy-Bolzanovy věty,
- popsat souvislost mezi Rolleovou, Lagrangeovou a Cauchyovou větou a vysvětlit jejich geometrický význam,
- zformulovat l'Hospitalovo pravidlo,
- vypočítat limity užitím l'Hospitalova pravidla.

Nejprve si uvedeme větu, která popisuje důležitou vlastnost funkcí spojitých na uzavřeném ohraničeném intervalu.

Věta 8.1 (Cauchy[1]-Bolzano). *Nechť je funkce f spojitá na uzavřeném ohraničeném intervalu $\langle a, b\rangle$ a platí $f(a) \cdot f(b) < 0$. Pak existuje alespoň jedno číslo $\xi \in (a, b)$ takové, že $f(\xi) = 0$.*



a) b)

Obr. 8.1: Ilustrace Cauchyovy-Bolzanovy věty

Cauchyova-Bolzanova věta říká, že spojitá funkce, která má v krajních bodech uzavřeného ohraničeného intervalu funkční hodnoty opačných znamének, má uvnitř intervalu (a, b) tzv. *nulový bod* ξ, tj. bod, pro který $f(\xi) = 0$. To znamená, že graf této funkce protne v bodě ξ osu x — viz obr. 8.1 a). Nulových bodů může být ovšem více — viz obr. 8.1 b). Zkuste nakreslit graf funkce, která má nekonečně mnoho nulových bodů.

Pro zájemce:

Tato věta hraje důležitou roli při numerickém řešení nelineárních rovnic. Ukažme si, jak lze numericky řešit rovnici $f(x) = 0$ (metoda půlení intervalů).

Nechť f je spojitá na $\langle a, b\rangle$, nechť $f(a) \cdot f(b) < 0$.
Položme $x_1 = \frac{a+b}{2}$.

1. Je-li $f(x_1) = 0$, je bod x_1 hledaným řešením.
2. Je-li $f(x_1) \neq 0$, je buď $f(a) \cdot f(x_1) < 0$, anebo $f(x_1) \cdot f(b) < 0$.
   a) Je-li $f(a) \cdot f(x_1) < 0$, nahradíme interval $\langle a, b\rangle$ intervalem $\langle a, x_1\rangle$, vracíme se na začátek a položíme $x_2 = \frac{a+x_1}{2}$ a znovu testujeme, zda $f(x_2) = 0$ nebo $f(x_2) \neq 0$.
   b) Je-li $f(x_1) \cdot f(b) < 0$, nahradíme interval $\langle a, b\rangle$ intervalem $\langle x_1, b\rangle$ a postupujeme obdobně.

[1] **Augustin Louis Cauchy** (1789–1857) (čti koši) — vynikající francouzský matematik. Napsal přes 700 prací. Položil základy soudobé matematiky, především analýzy.

Buď po konečném počtu n kroků dostaneme bod $x_n \in (a, b) : f(x_n) = 0$, anebo tento proces provádíme tak dlouho, až dosáhneme toho, že délka intervalu obsahující kořen (kořeny) je menší, než požadovaná přesnost.

Nyní si uvedeme důsledek věty 8.1.

Důsledek 8.2. *Je-li funkce f spojitá na intervalu J, zobrazí tento interval na jednobodovou množinu nebo na interval.*

Větu 8.1 a její důsledek budeme využívat pro hledání intervalů, na nichž funkce f nabývá pouze kladných, resp. pouze záporných hodnot. Někdy budeme stručně říkat, že hledáme intervaly, na nichž je funkce kladná, resp. záporná.

V následující kapitole pak tuto větu využijeme při hledání intervalů, na nichž je funkce f' kladná, resp. záporná, což nám poslouží k určení intervalů monotonie, a konečně při hledání intervalů, na nichž je funkce f'' kladná, resp. záporná, což nám poslouží k určení intervalů konvexnosti a konkávnosti.

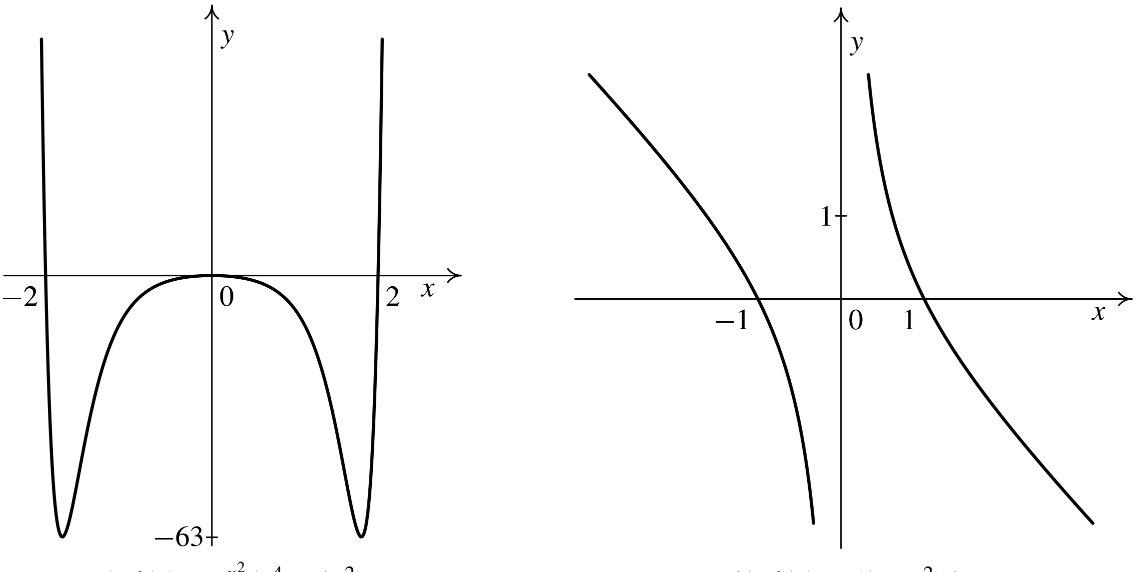
Určování intervalů, na nichž je funkce kladná, resp. záporná

Cauchyova-Bolzanova věta říká, že nemá-li spojitá funkce na intervalu J nulový bod (tj. rovnice $f(x) = 0$ nemá řešení na J), je na tomto intervalu buď pořád kladná, anebo pořád záporná. Tedy pokud hledáme intervaly, na nichž je daná spojitá funkce kladná, resp. záporná, stačí najít všechny nulové body zadané funkce a definiční obor rozdělit těmito nulovými body na dílčí intervaly, kde bude funkce buď jen kladná, anebo jen záporná. Pak stačí vypočítat funkční hodnotu v jednom vnitřním bodě tohoto dílčího intervalu. Pokud vyjde záporná hodnota, jedná se o funkci, která je záporná na celém dílčím intervalu. V žádném bodě tohoto dílčího intervalu totiž nemůže být kladná, neboť to by v něm musel ležet další nulový bod. Analogická je situace, pokud vyjde kladná hodnota.

Příklad 8.3. Určete intervaly, na nichž je funkce $f\colon y = \mathrm{e}^{x^2}(x^4 - 4x^2)$ kladná, resp. záporná.

Řešení.

1. Nejprve vyšetříme spojitost funkce f. Jedná se o funkci elementární a ta je spojitá ve všech bodech, v nichž je definována. Ze zadání ihned vidíme, že $D(f) = \mathbb{R}$, tedy funkce je spojitá na celém $\mathbb{R}$.
2. Určíme nulové body funkce f, tj. body, kde je funkční hodnota rovna nule:
$$f(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; \mathrm{e}^{x^2}(x^4 - 4x^2) = 0 \;\Leftrightarrow\; x^4 - 4x^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; x^2(x^2 - 4) = 0 \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\; x^2(x - 2)(x + 2) = 0.$$
Nulové body funkce f jsou: $x_0 = -2$, $x_1 = 0$, $x_2 = 2$.
3. Definiční obor rozdělíme nulovými body na disjunktní intervaly
$$(-\infty, -2), \quad (-2, 0), \quad (0, 2), \quad (2, \infty).$$



a) $f(x) = e^{x^2}(x^4 - 4x^2)$ b) $f(x) = (1 - x^2)/x$

Obr. 8.2

4. Určíme znaménko funkce f na příslušných intervalech. Dle Cauchyovy-Bolzanovy věty stačí zvolit na každém z dílčích intervalů jeden bod a v něm určit funkční hodnotu. Podle znaménka funkční hodnoty se rozhodne, zda je funkce na tomto intervalu záporná či kladná. Pokud je funkční hodnota ve zvoleném bodě záporná, je funkce záporná na celém dílčím intervalu. Obdobně pro kladnou funkční hodnotu.

   Např. v intervalu $(-\infty, -2)$ zvolíme bod -3, v intervalu $(-2, 0)$ bod -1, v intervalu $(0, 2)$ bod 1 a v intervalu $(2, \infty)$ bod 3:

$$
\begin{aligned}
(-\infty, -2) &\quad : \quad f(-3) = e^{(-3)^2}((-3)^4 - 4(-3)^2) = 45e^9 > 0,\\
(-2, 0) &\quad : \quad f(-1) = e^{(-1)^2}((-1)^4 - 4(-1)^2) = -3e < 0,\\
(0, 2) &\quad : \quad f(1) = e^{1^2}(1^4 - 4 \cdot 1^2) = -3e < 0,\\
(2, \infty) &\quad : \quad f(3) = e^{3^2}(3^4 - 4 \cdot 3^2) = 45e^9 > 0.
\end{aligned}
$$

5. Závěr: Funkce f je kladná na intervalu $(-\infty, -2)$ a na intervalu $(2, \infty)$ a záporná na intervalu $(-2, 0)$ a na intervalu $(0, 2)$. Graficky budeme tuto skutečnost znázorňovat takto:

$$
f\colon \quad \underset{}{+} \;\; \underset{-2}{|} \;\; - \;\; \underset{0}{|} \;\; - \;\; \underset{2}{|} \;\; +
$$

   Pro ilustraci uvádíme graf funkce f — viz obrázek 8.2 a) ▲

Příklad 8.4. Určete intervaly, na nichž je funkce $f\colon\ y = \dfrac{1-x^2}{x}$ kladná, resp. záporná.

Řešení.

1. Definiční obor: $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Funkce je spojitá na intervalu $(-\infty, 0)$ a na intervalu $(0, \infty)$. Bod 0 je bod nespojitosti.
2. Nulové body funkce f:
$$f(x) = 0 \ \Leftrightarrow\ \frac{1-x^2}{x} = 0 \ \Leftrightarrow\ 1 - x^2 = 0 \ \Leftrightarrow\ (1-x)(1+x) = 0.$$
Funkce f má dva nulové body: $x_1 = 1,\ x_2 = -1$.
3. Definiční obor $D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ rozdělíme nulovými body na disjunktní intervaly:
$$(-\infty, -1), \quad (-1, 0), \quad (0, 1), \quad (1, \infty).$$
4. Určíme znaménko funkce f na příslušných intervalech. Z každého intervalu vybereme jeden bod a určíme znaménko funkční hodnoty v tomto bodě. Např. v intervalu $(-\infty, -1)$ zvolíme bod -2, v intervalu $(-1, 0)$ bod $-\frac{1}{2}$, v intervalu $(0, 1)$ bod $\frac{1}{2}$ a v intervalu $(1, \infty)$ bod 2:
$$\begin{array}{lll}
(-\infty, -1) & : & f(-2) = \dfrac{1-(-2)^2}{-2} = \dfrac{-3}{-2} = \dfrac{3}{2} > 0,\\[2ex]
(-1, 0) & : & f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^2}{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1-\frac{1}{4}}{-\frac{1}{2}} = \dfrac{\frac{3}{4}}{-\frac{1}{2}} = -\dfrac{3}{2} < 0,\\[2ex]
(0, 1) & : & f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{1}{2}} = \dfrac{1-\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{3}{2} > 0,\\[2ex]
(1, \infty) & : & f(2) = \dfrac{1-2^2}{2} = \dfrac{-3}{2} < 0.
\end{array}$$
5. Závěr: Funkce f je kladná na intervalu $(-\infty, -1)$ a na intervalu $(0, 1)$ a záporná na intervalu $(-1, 0)$ a na intervalu $(1, \infty)$. Graficky:
$$f\colon\quad \begin{array}{ccccccc} + & & - & & + & & - \\ \hline & -1 & & 0 & & 1 & \end{array}$$
Graf funkce si můžete prohlédnout na obrázku 8.2 b) ▲

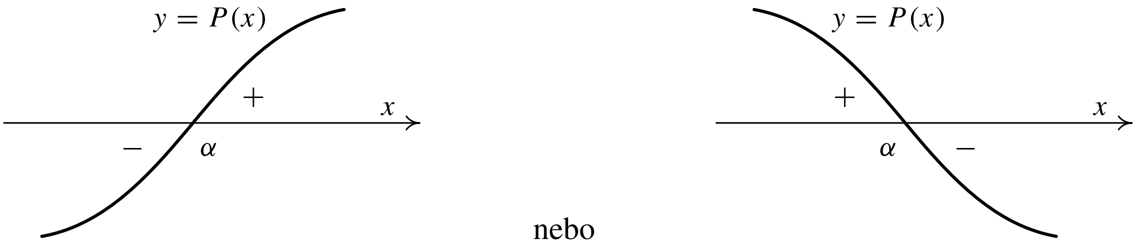
Pro zájemce:

Mezi nejčastěji se vyskytující elementární funkce patří polynomy. Při určování intervalů, na nichž daný polynom nabývá kladné, resp. záporné hodnoty, můžeme postupovat stejně jako v předchozích příkladech, tj. vypočteme nulové body (kořeny), rozdělíme definiční obor nulovými body na disjunktní intervaly a určíme znaménko funkce na každém z těchto intervalů. Ukážeme si nyní, jak lze využít vlastností polynomu k tomu, abychom se vyhnuli výpočtu znaménka funkčních hodnot na všech intervalech. Bude nám stačit vypočítat znaménko jen na jednom intervalu. Značně si tím ušetříme práci obzvláště u polynomů vyšších stupňů.

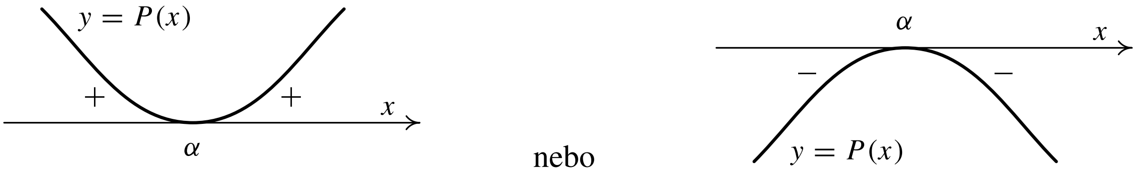
Polynom je funkce spojitá na celém $\mathbb{R}$. Jestliže tedy dochází ke změně znaménka, protne nutně graf osu x, což znamená, že v tomto průsečíku je kořen. Vybereme jeden *reálný* kořen α polynomu P a všimneme si, jaký je průběh grafu funkce $P\colon\ y = P(x)$ v okolí tohoto bodu. Rozhodující roli hraje násobnost kořenu α. Lze odvodit:

1. Je-li násobnost lichá, dochází ke změně znaménka polynomu P, tj. graf přechází z jedné strany osy x na druhou.
2. Je-li násobnost sudá, nedochází ke změně znaménka polynomu P, tj. graf se osy x jen dotkne a vrátí se na stejnou stranu (podobně jako u paraboly $y = x^2$ v bodě $x = 0$).

Situace je znázorněna na následujících obrázcích (porovnejte se známými funkcemi $x, x^3, x^5, \dots,$ $x^2, x^4, \dots$).



Obr. 8.3: Chování polynomu v okolí kořene liché násobnosti



Obr. 8.4: Chování polynomu v okolí kořene sudé násobnosti

Z předchozích úvah lze odvodit tento postup:

1. Rozložíme polynom P na součin ireducibilních činitelů v reálném oboru (komplexní kořeny nás nyní nezajímají).
2. Na číselnou osu vyneseme všechny reálné kořeny s lichou násobností. Tím je číselná osa rozdělena na konečný počet intervalů.
3. Vybereme jeden bod x_0, který není kořenem, a vypočteme $P(x_0)$. Jestliže platí $P(x_0) > 0$, je $P(x) > 0$ na celém intervalu z bodu 2), který obsahuje x_0, s případnou výjimkou bodů, které jsou kořeny P se sudou násobností a leží v tomto intervalu. Obdobně, je-li $P(x_0) < 0$, je $P(x) < 0$ na celém příslušném intervalu s případnou výjimkou kořenů se sudou násobností.
4. V sousedních intervalech vzniklých v bodě 2) má P vždy opačná znaménka, tj. při přechodu přes *kořen liché násobnosti* polynom P mění znaménko (znaménka na intervalech z bodu 2) se pravidelně střídají).

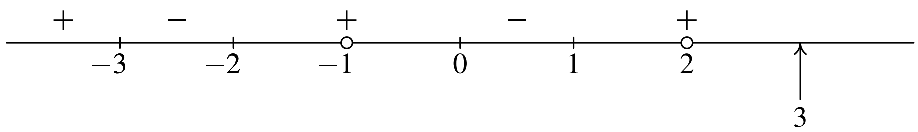
Příklad 8.5. Určete intervaly, na nichž daný polynom nabývá kladných, resp. záporných hodnot.

$$P:\ y = (x-1)^3(x+1)^4(x^2+x+1)^3(x+2)(x+3)^5(x-2)^2x.$$

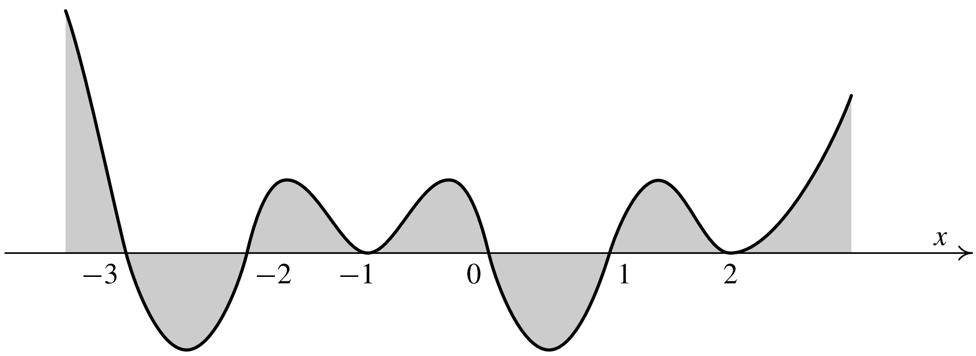
Řešení. Polynom je zadán ve tvaru součinu ireducibilních činitelů v reálném oboru (všechny členy jsou lineární nebo kvadratické, které již v reálném oboru nelze dále rozložit — ověřte si, že trojčlen $x^2 + x + 1$ nemá v reálném oboru žádný kořen).

Reálné kořeny jsou $1,\ -1,\ -2,\ -3,\ 2$ a 0. Z nich lichou násobnost mají $x = 1$ (trojnásobný), $x = -2$ (jednoduchý), $x = -3$ (pětinásobný) a $x = 0$ (jednoduchý). Vyneseme je na číselnou osu — viz obrázek níže.

Vybereme např. číslo $x_0 = 3$ a vypočteme $P(3) = 2^3 \cdot 4^4 \cdot 13^3 \cdot 5 \cdot 6^5 \cdot 1^2 \cdot 3 > 0$ (potřebujeme jen znaménko, proto je zbytečné vyčíslovat konkrétní hodnotu). Tedy v intervalu obsahujícím číslo 3 má P kladné znaménko a v sousedních intervalech se znaménka pravidelně střídají.



Pro úplnost je třeba ještě dodat, že v kořenech se sudou násobností $x = -1$ (čtyřnásobný) a $x = 2$ (dvojnásobný) je hodnota rovněž nula. Nyní na základě znalosti intervalů, na nichž daný polynom nabývá kladných, resp. záporných hodnot, můžeme načrtnout přibližný graf polynomu P.



▲

8.1 Věty o střední hodnotě

Nyní si uvedeme tři věty, jež se obvykle souhrnně nazývají *věty o střední hodnotě*. V těchto větách budeme kromě spojitosti funkce na uzavřeném ohraničeném intervalu požadovat i existenci derivace.

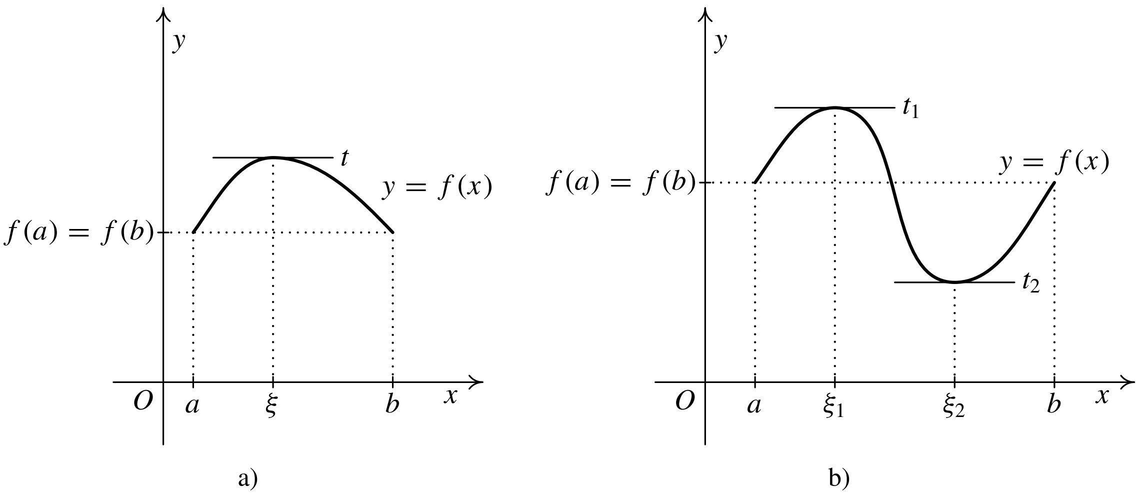
Věta 8.6 (Rolle[1]). *Nechť funkce f má následující vlastnosti:*

i) *je spojitá na uzavřeném ohraničeném intervalu $\langle a, b\rangle$,*

ii) *má derivaci na otevřeném intervalu (a, b),*

iii) *platí $f(a) = f(b)$.*

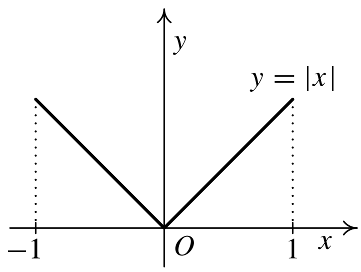
Pak existuje alespoň jedno číslo $\xi \in (a, b)$ takové, že $f'(\xi) = 0$.



Obr. 8.5: Rolleova věta

Věta 8.6 říká, že jsou-li splněny podmínky i), ii), iii), pak existuje bod, v němž je tečna t rovnoběžná s osou x — viz obr. 8.5 a). Očividně takových bodů může být více — viz obr. 8.5 b), dokonce nekonečně mnoho. Zkuste takovou funkci najít.

Všimněme si, že žádnou z podmínek i), ii), iii) nelze vynechat. Uvažujme například funkci $f\colon\ y = |x|$, $x \in \langle -1, 1\rangle$. Tato funkce nemá v bodě $x = 0$ derivaci (v jediném bodě chybí derivace!), a tudíž nesplňuje předpoklady Rolleovy věty. Bod zmíněné vlastnosti již nemusí existovat. Skutečně. V žádném bodě grafu funkce f není tečna rovnoběžná s osou x — viz obr. 8.6.



Obr. 8.6

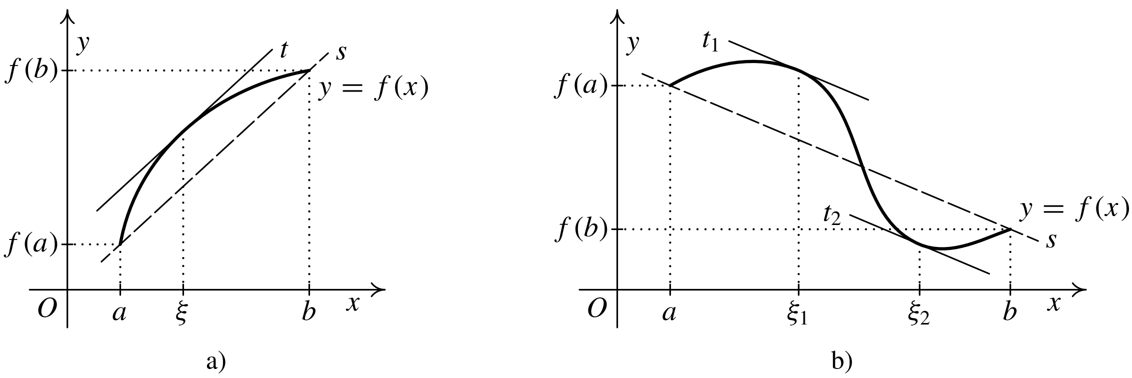
[1]**Michel Rolle** (1652–1719) (čti rol) — francouzský matematik. Zabýval se algebrou.

Věta 8.7 (Lagrange). *Nechť funkce f má následující vlastnosti:*

i) *je spojitá na uzavřeném ohraničeném intervalu $\langle a, b\rangle$,*
ii) *má derivaci na otevřeném intervalu (a, b).*

Pak existuje alespoň jedno číslo $\xi \in (a, b)$ takové, že

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,.$$



Obr. 8.7: Lagrangeova věta

I tato věta má názorný geometrický význam. Sestrojíme sečnu s grafu funkce f procházející body $(a, f(a))$ a $(b, f(b))$. Její směrnice je $k = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Věta říká, že existuje bod $\xi \in (a, b)$, v němž má tečna t ke grafu funkce f směrnici rovnu k, tj. tečna t sestrojená v dotykovém bodě $(\xi, f(\xi))$ je rovnoběžná se sečnou s — viz obr. 8.7 a). Takových bodů může být samozřejmě i více — viz obr. 8.7 b).

Poznámka 8.8.

1. Rolleova věta je speciálním případem Lagrangeovy věty. Přidáme-li k předpokladům Lagrangeovy věty předpoklad $f(a) = f(b)$, dostaneme tvrzení: existuje alespoň jedno číslo $\xi \in (a, b)$ takové, že
$$f'(\xi) = \frac{0}{b - a} = 0\,,$$
což je přesně tvrzení Rolleovy věty (tečna sestrojená v dotykovém bodě $(\xi, f(\xi))$ je rovnoběžná se sečnou procházející body $(a, f(a))$ a $(b, f(b))$ a ta je rovnoběžná s osou x).
2. Podívejme se na fyzikální interpretaci Lagrangeovy věty. Vyjadřuje-li $f(t)$ dráhu v závislosti na čase t pohybujícího se bodu, je podíl $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ průměrná rychlost v časovém intervalu $\langle a, b\rangle$ a $f'(\xi)$ je okamžitá rychlost v čase ξ. Věta říká, že v intervalu (a, b) existuje čas ξ, ve kterém je okamžitá rychlost rovna průměrné rychlosti na celém intervalu.

Lagrangeova věta má dva velmi důležité důsledky, které budeme potřebovat v integrálním počtu.

Víme, že $(c)' = 0$, kde c je konstanta. První důsledek říká, že platí i opak.

Důsledek 8.9. *Je-li $f'(x) = 0$ na intervalu I, je $f(x) = c$ na I, tj. je to konstantní funkce.*

Důkaz. Nechť $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$. Podle Lagrangeovy věty existuje $\xi \in (x_1, x_2)$ takové, že $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$. Protože však $f'(\xi) = 0$, je $f(x_1) = f(x_2)$, což dokazuje tvrzení. □

Podobně je-li $f(x) = g(x) + c$, kde c je konstanta, pak $f'(x) = (g(x) + c)' = g'(x) + c' = g'(x)$. Druhý důsledek říká, že i toto tvrzení lze obrátit — mají-li dvě funkce stejnou derivaci, liší se o konstantu.

Důsledek 8.10. *Je-li $f'(x) = g'(x)$ na intervalu I, pak existuje konstanta c tak, že platí $f(x) = g(x) + c$ na I.*

Důkaz. Stačí aplikovat důsledek 8.9 na rozdíl $f(x) - g(x)$. □

Poznámka 8.11.
V obou předchozích důsledcích je podstatné, že se mluví o intervalu. Pokud nejde o interval, tvrzení nemusí platit. Např. funkce

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{pro } x \in (-1, 0), \\ 1 & \text{pro } x \in (0, 1), \end{cases}$$

má v každém bodě nulovou derivaci, ale přitom není konstantní.

Věta 8.12 (Cauchy). *Nechť funkce f a g mají následující vlastnosti:*

i) *jsou spojité na uzavřeném ohraničeném intervalu $\langle a, b\rangle$,*
ii) *mají derivaci na otevřeném intervalu (a, b), přičemž $g'(x) \neq 0$ na (a, b).*

Pak existuje alespoň jedno číslo $\xi \in (a, b)$ takové, že

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}\,.$$

Lagrangeova věta je speciálním případem Cauchyovy věty (stačí zvolit $g(x) = x$).

8.2 L'Hospitalovo pravidlo

V kapitole o limitě a spojitosti jsme si slíbili, že pro výpočet limit vedoucích na některé nedefinované výrazy si uvedeme efektivnější nástroj, než je výpočet pomocí úprav výrazu v limitě. Nyní, když máme k dispozici derivace, to lze udělat. Bude se jednat o výpočet limity podílu $\frac{f(x)}{g(x)}$. Slíbeným prostředkem je tzv. *l'Hospitalovo pravidlo*.

Věta 8.13 (l'Hospital[1]). *Nechť* $x_0 \in \mathbb{R}^\star$. *Nechť je splněna jedna z podmínek*

i) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$,

ii) $\lim\limits_{x\to x_0} |g(x)| = +\infty$.

Existuje-li $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, *pak existuje také* $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ *a platí*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Poznámka 8.14.

1. L'Hospitalovo pravidlo platí i pro jednostranné limity.
2. Připomeňme, že je-li $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ a $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$, říkáme, že $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ *je limita typu* $\frac{0}{0}$. Je-li $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$ a $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$, mluvíme o limitě typu $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$. V konkrétních příkladech píšeme typ limity do hranatých závorek, např. $\left[\frac{0}{0}\right]$ nebo $\left[\frac{\pm\infty}{\pm\infty}\right]$.
3. L'Hospitalovo pravidlo říká, že limita $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ se dá v případě, že se jedná o limitu $\left[\frac{0}{0}\right]$ nebo $\left[\frac{\text{cokoliv}}{\pm\infty}\right]$, nahradit limitou $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ za předpokladu, že tato druhá limita existuje (může být i nevlastní).
4. Všimněte si, že ve výrazu $\frac{f(x)}{g(x)}$ derivujeme zvlášť čitatel a zvlášť jmenovatel (nejedná se tedy o derivaci podílu!).
5. Podívejme se podrobněji na limitu $\left[\frac{\text{cokoliv}}{\pm\infty}\right]$. V případě, že $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = C$, $C \in \mathbb{R}$, víme, že
$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)} = \frac{C}{\pm\infty} = 0,$$
tj. obejdeme se bez l'Hospitalova pravidla. L'Hospitalovo pravidlo tedy teoreticky použijeme, pouze když $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ neexistuje nebo $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$. Prakticky se však nemusíme limitou v čitateli vůbec zabývat — může se jednat o limitu, kterou neumíme nebo nechceme počítat.
6. Opět je třeba zdůraznit, že nic z předpokladů nelze vynechat.
   i) Nejprve je třeba zjistit, zda se jedná o limitu $\left[\frac{0}{0}\right]$ nebo $\left[\frac{\text{cokoliv}}{\pm\infty}\right]$.
   ii) Musí platit, že limita podílu derivací $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existuje. To zjistíme tak, že ji vypočítáme.

[1] **Guillaume François Antoine l'Hospital** (1661–1704) (čti lopital) — francouzský matematik. Zabýval se matematickou analýzou a geometrií.

Pokud $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ neexistuje, pak nelze použít l'Hospitalovo pravidlo a musíme hledat jinou cestu, jak danou limitu $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ vypočítat.

Příklad 8.15. Vypočtěte následující limity:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x}$, b) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x^2-x-2}$, c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x}{x^2+1}$,

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x}$, e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x-1}{x}$, $a \in (0, \infty)$.

Řešení. Nejprve určíme, o jaký typ limity se jedná. Použití l'Hospitalova pravidla vyznačíme v příslušném místě nad rovnítkem symbolem *LP*.

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = \left[\dfrac{0}{0}\right] \overset{LP}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x}{1} = \dfrac{\cos 0}{1} = \dfrac{1}{1} = 1.$

b) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x^2-x-2} = \left[\dfrac{0}{0}\right] \overset{LP}{=} \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x}{2x-1} = \dfrac{4}{4-1} = \dfrac{4}{3}.$

c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x}{x^2+1} = \left[\dfrac{+\infty}{+\infty}\right] \overset{LP}{=} \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{2x} = \dfrac{1}{+\infty} = 0.$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x} = \left[\dfrac{0}{0}\right] \overset{LP}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x}{1} = \lim\limits_{x\to 0} e^x = e^0 = 1.$

e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x-1}{x} = \left[\dfrac{0}{0}\right] \overset{LP}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x \cdot \ln a}{1} = \lim\limits_{x\to 0} a^x \cdot \ln a = a^0 \cdot \ln a = \ln a.$ ▲

U l'Hospitalova pravidla je obvyklé vícenásobné použití. Dostaneme-li po derivování opět limitu podílu a jsou-li splněny předpoklady věty 8.13, můžeme znovu zderivovat čitatele a jmenovatele atd.

Příklad 8.16. Vypočtěte následující limity:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x \sin x}$, b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2x^3+x-2}{3x^3-2x^2+x}$, c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\cos(\pi x)+1}{(x-1)^2}$.

Řešení.

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x\sin x} = \left[\dfrac{0}{0}\right] \overset{LP}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{0+\sin x}{\sin x + x\cos x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{\sin x + x\cos x} = \left[\dfrac{0}{0}\right] \overset{LP}{=}$

$\overset{LP}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x}{\cos x + \cos x + x(-\sin x)} = \dfrac{\cos 0}{\cos 0 + \cos 0 + 0(-\sin 0)} = \dfrac{1}{1+1+0} = \dfrac{1}{2}.$

b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2x^3+x-2}{3x^3-2x^2+x} = \left[\dfrac{+\infty}{+\infty}\right] \overset{LP}{=} \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{6x^2+1}{9x^2-4x+1} = \left[\dfrac{+\infty}{+\infty}\right] \overset{LP}{=}$

$\overset{LP}{=} \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{12x}{18x-4} = \left[\dfrac{+\infty}{+\infty}\right] \overset{LP}{=} \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{12}{18} = \dfrac{2}{3}.$

c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\cos(\pi x)+1}{(x-1)^2} = \left[\dfrac{0}{0}\right] \overset{LP}{=} \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{-\pi\sin(\pi x)}{2(x-1)} = \left[\dfrac{0}{0}\right] \overset{LP}{=} \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{-\pi^2\cos(\pi x)}{2} =$
$= \dfrac{\pi^2}{2}$. ▲

Příklad 8.17. Vypočtěte následující limity

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^{101}}{x^{100}}$, b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^9+2x^5-3}{x^7+x^3+2}$, c) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2+x}{x^8+x^4-5}$.

Řešení.

a) Jedná se o limitu $\left[\frac{+\infty}{+\infty}\right]$ a platí, že limita podílu derivací existuje, lze tedy l'Hospitalovo pravidla použít. Na první pohled je však jasné, že počítat tuto limitu l'Hospitalovým pravidlem by bylo velice neefektivní. Museli bychom stokrát derivovat, než bychom se dostali k výsledku. Mnohem snadnější je nejprve výraz v limitě upravit (pomocí krácení) a tím se vlastně hned dostaneme k výsledku:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{101}}{x^{100}} = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty.$$

b) Opět se jedná se o limitu $\left[\frac{+\infty}{+\infty}\right]$. Stejně jako v předchozím příkladě by bylo neefektivní používat l'Hospitalovo pravidlo. Použijeme proto známé úpravy — vytkneme z čitatele i jmenovatele nejvyšší mocninu x, jenž se vyskytuje ve jmenovateli. Obdobně jsme řešili příklad 6.39.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^9+2x^5-3}{x^7+x^3+2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^7\left(x^2+\frac{2}{x^2}-\frac{3}{x^7}\right)}{x^7\left(1+\frac{1}{x^4}+\frac{2}{x^7}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+\frac{2}{x^2}-\frac{3}{x^7}}{1+\frac{1}{x^4}+\frac{2}{x^7}} =$$
$$= \frac{+\infty+0-0}{1+0+0} = +\infty.$$

c) Analogicky jako v předchozím příkladě budeme vytýkat z čitatele i jmenovatele nejvyšší mocninu x, jež se vyskytuje ve jmenovateli.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+x}{x^8+x^4-5} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^8\left(\frac{1}{x^6}+\frac{1}{x^7}\right)}{x^8\left(1+\frac{1}{x^4}-\frac{5}{x^8}\right)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{1}{x^6}+\frac{1}{x^7}}{1+\frac{1}{x^4}-\frac{5}{x^8}} =$$
$$= \frac{0+0}{1+0-0} = 0.$$
▲

Z předchozích příkladů je vidět, že řešíme-li limitu pro x jdoucí do $\pm\infty$ typu $\frac{polynom}{polynom}$, pak je užití l'Hospitalova pravidla neefektivní. K řešení limity použijme raději úpravu vytýkáním. Obecně lze říci, že o výsledku rozhodne nejvyšší mocnina x. Je-li v čitateli polynom vyššího stupně než ve jmenovateli, pak je výsledek $+\infty$ nebo $-\infty$, je-li v čitateli polynom nižšího stupně než ve jmenovateli, je výsledek 0. Pokud je v čitateli i jmenovateli polynom stejného stupně, pak je výsledek dán koeficienty u těchto nejvyšších mocnin x — viz příklad 6.39.

V příkladě 8.17 bylo možno l'Hospitalovo pravidlo použít, ale bylo by to velmi neefektivní. Nyní si ukážeme případy, kdy l'Hospitalovo pravidlo použít nemůžeme.

Příklad 8.18. Vypočtěte $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

Řešení. Jedná se o limitu $\left[\frac{+\infty}{+\infty}\right]$, lze tedy uvažovat o použití l'Hospitalova pravidla.

Připravíme si derivaci jmenovatele. Funkce $\sqrt{x^2+1}$ je složená. Tudíž

$$\left(\sqrt{x^2+1}\right)' = \left[(x^2+1)^{\frac{1}{2}}\right]' = \frac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Pak

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \left[\frac{+\infty}{+\infty}\right] \overset{LP}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{LP}{=}$$
$$\overset{LP}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}},$$

což je výchozí limita. Vidíme, že l'Hospitalovo pravidlo nám při výpočtu této limity nepomůže. Otázka zní — mohli jsme v tomto případě vůbec použít l'Hospitalovo pravidlo? Podívejte se znovu na větu 8.13 a následnou poznámku. L'Hospitalovo pravidlo lze použít právě tehdy, jedná-li se o limitu příslušného typu a navíc existuje limita podílu derivací. My v této chvíli nevíme, zda limita podílu derivací existuje, neboť se nám ji dosud nepodařilo vypočítat. Nevíme tedy, zda je předchozí zápis korektní.

K řešení použijeme vytýkání a krácení — analogicky jako v příkladě 6.39

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1+0}} = 1.$$

▲

Příklad 8.19. Vypočtěte $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+\sin x}{x}$.

Řešení. Podívejme se nejprve, zda lze k výpočtu dané limity použít l'Hospitalovo pravidlo. Označme $f(x) = x + \sin x$, $g(x) = x$. Chceme vypočítat limitu $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$. Vidíme, že $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, jedná se tedy o typ limity vhodný k použití l'Hospitalova pravidla. Není třeba zkoumat limitu čitatele, pouze pro zájemce uvádíme, že $f(x) \geqq x - 1$, takže vzhledem k tomu, že $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1) = +\infty$, je podle poznámky 6.41 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Další předpoklad věty 8.13 ovšem je, že $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existuje. Ale v našem případě

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\cos x}{1}$$

neexistuje, nelze tedy l'Hospitalovo pravidlo použít.

Danou limitu vypočteme pomocí následujících úprav:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sin x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)=1+\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x}\overset{(\star)}{=}1+0=1.$$

($\star$): $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\sin x=0$, neboť $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ a funkce sinus je ohraničená (využili jsme věty 6.43). ▲

Limity typu $\infty-\infty$, $0\cdot(\pm\infty)$

Limitu typu $\infty-\infty$, $0\cdot(\pm\infty)$ nelze přímo počítat pomocí l'Hospitalova pravidla. Rozdíl, příp. součin funkcí je třeba nejprve převést na podíl funkcí. Tím dostaneme typ $\frac{0}{0}$ nebo $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$. Postup si ukážeme na příkladech.

Příklad 8.20. Vypočtěte následující limity:

a) $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)$, b) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{\mathrm{e}^x-1}\right)$, c) $\lim\limits_{x\to0^+}x\ln x$.

Řešení.

a) Jedná se o limitu typu $\infty-\infty$. Podíl dostaneme tak, že zlomky převedeme na společného jmenovatele:

$$\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)=\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x-x}{x\sin x}=\left[\frac{0}{0}\right]\overset{LP}{=}\lim_{x\to0^+}\frac{\cos x-1}{\sin x+x\cos x}=\left[\frac{0}{0}\right]\overset{LP}{=}$$

$$\overset{LP}{=}\lim_{x\to0^+}\frac{-\sin x}{\cos x+\cos x+x(-\sin x)}=\frac{-\sin 0}{\cos 0+\cos 0+0(-\sin 0)}=\frac{0}{2}=0.$$

b) Analogicky jako v předchozím příkladě převedeme rozdíl funkcí na podíl.

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{\mathrm{e}^x-1}\right)=\lim_{x\to0}\frac{(\mathrm{e}^x-1)-\sin x}{(\mathrm{e}^x-1)\sin x}=\left[\frac{0}{0}\right]\overset{LP}{=}$$

$$\overset{LP}{=}\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^x-\cos x}{\mathrm{e}^x\sin x+(\mathrm{e}^x-1)\cos x}=\left[\frac{0}{0}\right]\overset{LP}{=}$$

$$\overset{LP}{=}\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^x+\sin x}{\mathrm{e}^x\sin x+\mathrm{e}^x\cos x+\mathrm{e}^x\cos x-(\mathrm{e}^x-1)\sin x}=\frac{1+0}{0+1+1-0}=\frac{1}{2}.$$

c) Jedná se o limitu typu $0\cdot(-\infty)$. Podíl dostaneme uměle vytvořením složeného zlomku:

$$\lim_{x\to0^+}x\ln x=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\left[\frac{-\infty}{+\infty}\right]\overset{LP}{=}\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0^+}(-x)=0.$$

▲

Limity typu $f(x)^{g(x)}$

K úpravě limity tohoto typu použijeme vztah (6.2), vypočteme limitu funkce v exponentu a výsledek pak dostaneme aplikací důsledku 6.51.

Příklad 8.21. Vypočtěte následující limity:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$, b) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}$, c) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$.

Řešení.

a) K úpravě použijeme vztah (6.2) a dostáváme:

$$(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = \mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}\cdot\ln\cos x}.$$

Vypočteme limitu výrazu v exponentu:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\cdot\ln\cos x &= \lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{LP}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos x}\cdot(-\sin x)}{2x} = \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{2x\cos x} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{LP}{=} \lim_{x\to 0}\frac{-\cos x}{2\cos x + 2x(-\sin x)} = \\ &= \frac{-\cos 0}{2\cdot\cos 0 + 2\cdot 0\cdot(-\sin 0)} = -\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

S využitím důsledku 6.51 je tedy původní limita

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}.$$

b) Pomocí vztahu (6.2) a dostáváme:

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x} = \mathrm{e}^{\sin x\cdot\ln\frac{1}{x}}.$$

Vypočteme limitu výrazu v exponentu:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+}\sin x\cdot\ln\frac{1}{x} &= \lim_{x\to 0^+}\frac{-\ln x}{\frac{1}{\sin x}} = \left[\frac{+\infty}{+\infty}\right] \overset{LP}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{-\frac{1}{x}}{-\frac{\cos x}{\sin^2 x}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\sin^2 x}{x\cos x} = \\ &= \left[\frac{0}{0}\right] \overset{LP}{=} \frac{2\sin x\cos x}{\cos x - x\sin x} = \frac{0}{1} = 0.\end{aligned}$$

S využitím důsledku 6.51 je tedy původní limita

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x} = \mathrm{e}^0 = 1.$$

c) Opět nejprve upravíme:

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}.$$

Vypočteme limitu výrazu v exponentu:

$$\lim_{x\to\infty} x\,.\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \overset{LP}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} =$$
$$= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x}} = 1.$$

Pak podle důsledku 6.51 je původní limita $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$.

▲

Příklady na spojitost funkce

Příklad 8.22. Určete, zda je funkce f zadaná předpisem

$$f(x) = \begin{cases} 2x + \dfrac{\operatorname{tg} 2x}{x} & \text{pro } x \neq 0,\\ 2 & \text{pro } x = 0 \end{cases}$$

spojitá v bodě 0.

Řešení. Funkce f je spojitá v bodě 0, jestliže platí $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$. Musíme tedy spočítat limitu funkce f v bodě 0 a porovnat ji s funkční hodnotou v bodě 0.

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left(2x + \frac{\operatorname{tg} 2x}{x}\right) = \lim_{x\to 0} 2x + \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} 2x}{x} = 0 + \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} 2x}{x} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \overset{LP}{=}$$
$$\overset{LP}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{\cos^2 2x}}{1} = 2.$$

Tedy $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 2 = f(0)$. Funkce f je v bodě 0 spojitá.

▲

Pojmy k zapamatování

— Rolleova věta,
— Lagrangeova věta,
— Cauchyova věta,
— l'Hospitalovo pravidlo.

Kontrolní otázky

?

1. Vysvětlete příslušnou větu a její geometrický význam:
   a) Cauchyova-Bolzanova věta,
   b) Rolleova věta,
   c) Lagrangeova věta.
2. Jak postupujeme při určování intervalů, na nichž je zadaná funkce kladná, resp. záporná?
3. Co je to l'Hospitalovo pravidlo a v jakých případech jej lze použít? (Zaměřte se na přesnou formulaci předpokladů!)
4. Jak řešíme limity typu $0 \cdot (\pm\infty)$, $\infty - \infty$ a $f(x)^{g(x)}$?

Příklady k procvičení

!

1. Vypočtěte limity:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{\sin 2x}$, b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{\ln x}$, c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$,

d) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x-3}{x^2-8x+15}$, e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\sin x}{x^3}$, f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x}-2x-1}{\sin^2 3x}$,

g) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{x^3}$, h) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{\operatorname{cotg} x}$, i) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^3-1}{\ln x}$.

2. Vypočtěte limity:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} x e^{-x}$, b) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x\sin x} - \dfrac{1}{x^2}\right)$, c) $\lim\limits_{x\to 1^-} \ln x \cdot \ln(1-x)$,

d) $\lim\limits_{x\to +\infty} (\pi - 2\operatorname{arctg} x)\ln x$, e) $\lim\limits_{x\to \pm\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right)$, f) $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x} - \operatorname{cotg} x\right)$.

3. Vypočtěte limity:

a) $\lim\limits_{x\to 0^+} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}$, b) $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x}$, c) $\lim\limits_{x\to 0^+} (1+3\operatorname{tg}^2 x)^{\operatorname{cotg}^2 x}$,

d) $\lim\limits_{x\to \pm\infty} \left(\dfrac{x^2-1}{x^2}\right)^{x^4}$, e) $\lim\limits_{x\to 0} (\cos 3x)^{\frac{1}{x^2}}$, f) $\lim\limits_{x\to 0} \left[\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} + x\right)\right]^{\operatorname{cotg} 2x}$.

4. Určete, zda je funkce f zadaná předpisem

$$f(x) = \begin{cases} \cos x + \dfrac{\sin(x - \frac{\pi}{2})}{2x - \pi} & \text{pro } x \neq \frac{\pi}{2}, \\ 1 & \text{pro } x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

spojitá v bodě $\frac{\pi}{2}$.

5. Určete intervaly, na nichž daná funkce nabývá kladných, resp. záporných, hodnot.

   a) $f\colon y = x(x-2)(x+3)$, b) $f\colon y = x^2(x-1)^3(x+2)(x^2+1)$,

   c) $f\colon y = (x-1)^2(x+2)x^2(x+1)(x-5)$.

Autotest

1. Vypočtěte limity:

   a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{1-x}$, b) $\lim\limits_{x\to 1^+} x^{\frac{1}{1-x}}$,

   c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\arcsin x}{3x}$, d) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \left(\dfrac{x}{\operatorname{cotg} x} - \dfrac{\pi}{2\cos x}\right)$.

2. Určete intervaly, na nichž je funkce $f(x) = \mathrm{e}^x(2x + x^2)$ kladná, resp. záporná.
3. Určete, zda je funkce f zadaná předpisem

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x\cos 2x \sin 3x}{x^2 - \pi^2} & \text{pro } x \neq \pi, \\ -\frac{1}{2} & \text{pro } x = \pi \end{cases}$$

   spojitá v bodě π.

Kapitola 9

Průběh funkce

Průvodce studiem

Cílem této kapitoly je tzv. vyšetření průběhu funkce. Půjde zhruba o to, že u konkrétních funkcí budeme vyšetřovat takové vlastnosti, které nám umožní, abychom funkci výstižně charakterizovali a uměli rozumným způsobem nakreslit její graf.

Co vše k vyšetření průběhu funkce patří, nelze sice chápat dogmaticky, téměř vždy nás však zajímá definiční obor, sudost, lichost (zda je graf symetrický), periodičnost (zda je graf rozložitelný na pravidelně se opakující shodné části), spojitost, dále maximální intervaly, na nichž je funkce monotónní, lokální extrémy, maximální intervaly, na nichž je funkce konvexní, konkávní, inflexní body a asymptoty. Všechny získané informace nakonec použijeme pro znázornění grafu funkce.

Mnohé ze zmíněných vlastností již umíme určovat, některé další si doplníme právě v této kapitole. Bude se jednat především o monotonii a lokální extrémy, k jejichž vyšetřování použijeme první derivaci, a dále o konvexnost, konkávnost a inflexi, kde využijeme druhou derivaci dané funkce. Nakonec se naučíme určovat asymptoty grafu funkce, což jsou zhruba řečeno přímky, k nimž se graf funkce přibližuje.

Cíle

Po prostudování této kapitoly budete umět

- určit lokální extrémy a maximální intervaly monotonie dané funkce,
- určit inflexní body a maximální intervaly, kde je funkce konvexní resp. konkávní,
- najít asymptoty dané funkce, pokud existují,
- načrtnout graf funkce se všemi podstatnými kvalitativními rysy.

9.1 Monotonie

Než se začtete do této podkapitoly, připomeňte si definici 3.12 rostoucí, klesající, nerostoucí a neklesající funkce na množině M. Ujasněte si také rozdíl mezi monotonií a ryzí monotonií.

V kapitole 3 jsme si ukázali pár jednoduchých příkladů na určování intervalů ryzí monotonie dané funkce. Využívali jsme k tomu znalost definice. Postup ověřování monotonie pouze na základě definice však může být velmi pracný. Nyní si ukážeme efektivnější způsob, kdy o monotonii dané funkce na určitém intervalu rozhodneme na základě znalosti znaménka první derivace funkce na tomto intervalu.

Věta 9.1. *Nechť funkce f má na intervalu (a, b), $a, b \in \mathbb{R}^\star$, derivaci.*
Je-li

i) $f'(x) > 0$ *pro každé* $x \in (a, b)$, *pak je* f *rostoucí na* (a, b).
ii) $f'(x) \geqq 0$ *pro každé* $x \in (a, b)$, *pak je* f *neklesající na* (a, b).
iii) $f'(x) < 0$ *pro každé* $x \in (a, b)$, *pak je* f *klesající na* (a, b).
iv) $f'(x) \leqq 0$ *pro každé* $x \in (a, b)$, *pak je* f *nerostoucí na* (a, b).
v) $f'(x) = 0$ *pro každé* $x \in (a, b)$, *pak je* f *konstantní na* (a, b).

Důkaz. Uvedeme důkaz prvního tvrzení. Předpokládejme, že platí $f'(x) > 0$ pro každé $x \in (a, b)$. Zvolme libovolná čísla $x_1, x_2 \in (a, b)$ taková, že $x_1 < x_2$. Vzhledem k definici rostoucí funkce 3.12 potřebujeme dokázat, že $f(x_1) < f(x_2)$.
Uvažujme nyní interval $\langle x_1, x_2 \rangle$. Pak podle Lagrangeovy věty 8.7 existuje číslo $\xi \in (x_1, x_2)$ takové, že

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Číslo ξ konkrétně neznáme, ale vzhledem k předpokladu víme, že $f'(\xi) > 0$. Protože je jmenovatel předchozího zlomku $x_2 - x_1$ kladný a celý zlomek je také kladný, musí být kladný i čitatel. Tedy $f(x_2) - f(x_1) > 0$, tj. $f(x_1) < f(x_2)$. Důkazy dalších tvrzení věty se provedou analogicky. □

Příklad 9.2. Užitím předchozí věty dokažte, že funkce f, g, h jsou rostoucí na svých definičních oborech:

a) $f\colon y = \mathrm{e}^x$, b) $g\colon y = \operatorname{arctg} x$, c) $h\colon y = \ln x$.

Řešení.

a) $D(f) = \mathbb{R}$, $f'(x) = \mathrm{e}^x$. Platí, že $\mathrm{e}^x > 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}$, tj. $f'(x) > 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}$. Funkce f je tedy rostoucí na $D(f)$.
b) $D(g) = \mathbb{R}$, $g'(x) = \frac{1}{x^2+1}$. Platí, že $\frac{1}{x^2+1} > 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}$, tj. $g'(x) > 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}$. Funkce g je tedy rostoucí na $D(g)$.
c) $D(h) = (0, \infty)$, $h'(x) = \frac{1}{x}$. Pro každé $x \in (0, \infty)$ platí, že $\frac{1}{x} > 0$, tj. $h'(x) > 0$. Funkce h je tedy rostoucí na $D(h)$. ▲

Příklad 9.3. Určete maximální intervaly monotonie funkce $f: y = \dfrac{1}{x}$.

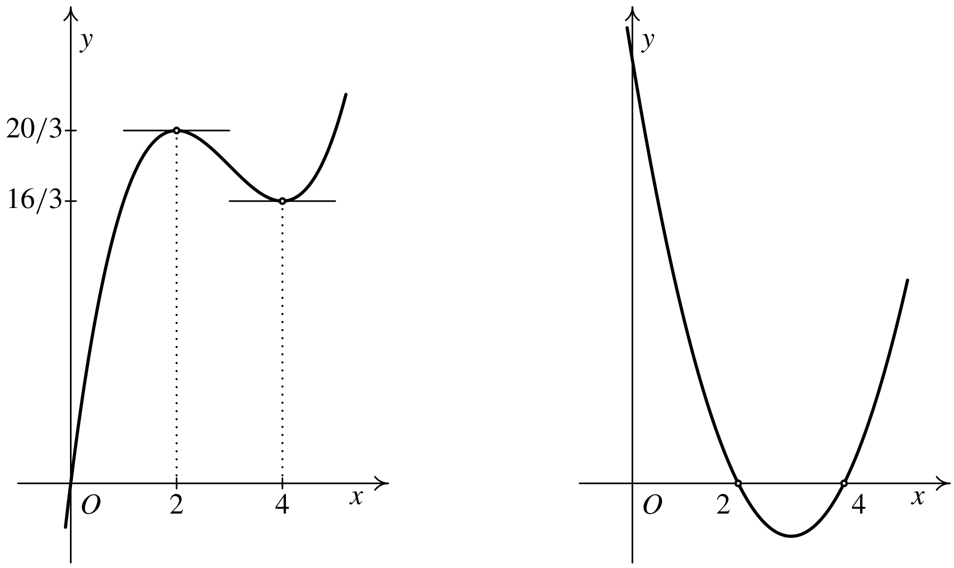
Řešení. Monotonii zadané funkce jsme již jednou vyšetřovali v kapitole 3 v příkladě 3.13. Využili jsme definici rostoucí a klesající funkce. Pokusme se nyní vyšetřit monotonii funkce f na základě věty 9.1.

Definiční obor $D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. První derivace $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$. Vidíme, že $f'(x) < 0$ pro každé $x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. Derivace je na celém $D(f)$ záporná, přesto funkce f není klesající na $D(f)$ (např. pro body -1, 1 platí $-1 < 1$, avšak $f(-1) < f(1)$, což je ve sporu s definicí klesající funkce). Důvodem je skutečnost, že $D(f)$ *není interval*. Funkce f je klesající na intervalu $(-\infty, 0)$ a na intervalu $(0, \infty)$, ale není klesající na $D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ (srovnej s příkladem 3.13). ▲

Poznámka 9.4.

1. Jak jsme viděli v příkladě 9.3, ve větě 9.1 je podstatné, že funkce se uvažuje na intervalu.
2. Uvědomte si, že tvrzení ve větě 9.1 jsou implikace. Platí: Je-li $f'(x) > 0$ pro každé $x \in (a, b)$, pak je f rostoucí na (a, b). Opačná implikace však neplatí. Není pravda, že je-li f rostoucí na (a, b), pak je $f'(x) > 0$ pro každé $x \in (a, b)$. Neplatnost opačné implikace ilustruje např. funkce $f(x) = x^3$ (je rostoucí na $\mathbb{R}$, ale v bodě $x = 0$ je derivace nulová, nikoliv kladná).
3. Vztah mezi monotonií dané funkce a znaménkem derivace si nejlépe uvědomíte, když si nakreslíte grafy jednoduchých funkcí a jejich derivací (např. $f(x) = x^2$, $f(x) = x^3$, $f(x) = \sin x$, $f(x) = \ln x, \dots$) My si jako příklad uveďme funkci trochu složitější — viz obr. 9.1. Vidíme, že derivace je na intervalu $(-\infty, 2)$ kladná (nad osou) a funkce je na tomtéž intervalu rostoucí, derivace je na intervalu $(2, 4)$ záporná (leží pod osou x) a funkce je na tomto intervalu klesající atd.
4. *Maximálními intervaly monotonie* rozumíme intervaly, které nejsou podmnožinou nějakého „většího“ intervalu, na kterém by byla daná funkce ještě monotónní. Monotonie funkce je definována (viz 3.12) pro libovolné intervaly (uzavřené, polouzavřené, otevřené), kdežto ve větě 9.1 se mluví pouze o otevřených intervalech. Při hledání maximálních intervalů monotonie si tedy budeme všímat i krajních bodů příslušných intervalů. Jestliže bude daná funkce v krajním bodě intervalu spojitá, pak lze tento bod zahrnout do příslušného intervalu monotonie. Snadno se totiž ověří, že platí: Je-li f spojitá na $\langle a, b\rangle$ a rostoucí (klesající, neklesající, nerostoucí) na (a, b), je f rostoucí (klesající, neklesající, nerostoucí) na $\langle a, b\rangle$. Analogické tvrzení platí i pro polouzavřené intervaly.

Při určování intervalů monotonie funkce f užitím věty 9.1 je třeba umět najít intervaly, na nichž je funkce f' kladná, resp. záporná. Jednou z možností, jak k tomuto úkolu přistupovat, je vyřešit příslušnou nerovnici. Tuto možnost jsme si ukázali na předchozích jednoduchých příkladech, kde bylo vyřešení příslušné nerovnice celkem snadné. Obecně ovšem tento postup bývá často zdlouhavý. Výhodnější bývá použití Cauchyovy-Bolzanovy věty 8.1. V předchozí kapitole jsme se pomocí této věty naučili určovat intervaly, na



a) Graf funkce
$f(x) = x^3/3 - 3x^2 + 8x$

b) Graf její derivace
$f'(x) = x^2 - 6x + 8$

Obr. 9.1: Vztah mezi funkcí a její derivací

nichž je funkce f kladná, resp. záporná. Nyní budeme postupovat obdobně, jen budeme pracovat s funkcí f' (první derivace funkce f) a hledat intervaly, na nichž je f' kladná, resp. záporná.

Příklad 9.5. Určete maximální intervaly ryzí monotonie funkce $f\colon\ y = x^2 e^x$.

Řešení.

1. Nejprve určíme definiční obor funkce f. Jelikož exponenciální funkce i polynom jsou definovány na celé množině reálných čísel, je $D(f) = \mathbb{R}$.
2. Vypočteme derivaci funkce f a určíme její definiční obor:

$$f'(x) = 2xe^x + x^2e^x = e^x \cdot (2x + x^2), \qquad D(f') = \mathbb{R}.$$

3. Určíme intervaly, na nichž je f' kladná, resp. záporná.
   a) Najdeme nulové body derivace, tj. řešíme rovnici $f'(x) = 0$:

$$f'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; e^x \cdot (2x + x^2) = 0 \;\Leftrightarrow\; 2x + x^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; x_1 = -2,\; x_2 = 0.$$

   b) Definiční obor $D(f')$ derivace rozdělíme nulovými body f' na disjunktní intervaly:

$$(-\infty, -2), \quad (-2, 0), \quad (0, \infty).$$

   c) Vybereme z každého intervalu jeden bod a určíme znaménko funkce f' na tomto intervalu. Např. v intervalu $(-\infty, -2)$ zvolíme bod -3, v intervalu $(-2, 0)$ bod -1

a v intervalu $(0, \infty)$ bod 1.

$$\begin{array}{lcl}
(-\infty, -2) & : & f'(-3) = \dfrac{3}{\mathrm{e}^3} > 0, \\
(-2, 0) & : & f'(-1) = -\dfrac{1}{\mathrm{e}} < 0, \\
(0, \infty) & : & f'(1) = 3\mathrm{e} > 0.
\end{array}$$

Tedy dle Cauchyovy-Bolzanovy věty je funkce f' (která je spojitá) kladná na intervalech $(-\infty, -2)$, $(0, \infty)$ a záporná na intervalu $(-2, 0)$.

4. Intervaly monotonie. Podle věty 9.1 je funkce f rostoucí na intervalu $(-\infty, -2)$ a na intervalu $(0, \infty)$ a klesající na intervalu $(-2, 0)$.
   Znaménka derivace a monotonii funkce f na příslušných intervalech můžeme zakreslit nad číselnou osu nebo zapsat do tabulky:

$$f'\colon \quad \overset{\nearrow}{+} \quad \underset{-2}{|} \quad \overset{\searrow}{-} \quad \underset{0}{|} \quad \overset{\nearrow}{+}$$

   Znaménko $+$ nad intervalem $(-\infty, -2)$ značí, že na tomto intervalu je derivace kladná a šipka $\nearrow$ značí, že je funkce f na tomto intervalu rostoucí. Obdobně minus značí zápornou derivaci a $\searrow$ klesající funkci f.

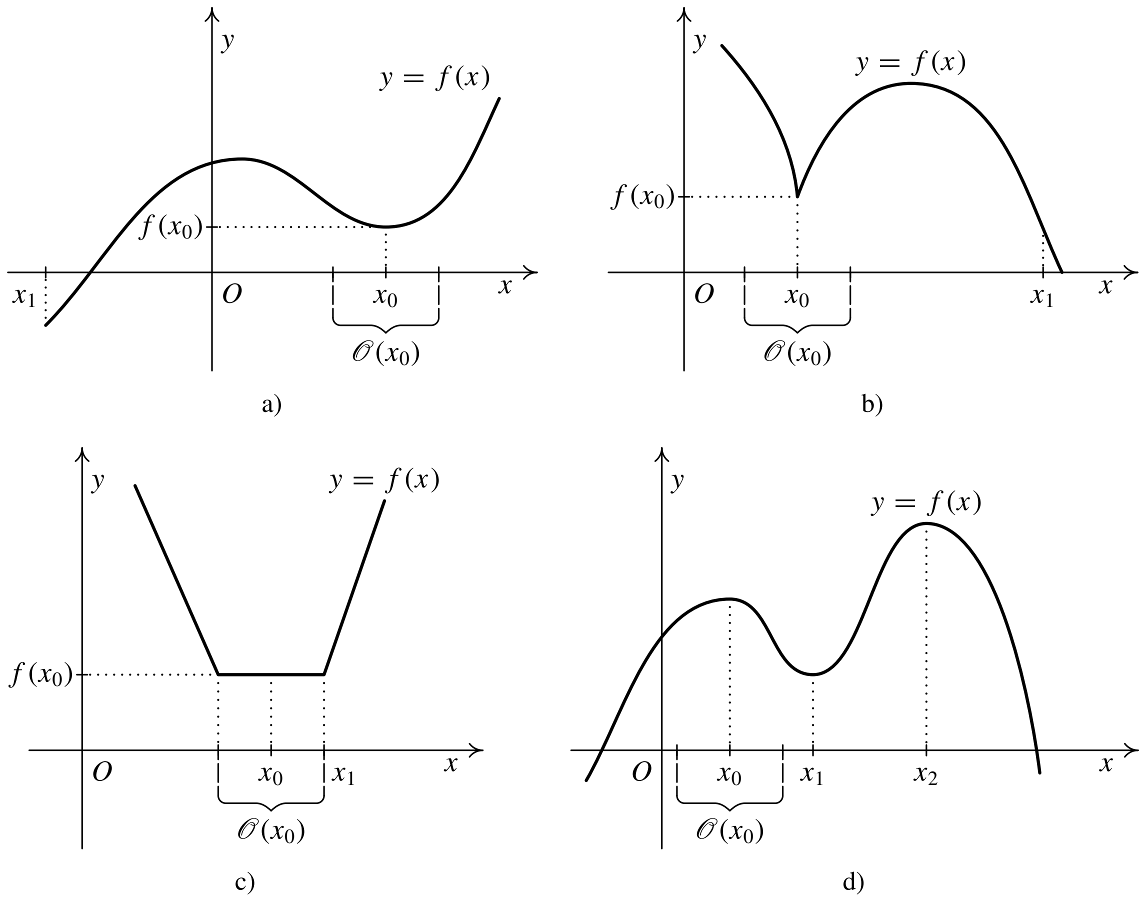
	$(-\infty, -2)$	$(-2, 0)$	$(0, \infty)$
f'	$+$	$-$	$+$
f	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

5. Závěr: Funkce f je rostoucí na intervalu $(-\infty, -2\rangle$ a na intervalu $\langle 0, \infty)$ a klesající na intervalu $\langle -2, 0\rangle$ (využili jsme toho, že funkce je v bodech -2 a 0 spojitá). ▲

Vzhledem k tomu, že určování intervalů monotonie úzce souvisí s určováním lokálních extrémů, další řešené příklady budou zařazeny za oddíl Lokální extrémy.

9.2 Lokální extrémy

Definice 9.6. Řekneme, že funkce f má v bodě x_0 *lokální minimum*, resp. *lokální maximum*, jestliže existuje okolí $\mathscr{O}(x_0)$ bodu x_0 takové, že pro všechna $x \in \mathscr{O}(x_0)$ je $f(x) \geqq f(x_0)$, resp. $f(x) \leqq f(x_0)$.
Řekneme, že funkce f má v bodě x_0 *ostré lokální minimum*, resp. *ostré lokální maximum*, jestliže existuje prstencové okolí $\mathscr{P}(x_0)$ bodu x_0 takové, že pro všechna $x \in \mathscr{P}(x_0)$ je $f(x) > f(x_0)$, resp. $f(x) < f(x_0)$.
Má-li funkce f v bodě x_0 lokální minimum, resp. lokální maximum, říkáme, že f má v bodě x_0 *lokální extrém*.



Obr. 9.2

Tedy má-li funkce f v bodě x_0 lokální minimum, znamená to, že v určitém okolí bodu x_0 není menší hodnota než $f(x_0)$. V některém vzdálenějším bodě tomu již tak být nemusí. Např. na obr. 9.2 a) a 9.2 b) je $f(x_1) < f(x_0)$, avšak bod x_1 vždy leží mimo dostatečně malé okolí $\mathcal{O}(x_0)$. Podobně má-li funkce f v bodě x_0 lokální maximum znamená to, že v jistém okolí bodu x_0 není větší hodnota než $f(x_0)$.

Obrázek 9.2 d) ukazuje, že funkce může mít více lokálních extrémů — kromě lokálního maxima v bodě x_0 má ještě lokální minimum v bodě x_1 a lokální maximum v bodě x_2. Dalším příkladem může být funkce $f\colon y = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$, která má dokonce nekonečně mnoho bodů lokálního maxima („vrcholků“) a nekonečně mnoho bodů lokálního minima („dolíků“).

Na obrázcích 9.2 a), 9.2 b), 9.2 d) jsou v bodě x_0 ostré lokální extrémy. Naproti tomu na obr. 9.2 c) je v bodě x_0 lokální minimum, které není ostré (v dostatečně malém okolí jsou všechny hodnoty stejné, protože funkce je zde konstantní). V tomto bodě je dokonce současně i lokální maximum (ve vyznačeném okolí $\mathcal{O}(x_0)$ totiž platí $f(x) = f(x_0)$). V bodě x_1 téhož obrázku je lokální minimum, které není ostré (vlevo od x_1 jsou vždy stejné funkční hodnoty). Lokální maximum to již pochopitelně není. Samozřejmě, že každé ostré lokální maximum je zároveň i lokálním maximem a ostré lokální minimum i lokálním minimem. Opak ovšem neplatí.

Naším úkolem bude najít body, v nichž má zadaná funkce lokální extrémy. Uvědomme si, že z definice 9.6 vyplývá, že pokud je definičním oborem uvažované funkce interval, nemůže jít o krajní body tohoto intervalu. Důvodem je skutečnost, že funkce není definována na celém okolí krajních bodů tohoto intervalu. Postup hledání lokálních extrémů se většinou skládá ze dvou kroků:

1. Vytipujeme „podezřelé“ body (tj. body, v nichž by mohl být lokální extrém; v jiných bodech extrém být nemůže).
2. Rozhodneme, ve kterém „podezřelém“ bodě je extrém a ve kterém není extrém.

Zamysleme se nad tím, které body mohou být „podezřelé“. Podle věty 9.1 víme, že má-li funkce f na celém intervalu (a, b) nenulovou derivaci, pak je na intervalu (a, b) rostoucí nebo klesající a v žádném bodě takového intervalu nemůže být extrém. Pokud tedy derivace existuje, přicházejí v úvahu pouze body, v nichž je $f'(x) = 0$. Tyto body hrají dále klíčovou roli, proto pro ně zavádíme speciální název.

Definice 9.7. Bod $x_0 \in D(f)$, ve kterém platí, že $f'(x_0) = 0$, se nazývá *stacionární bod*.

Příklad 9.8. Najděte stacionární body funkcí a) $f\colon y = x^2$, b) $g\colon y = x^3$.

Řešení.

a) $D(f) = \mathbb{R}$, $f'(x) = 2x$, $D(f') = \mathbb{R}$. Stacionární body:

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0.$$

Tedy jediným stacionárním bodem je bod $x_0 = 0$ — viz obr. 9.3 a).

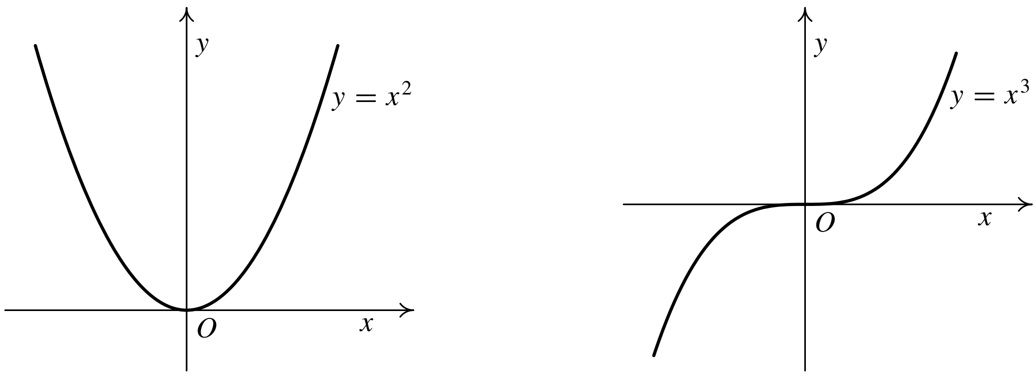
b) $D(g) = \mathbb{R}$, $g'(x) = 3x^2$, $D(f') = \mathbb{R}$. Stacionární body:

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0.$$

Tedy jediným stacionárním bodem je bod $x_0 = 0$ — viz obr. 9.3 b). ▲

Nyní již víme, že mezi „podezřelé body“ patří body stacionární (tedy body, v nichž první derivace existuje a je nulová). To je případ funkcí znázorněných na obr. 9.2 a) a 9.2 d). Podíváme-li se na obr. 9.2 b), vidíme, že v bodě x_0, v němž nastává lokální extrém, derivace neexistuje (graf nemá v bodě x_0 tečnu). Tedy dalšími „podezřelými body“ jsou body, v nichž první derivace neexistuje. Celkově dostáváme následující větu:

Věta 9.9. *Nechť funkce f má v bodě x_0 lokální extrém. Pak buď platí $f'(x_0) = 0$, anebo $f'(x_0)$ neexistuje.*



a) b)

Obr. 9.3

Poznámka 9.10. Věta 9.9 udává tzv. *nutnou podmínku* existence lokálního extrému. Říká, že pokud má funkce v bodě lokální extrém, pak nemůže nastat jiná situace než že se derivace v tomto bodě buď rovná nule, anebo vůbec neexistuje. Tedy pokud v daném bodě derivace existuje a nerovná se nule, nemůže zde být lokální extrém. Tato věta ovšem nedává návod, za jakých podmínek lze lokální extrém najít. Tyto podmínky budou obsaženy ve dvou následujících větách, tzv. *postačujících podmínkách* existence lokálního extrému.

V příkladě 9.8 jsme našli stacionární body funkcí f a g. Z grafů těchto funkcí (viz obr. 9.3) vidíme, že funkce f má v bodě $x_0 = 0$ lokální extrém (minimum) a funkce g v bodě $x_0 = 0$ nemá lokální extrém. Funkce f v levém okolí nuly klesá a v pravém okolí nuly roste, funkce g v levém i pravém okolí nuly roste. K tomu, aby nastal extrém, tedy zřejmě stačí, aby se funkce při přechodu přes daný bod změnila „z rostoucí na klesající“ nebo naopak. Přesný výsledek (tj. jak rozhodneme o „podezřelých bodech“) je obsažen v následující větě.

Věta 9.11. *Nechť funkce f je spojitá v bodě x_0 a má derivaci v nějakém prstencovém okolí $\mathscr{P}(x_0)$ bodu x_0. Je-li*

i) $f'(x) < 0$ *pro každé* $x \in \mathscr{P}^-(x_0)$ *a* $f'(x) > 0$ *pro každé* $x \in \mathscr{P}^+(x_0)$, *pak má funkce f v bodě x_0 ostré lokální minimum.*

ii) $f'(x) > 0$ *pro každé* $x \in \mathscr{P}^-(x_0)$ *a* $f'(x) < 0$ *pro každé* $x \in \mathscr{P}^+(x_0)$, *pak má funkce f v bodě x_0 ostré lokální maximum.*

Předpoklad spojitosti v bodě x_0 je zejména splněn, je-li v x_0 stacionární bod.

Stručně řečeno:
Mění-li f' znaménko při přechodu přes x_0, je v bodě x_0 lokální extrém.
Nemění-li f' znaménko při přechodu přes x_0, není v bodě x_0 lokální extrém.
Je-li změna $-+$, jde o minimum (klesá-roste, tj. $\searrow\nearrow$).
Je-li změna $+-$, jde o maximum (roste-klesá, tj. $\nearrow\searrow$).

Shrňme si naše dosavadní poznatky do jakéhosi návodu, jak postupovat při hledání lokálních extrémů a maximálních intervalů ryzí monotonie funkce f:

1. Určíme $D(f)$.
2. Vypočteme f' a $D(f')$.
3. Určíme intervaly, na nichž je f' kladná, resp. záporná (předpokládáme přitom, že $D(f')$ lze vyjádřit jako sjednocení disjunktních intervalů J_i a že f' je spojitá na každém z těchto intervalů):
   a) Určíme nulové body f', tj. řešíme rovnici $f'(x) = 0$.
   b) Každý interval J_i rozdělíme nulovými body f' na disjunktní intervaly.
   c) Vybereme z každého intervalu jeden bod a určíme znaménko f' v tomto bodě.
4. Určíme intervaly monotonie funkce f (s využitím věty 9.1) a lokální extrémy (v bodě $x_0 \in D(f)$, kde se mění charakter funkce „z rostoucí na klesající“, nastává ostré lokální maximum a v bodě, kde se mění charakter funkce „z klesající na rostoucí“, nastává ostré lokální minimum).

Poznamenejme, že intervaly, na nichž je f' kladná, resp. záporná můžeme určit i jinak, než je uvedeno v bodě 3), a to vyřešením nerovnic $f'(x) > 0$ a $f'(x) < 0$.

Příklad 9.12. Najděte lokální extrémy a maximální intervaly ryzí monotonie funkce

$$f\colon\ y = 12x^5 - 15x^4 - 40x^3 + 60.$$

Řešení.

1. $D(f) = \mathbb{R}$.
2. Vypočteme f' a $D(f')$:

$$f'(x) = 60x^4 - 60x^3 - 120x^2, \qquad D(f') = \mathbb{R}.$$

3. Určíme intervaly, na nichž je f' kladná, resp. záporná:
   a) Nulové body f':

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 60x^4 - 60x^3 - 120x^2 = 0.$$

Jedná se o algebraickou rovnici čtvrtého stupně, která má čtyři kořeny (obecně komplexní, počítáno s násobností). Ovšem při řešení těchto příkladů hledáme pouze reálná řešení, neboť chceme najít stacionární body, tedy body z definičního oboru funkce f' (a ten je pro každou funkci podmnožinou $\mathbb{R}$).
Rovnici upravíme na tvar:

$$60x^2(x^2 - x - 2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 60x^2 = 0 \quad \text{nebo} \quad x^2 - x - 2 = 0.$$

Vyřešením rovnice $60x^2 = 0$ dostaneme dvojnásobný kořen $x_{1,2} = 0$ a vyřešením rovnice $x^2 - x - 2 = 0$ obdržíme další dva kořeny

$$x_{3,4} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 2, \\ -1. \end{cases}$$

Všechny kořeny jsou reálné. Stacionární body tudíž jsou $x_{1,2} = 0$, $x_3 = 2$ a $x_4 = -1$.

b) $D(f')$ rozdělíme nulovými body f' na disjunktní intervaly:

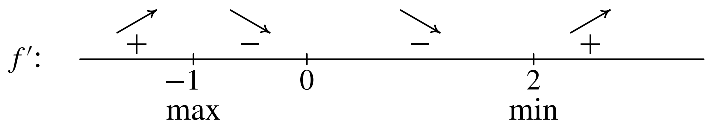
$$(-\infty, -1), \quad (-1, 0), \quad (0, 2), \quad (2, \infty).$$

c) V každém z „dílčích“ intervalů zvolíme jeden bod a v něm určíme znaménko funkce f'. Body zvolíme např. takto: $-2, -\frac{1}{2}, 1, 3$. Pak

$$f'(-2) = 960 > 0,\ f'\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{75}{4} < 0,\ f'(1) = -120 < 0,\ f'(3) = 2160 > 0.$$

Tedy dle Cauchyovy-Bolzanovy věty je f' na intervalech $(-1, 0)$ a $(0, 2)$ záporná a na intervalech $(-\infty, -1)$ a $(2, \infty)$ kladná.

4. Intervaly monotonie a lokální extrémy.
Dle věty 9.1 je funkce f na intervalu $(-\infty, -1)$ rostoucí, na intervalech $(-1, 0)$ a $(0, 2)$ klesající a na intervalu $(2, \infty)$ opět rostoucí. Funkce f má tedy v bodě $x_4 = -1$ ostré lokální maximum a v bodě $x_3 = 2$ ostré lokální minimum. V bodě $x_{1,2} = 0$ lokální extrém nemá. Vypočteme funkční hodnoty v bodech lokálních extrémů. Vyjde $f(-1) = 73$, $f(2) = -116$.
Znaménka derivace a monotonii na příslušných intervalech můžeme zakreslit nad číselnou osu



nebo zapsat do tabulky:

	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, 2)$	2	$(2, \infty)$
f'	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$
f	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$		$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$

5. Závěr: Funkce f je rostoucí intervalech $(-\infty, -1\rangle$, $\langle 2, \infty)$ a klesající na intervalu $\langle -1, 2\rangle$ (vzhledem ke spojitosti v bodě 0 jsme intervaly mohli sjednotit). Funkce f má tedy v bodě $x_4 = -1$ ostré lokální maximum a v bodě $x_3 = 2$ ostré lokální minimum. ▲

Příklad 9.13. Najděte lokální extrémy a maximální intervaly ryzí monotonie funkce

$$f : y = x\mathrm{e}^{-x^2}.$$

Řešení.

1. $D(f) = \mathbb{R}$.
2. Vypočteme f' a $D(f')$:

$$f'(x) = (x)'\mathrm{e}^{-x^2} + x\left(\mathrm{e}^{-x^2}\right)' = 1\mathrm{e}^{-x^2} + x\mathrm{e}^{-x^2}(-2x) = \mathrm{e}^{-x^2} - 2x^2\mathrm{e}^{-x^2}, \quad D(f') = \mathbb{R}.$$

3. Určíme intervaly, na nichž je f' kladná, resp. záporná.

   a) Najdeme nulové body f':

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{e}^{-x^2} - 2x^2\mathrm{e}^{-x^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{e}^{-x^2}(1-2x^2) = 0 \quad \overset{(\star)}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 - 2x^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x_{1,2} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$

   ($\star$): Výraz e^{-x^2} je vždy kladný, můžeme tedy celou rovnici tímto výrazem vydělit.

   b) $D(f')$ rozdělíme nulovými body na disjunktní intervaly

$$\left(-\infty, -1/\sqrt{2}\right), \quad \left(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}\right), \quad \left(1/\sqrt{2}, \infty\right).$$

   c) V každém intervalu zvolíme jeden bod, v němž určíme znaménko funkce f':

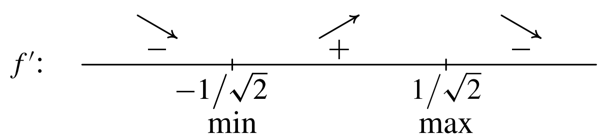
$$f'(-1) = -\frac{1}{\mathrm{e}} < 0, \quad f'(0) = 1 > 0, \quad f'(1) = -\frac{1}{\mathrm{e}} < 0.$$

   Tedy dle Cauchyovy-Bolzanovy věty je f' kladná na $\left(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}\right)$ a záporná na $\left(-\infty, -1/\sqrt{2}\right)$ a na $\left(1/\sqrt{2}, \infty\right)$.

4. Intervaly monotonie a lokální extrémy.
   Funkce je na $\left(-\infty, -1/\sqrt{2}\right)$ klesající, na $\left(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}\right)$ rostoucí a na $\left(1/\sqrt{2}, \infty\right)$ opět klesající. Podle věty 9.11 má tedy funkce f v bodě $x_1 = -1/\sqrt{2}$ ostré lokální minimum (změna charakteru funkce z klesající na rostoucí) a v bodě $x_2 = 1/\sqrt{2}$ ostré lokální maximum (změna charakteru funkce z rostoucí na klesající). Vypočteme ještě funkční hodnoty v bodech lokálních extrémů:

$$f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{e}^{-\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} = \pm\frac{1}{\sqrt{2\mathrm{e}}}\,.$$

   Znaménka derivace a monotonii na příslušných intervalech můžeme zakreslit nad číselnou osu



   nebo zapsat do tabulky:

	$\left(-\infty, -1/\sqrt{2}\right)$	$-1/\sqrt{2}$	$\left(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}\right)$	$1/\sqrt{2}$	$\left(1/\sqrt{2}, \infty\right)$
f'	$-$	0	$+$	0	$-$
f	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$

5. Závěr: Funkce je klesající na intervalech $\left(-\infty, -1/\sqrt{2}\right\rangle$ a $\left\langle 1/\sqrt{2}, \infty\right)$ a rostoucí na intervalu $\left\langle -1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}\right\rangle$. V bodě $x_1 = -1/\sqrt{2}$ je ostré lokální minimum a v bodě $x_2 = 1/\sqrt{2}$ ostré lokální maximum.

▲

Příklad 9.14. Najděte lokální extrémy a maximální intervaly ryzí monotonie funkce

$$f\colon y = \frac{x^2}{\ln x}\,.$$

Řešení.

1. Nejprve určíme definiční obor funkce f. Jelikož logaritmická funkce je definována pouze na intervalu $(0, \infty)$, musí být $x > 0$. Dále musí být jmenovatel zlomku nenulový, tj. $\ln x \neq 0$, tudíž $x \neq 1$. Celkem je proto $D(f) = (0, 1) \cup (1, \infty)$.
2. Vypočteme derivaci funkce f a její definiční obor:

$$f'(x) = \frac{2x \cdot \ln x - x^2 \cdot \frac{1}{x}}{\ln^2 x} = \frac{2x \ln x - x}{\ln^2 x} = \frac{x \cdot (2 \ln x - 1)}{\ln^2 x}\,, \qquad D(f') = D(f).$$

3. Určíme intervaly, na nichž je f' kladná, resp. záporná.
   a) Najdeme nulové body f':

$$f'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{x \cdot (2 \ln x - 1)}{\ln^2 x} = 0 \;\Leftrightarrow\; x \cdot (2 \ln x - 1) = 0 \;\overset{(\star)}{\Leftrightarrow}$$
$$\overset{(\star)}{\Leftrightarrow}\; 2 \ln x - 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; \ln x = \frac{1}{2} \;\Leftrightarrow\; x = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}}.$$

   $(\star)$: Protože je $x \neq 0$, můžeme jím celou rovnici vydělit.

   Dostali jsme jeden nulový bod $x_0 = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\mathrm{e}}$.

   b) Každý z intervalů tvořících $D(f')$ rozdělíme nulovými body na disjunktní intervaly

$$(0, 1), \quad (1, \sqrt{\mathrm{e}}), \quad (\sqrt{\mathrm{e}}, \infty).$$

   c) V každém z těchto intervalů zvolíme jeden bod a určíme znaménko f' ve zvolených bodech. Např. v intervalu $(0, 1)$ zvolíme bod $\frac{1}{\mathrm{e}}$, v intervalu $\left(1, \sqrt{\mathrm{e}}\right)$ zvolíme bod $\sqrt[4]{\mathrm{e}}$ a v intervalu $\left(\sqrt{\mathrm{e}}, \infty\right)$ bod e.

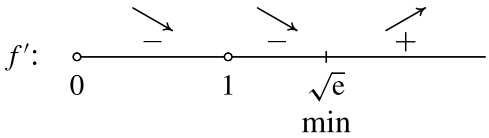
$$(0, 1) \quad : \quad f'\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right) = \frac{\frac{1}{\mathrm{e}}\left(2 \ln \frac{1}{\mathrm{e}} - 1\right)}{\left(\ln \frac{1}{\mathrm{e}}\right)^2} = \frac{\frac{1}{\mathrm{e}}(-2 - 1)}{(-1)^2} = -\frac{3}{\mathrm{e}} < 0,$$

$$\left(1, \sqrt{\mathrm{e}}\right) \quad : \quad f'\left(\sqrt[4]{\mathrm{e}}\right) = \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{4}}\left(2 \ln \mathrm{e}^{\frac{1}{4}} - 1\right)}{\left(\ln \mathrm{e}^{\frac{1}{4}}\right)^2} = \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{4}}\left(2 \cdot \frac{1}{4} - 1\right)}{\left(\frac{1}{4}\right)^2} =$$
$$= \frac{-\frac{1}{2} \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{4}}}{\frac{1}{16}} = -8\,\mathrm{e}^{\frac{1}{4}} < 0,$$

$$\left(\sqrt{\mathrm{e}}, \infty\right) \quad : \quad f'(\mathrm{e}) = \frac{\mathrm{e}(2 \ln \mathrm{e} - 1)}{(\ln \mathrm{e})^2} = \frac{\mathrm{e}(2 - 1)}{1^2} = \mathrm{e} > 0.$$

Tedy dle Cauchyovy-Bolzanovy věty je první derivace na intervalu $(0, 1)$ záporná, na intervalu $\left(1, \sqrt{e}\right)$ rovněž záporná a na intervalu $\left(\sqrt{e}, \infty\right)$ kladná.

4. Intervaly monotonie a lokální extrémy.
   Dle věty 9.1 je funkce f na intervalu $(0, 1)$ klesající, na intervalu $\left(1, \sqrt{e}\right)$ také klesající a na intervalu $\left(\sqrt{e}, \infty\right)$ rostoucí. V bodě $\sqrt{e}$ nastává lokální minimum.
   Znaménka derivace a monotonii na příslušných intervalech můžeme zakreslit nad číselnou osu



nebo zapsat do tabulky:

	$(0, 1)$	$\left(1, \sqrt{e}\right)$	$\sqrt{e}$	$\left(\sqrt{e}, \infty\right)$
f'	$-$	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$

5. Závěr: Funkce f je klesající na intervalech $(0, 1)$ a $\left(1, \sqrt{e}\right\rangle$ a rostoucí na $\left\langle\sqrt{e}, \infty\right)$. V bodě $\sqrt{e}$ nastává ostré lokální minimum. ▲

Příklad 9.15. Najděte lokální extrémy a maximální intervaly ryzí monotonie funkce

$$f\colon\ y = x - 2\sin x, \quad x \in (0, 2\pi).$$

Řešení.

1. Definiční obor je zadán, tj. $D(f) = (0, 2\pi)$.
2. První derivace a její definiční obor:

$$f'(x) = 1 - 2\cos x, \qquad D(f') = D(f) = (0, 2\pi).$$

3. Určíme intervaly, na nichž je f' kladná, resp. záporná.
   a) Najdeme nulové body f', tj. řešíme rovnici $f'(x) = 0$.

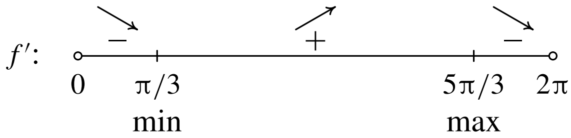
$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos x = \frac{1}{2},\ x \in (0, 2\pi) \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{3} \vee x = \frac{5\pi}{3}.$$

   b) $D(f')$ rozdělíme nulovými body f' na disjunktní intervaly:

$$\left(0, \frac{\pi}{3}\right), \quad \left(\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right), \quad \left(\frac{5\pi}{3}, 2\pi\right).$$

   c) Vybereme z každého intervalu jeden bod a určím znaménko f'. Výsledek je shrnut v následující tabulce.

4. Znaménka derivace a monotonii na příslušných intervalech zakreslíme nad číselnou osu



nebo zapíšeme do tabulky:

	$(0, \pi/3)$	$\pi/3$	$(\pi/3, 5\pi/3)$	$5\pi/3$	$(5\pi/3, 2\pi)$
f'	$-$	0	$+$	0	$-$
f	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$

5. Vzhledem ke spojitosti funkce f na $D(f)$ platí, že je rostoucí na intervalu $\left\langle \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \right\rangle$ a klesající na intervalech $\left(0, \frac{\pi}{3}\right\rangle$ a $\left\langle \frac{5\pi}{3}, 2\pi\right)$. V bodě $x = \frac{\pi}{3}$ má funkce ostré lokální minimum a v bodě $x = \frac{5\pi}{3}$ ostré lokální maximum. ▲

Pro zájemce:

Nyní si pro zajímavost uvedeme postup při hledání intervalů monotonie a lokálních extrémů využívající úpravy nerovnic.

Příklad 9.16. Najděte maximální intervaly ryzí monotonie a lokální extrémy funkce

$$f\colon y = \frac{1}{x} \cdot \ln \frac{1}{x}\,.$$

Řešení.

1. Určíme definiční obor funkce f. Logaritmus je definován pouze pro kladná reálná čísla, tedy $D(f) = (0, \infty)$.
2. Vypočteme derivaci funkce f:

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} \cdot \ln \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{x^2} \cdot \left(\ln \frac{1}{x} + 1\right).$$

3. Určíme intervaly, na nichž je f' kladná, resp. záporná.
   i) Určíme intervaly kde je $f'(x) > 0$:

$$f'(x) > 0 \;\Leftrightarrow\; -\frac{1}{x^2} \cdot \left(\ln \frac{1}{x} + 1\right) > 0.$$

Výraz $-\frac{1}{x^2}$ je záporný pro každé $x \in D(f)$, tedy výraz v závorce $\left(\ln \frac{1}{x} + 1\right)$ musí být také záporný, aby byl výsledný součin $-\frac{1}{x^2} \cdot \left(\ln \frac{1}{x} + 1\right)$ kladný.

$$\ln \frac{1}{x} + 1 < 0 \;\Leftrightarrow\; \ln \frac{1}{x} < -1 \;\Leftrightarrow\; \ln \frac{1}{x} < \ln \mathrm{e}^{-1}.$$

Odlogaritmováním (využíváme skutečnost, že e^x je rostoucí funkce) dostaneme:

$$\frac{1}{x} < \mathrm{e}^{-1} \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{x} < \frac{1}{\mathrm{e}} \Leftrightarrow x > \mathrm{e}.$$

Tedy f' je kladná na intervalu (e, ∞).

ii) Určíme intervaly, kde je $f'(x) < 0$:

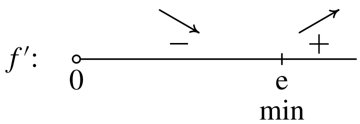
$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{x^2} \cdot \left(\ln\frac{1}{x} + 1\right) < 0.$$

Obdobně jako v předchozím bodě, výraz $-\frac{1}{x^2}$ je záporný, takže výraz v závorce musí být kladný, aby byl výsledný součin záporný. Tedy

$$\ln\frac{1}{x} + 1 > 0 \;\Leftrightarrow\; \ln\frac{1}{x} > -1 \;\Leftrightarrow\; \ln\frac{1}{x} > \ln\mathrm{e}^{-1} \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{x} > \frac{1}{\mathrm{e}} \Leftrightarrow x < \mathrm{e}.$$

Vzhledem k tomu, že definičním oborem funkce f jsou pouze kladná reálná čísla, je f' záporná na intervalu $(0, \mathrm{e})$.

4. Intervaly monotonie a lokální extrémy.
Zjistili jsme, že funkce na intervalu $(0, \mathrm{e})$ klesá a na intervalu (e, ∞) roste, tedy díky spojitosti má v bodě $x_0 = \mathrm{e}$ ostré lokální minimum. Znaménka derivace a monotonii na příslušných intervalech vyznačíme nad číselnou osu



nebo zapíšeme do tabulky:

	$(0, \mathrm{e})$	e	(e, ∞)
f'	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$

5. Závěr: Funkce f je klesající na intervalu $(0, \mathrm{e}\rangle$ a rostoucí na $\langle \mathrm{e}, \infty)$. V bodě e nastává ostré lokální minimum. ▲

Pokuste se vyřešit předchozí příklad i užitím Cauchyovy-Bolzanovy věty. Tím, že budete mít před sebou dva způsoby řešení jedné úlohy, uvidíte výhody i nevýhody obou možností a můžete se rozhodnout, který postup je pro vás přijatelnější, a budete jej dále využívat k řešení podobných úloh.

Na závěr si ukážeme jiný způsob, jak rozhodnout, zda má daná funkce ve stacionárním bodě lokální extrém. Jedná se opět o tzv. *postačující podmínku* existence lokálního extrému, podobně jak tomu bylo u věty 9.11. Geometrický význam následujícího tvrzení bude zřejmý z další části textu (oddíl 9.3).

Věta 9.17. *Nechť $f'(x_0) = 0$ a existuje $f''(x_0)$. Je-li:*

i) $f''(x_0) < 0$, *pak má funkce f v bodě x_0 ostré lokální maximum.*

ii) $f''(x_0) > 0$, *pak má funkce f v bodě x_0 ostré lokální minimum.*

Výhodou postupu založeného na předchozí větě je, že nemusíme určovat intervaly monotonie funkce f. Nevýhodou je, že funkce f musí mít ve stacionárních bodech druhou derivaci.

Příklad 9.18. Najděte lokální extrémy funkce $f: y = 2x^3 - 3x^2 - 12x$.

Řešení. Jedná se o polynom, definiční obor funkce i všech derivací je tedy $\mathbb{R}$.
Určíme první derivaci : $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$.
Stacionární body:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 6x - 12 = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -1,\ x_2 = 2.$$

Vypočteme druhou derivaci: $f''(x) = 12x - 6$.
Dosadíme stacionární body: $f''(-1) = -18 < 0$, $f''(2) = 18 > 0$.
V bodě $x_1 = -1$ je tedy ostré lokální maximum, v bodě $x_2 = 2$ je ostré lokální minimum.

▲

Věta 9.17 neřeší případ, kdy je $f''(x_0) = 0$. Jak postupovat v takovém případě, se dozvíme z věty následující.

Věta 9.19. *Nechť $f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ a nechť $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ pro nějaké $n \in \mathbb{N}$, $n \geqq 2$. Je-li:*

i) *n liché, pak funkce f nemá v bodě x_0 lokální extrém.*
ii) *n sudé a $f^{(n)}(x_0) > 0$, pak funkce f má v bodě x_0 ostré lokální minimum.*
iii) *n sudé a $f^{(n)}(x_0) < 0$, pak funkce f má v bodě x_0 ostré lokální maximum.*

Příklad 9.20. Najděte lokální extrémy funkce f, je-li:
a) $f: y = x^4$, b) $f: y = x^5$, c) $f: y = 12x^5 - 15x^4 - 40x^3 + 60$.

Řešení. Ve všech třech případech se jedná o polynomy, definiční obory všech tří funkcí i všech jejich derivací jsou rovny $\mathbb{R}$.

a) Určíme první derivaci : $f'(x) = 4x^3$.
Stacionární bod: $x_0 = 0$.
Vypočteme druhou derivaci a dosadíme bod x_0: $f''(x) = 12x^2$, $f''(0) = 0$.
Vypočteme třetí derivaci a dosadíme bod x_0: $f'''(x) = 24x$, $f'''(0) = 0$.
Vypočteme čtvrtou derivaci a dosadíme bod x_0: $f^{(4)}(x) = 24$, $f^{(4)}(0) = 24 > 0$.
Dle předchozí věty má funkce f v bodě $x_0 = 0$ ostré lokální minimum.

b) Určíme první derivaci : $f'(x) = 5x^4$.
Stacionární bod: $x_0 = 0$.
Vypočteme druhou derivaci a dosadíme bod x_0: $f''(x) = 20x^3$, $f''(0) = 0$.
Vypočteme třetí derivaci a dosadíme bod x_0: $f'''(x) = 60x^2$, $f'''(0) = 0$.
Vypočteme čtvrtou derivaci a dosadíme bod x_0: $f^{(4)}(x) = 120x$, $f^{(4)}(0) = 0$.
Vypočteme pátou derivaci: $f^{(5)}(x) = 120$, $f^{(5)}(0) \neq 0$.
Dle předchozí věty nemá funkce f v bodě $x_0 = 0$ lokální extrém.

c) Lokální extrémy zadané funkce jsme již vyšetřovali v příkladě 9.12 využitím věty 9.11. Nyní k výpočtu použijeme větu 9.19.
Určíme první derivaci : $f'(x) = 60x^4 - 60x^3 - 120x^2$.
Nalezneme stacionární body: $x_1 = -1$, $x_2 = 0$ a $x_3 = 2$.
Vypočteme druhou derivaci: $f''(x) = 240x^3 - 180x^2 - 240x$.
Dosadíme stacionární body:
$f''(-1) = -180 < 0$. Funkce f má v bodě $x_1 = -1$ ostré lokální maximum.
$f''(2) = 720 > 0$. Funkce f má v bodě $x_3 = 2$ ostré lokální minimum.
$f''(0) = 0$. Vypočteme třetí derivaci: $f'''(x) = 720x^2 - 360x - 240$
$f'''(0) = -240 \neq 0$. Funkce f nemá v $x_2 = 0$ lokální extrém. ▲

Příklad 9.21. Najděte lokální extrémy funkce f dané předpisem

$$f(x) = x^3 \mathrm{e}^{x^2}.$$

Řešení. Vypočteme první derivaci:

$$f'(x) = 3x^2\mathrm{e}^{x^2} + x^3\mathrm{e}^{x^2} \cdot 2x = \mathrm{e}^{x^2}x^2(3 + 2x^2).$$

Stacionární bod je $x_0 = 0$.
Vypočteme druhou derivaci:

$$f''(x) = (\mathrm{e}^{x^2}2x \cdot x^2 + \mathrm{e}^{x^2} \cdot 2x)(3 + 2x^2) + 4x^3\mathrm{e}^{x^2} = x\mathrm{e}^{x^2}(4x^4 + 14x^2 + 6).$$

Dosadíme bod $x_0 = 0$: $f''(0) = 0$.
Vypočteme třetí derivaci:

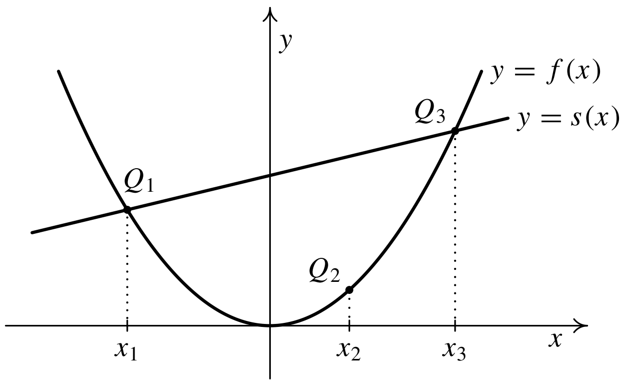
$$\begin{aligned} f'''(x) &= (\mathrm{e}^{x^2} + x\mathrm{e}^{x^2} \cdot 2x)(4x^4 + 14x^2 + 6) + x\mathrm{e}^{x^2}(16x^3 + 28x) = \\ &= \mathrm{e}^{x^2}\Big((1 + 2x^2)(4x^4 + 14x^2 + 6) + x(16x^3 + 28x)\Big) = \\ &= \mathrm{e}^{x^2}(8x^6 + 48x^4 + 54x^2 + 6). \end{aligned}$$

Dosadíme bod $x_0 = 0$: $f'''(0) = 6$. Protože je $f'''(0) \neq 0$, funkce f v nemá v bodě 0 lokální extrém. Protože žádné jiné body podezřelé z lokálních extrémů nemáme, funkce nemá žádný lokální extrém. ▲

Uvědomte si, že lokální extrémy funkce mohou nastat jednak ve stacionárních bodech, jednak v bodech, kde derivace neexistuje. Postupem, který jsme uvedli na straně 251, určíme všechny lokální extrémy. Postup založený na větě 9.19 slouží k ověření lokálních extrémů pouze ve stacionárních bodech. Neříká nic o bodech, v nichž derivace neexistuje. Je proto vhodný pouze u funkcí, které mají derivace na celém definičním oboru, a navíc pokud nedostaneme derivováním složitou funkci. Jak jsme viděli na předchozích příkladech, použití věty 9.19 bylo výhodné v případě polynomů, v případě funkce $f(x) = x^3\mathrm{e}^{x^2}$ by bylo vzhledem k složitějším derivacím rychlejší použití postupu uvedeného na straně 251. Zkuste si příklad spočítat oběma způsoby.

9.3 Konvexnost, konkávnost

V předchozích podkapitolách jsme se naučili vyšetřovat monotonii dané funkce a určit, ve kterých bodech nabývá funkce lokálních extrémů. To spolu se znalostí definičního oboru, spojitosti, příp. sudosti, lichosti a periodičnosti umožňuje vytvořit si hrubou představu o grafu této funkce. Prozatím však neumíme rozhodnout o tom, zda je graf funkce mezi dvěma body „prohnutý dolů“ nebo „nahoru“. Podívejme se na tuto situaci podrobněji.



Obr. 9.4: Graf konvexní funkce

Nechť f je funkce, jejíž graf je znázorněn na obr 9.4. Nechť I je interval. Zvolme tři body x_1, x_2, x_3 z tohoto intervalu tak, aby platilo $x_1 < x_2 < x_3$. Sestrojme sečnu s grafu funkce f procházející body $(x_1, f(x_1))$, $(x_3, f(x_3))$ — viz obr. 9.4. Zkoumejme nyní, zda bod $(x_2, f(x_2))$ leží „nad“ anebo „pod sečnou“ s. Z obrázku vidíme, že leží „pod sečnou“. Pokud bychom zvolili jiný bod x_2 ležící „mezi“ body x_1 a x_3, opět bude ležet „pod sečnou“. Pokud tato skutečnost platí i pro libovolnou volbu všech tří bodů x_1, x_2, x_3 (se zachováním výchozího vztahu $x_1 < x_2 < x_3$) z intervalu I, pak budeme říkat, že *funkce f je ryze konvexní na intervalu I.*

Nyní předchozí úvahy zpřesníme. Nechť $I \subset D(f)$ je interval, $x_1, x_2, x_3 \in I$, $x_1 < x_2 < x_3$. Chceme určit rovnici sečny procházející body $(x_1, f(x_1))$, $(x_3, f(x_3))$.

Víme, že rovnice přímky procházející danými body (a_1, a_2), (b_1, b_2) $(a_1 \neq b_1)$ je dána vztahem $y - a_2 = \frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1}(x - a_1)$. S využitím tohoto vztahu dostáváme rovnici sečny

$$s: \quad y = f(x_1) + \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \cdot (x - x_1).$$

Skutečnost, že bod $(x_2, f(x_2))$ leží „pod sečnou“, můžeme zapsat takto:

$$f(x_2) < s(x_2)$$

neboli

$$f(x_2) < f(x_1) + \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \cdot (x_2 - x_1).$$

Podstatný je zde znak $<$. Signalizuje, že bod leží „pod sečnou“.

Nyní shrňme získané poznatky do definice.

Definice 9.22. Řekneme, že funkce f je *ryze konvexní na intervalu* $I \subset D(f)$, jestliže pro všechna $x_1, x_2, x_3 \in I$ taková, že $x_1 < x_2 < x_3$, platí

$$f(x_2) < f(x_1) + \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \cdot (x_2 - x_1).$$

Nahradíme-li v definici znak $<$ znakem $\leqq$, dostáváme funkci *konvexní na I*. Je-li $I = D(f)$, pak říkáme, že funkce f je *ryze konvexní*, resp. *konvexní*.

Poznámka 9.23.

1. Definice říká, že funkce f je *ryze konvexní* na intervalu I, jestliže pro všechna $x_1, x_2, x_3 \in I$ taková, že $x_1 < x_2 < x_3$, leží bod $Q_2 = (x_2, f(x_2))$ pod sečnou určenou body $Q_1 = (x_1, f(x_1))$, $Q_3 = (x_3, f(x_3))$. Funkce je *konvexní*, jestliže bod Q_2 leží pod sečnou nebo na sečně určené body Q_1, Q_3.
   Příkladem funkce, která není ryze konvexní, ale je konvexní na $\mathbb{R}$, je funkce absolutní hodnota — graf viz příklad 3.6.
2. Podmínka v definici musí být splněna pro každou trojici bodů z I. Nestačí nalézt tři body x_1, x_2, x_3, pro něž je podmínka splněna. Např. pro funkci $f\colon y = x^3$ a body $x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 2$ platí $f(x_2) = 0$,

   $$s(x_2) = f(x_1) + \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \cdot (x_2 - x_1) = -1 + \frac{8+1}{3} \cdot 1 = 2,$$

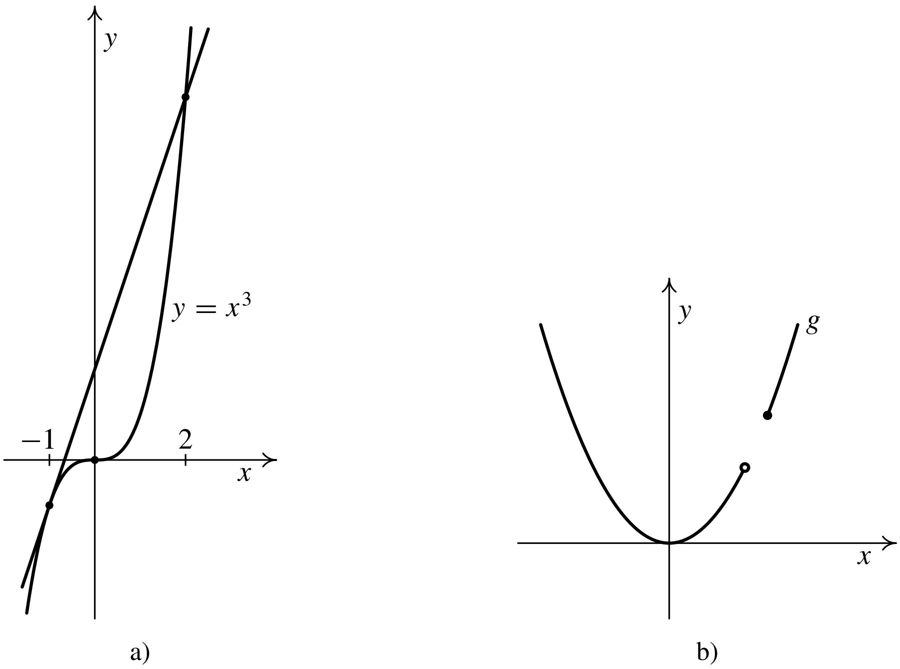
   tj. $0 < 2$. Tedy podmínka z definice je pro body $-1, 0, 2$ splněna, ale funkce f není ryze konvexní na $\mathbb{R}$ — viz obr. 9.5 a).
3. I v definici musí být interval! Např. funkce g, jejíž graf je znázorněn na obr. 9.5 b), není ryze konvexní ani konvexní na svém definičním oboru.

Analogicky lze z geometrické interpretace dojít k pojmu *ryze konkávní funkce*. Jedná se zde o situaci, kdy bod $(x_2, f(x_2))$ leží „nad sečnou“ grafu funkce f procházející body $(x_1, f(x_1))$, $(x_3, f(x_3))$ — viz obr. 9.6.

Definice 9.24. Řekneme, že funkce f je *ryze konkávní na intervalu* $I \subset D(f)$, jestliže pro všechna $x_1, x_2, x_3 \in I$ taková, že $x_1 < x_2 < x_3$, platí

$$f(x_2) > f(x_1) + \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \cdot (x_2 - x_1).$$

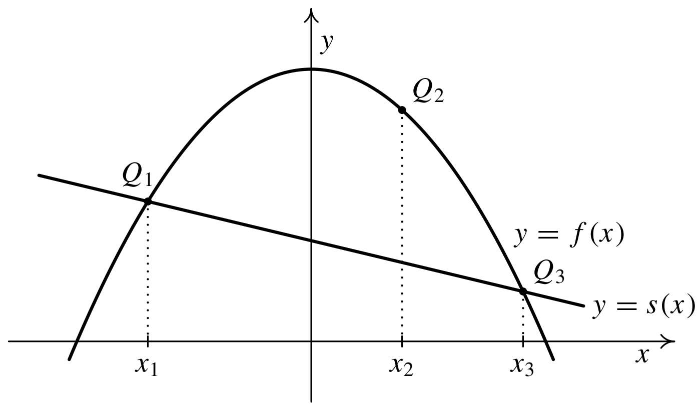
Nahradíme-li v definici znak $>$ znakem $\geqq$, dostáváme funkci *konkávní na I*. Je-li $I = D(f)$, pak říkáme, že funkce f je *ryze konkávní*, resp. *konkávní*.



Obr. 9.5

Poznámka 9.25.

1. Definice říká, že funkce f je *ryze konkávní* na intervalu I, jestliže pro všechna $x_1, x_2, x_3 \in I$ taková, že $x_1 < x_2 < x_3$, leží bod $Q_2 = (x_2, f(x_2))$ nad sečnou určenou body $Q_1 = (x_1, f(x_1))$, $Q_3 = (x_3, f(x_3))$. Funkce je *konkávní*, jestliže bod Q_2 leží nad sečnou nebo na sečně určené body Q_1Q_3.
2. Obdobně jako u definice konvexní funkce zdůrazněme, že podmínka musí být splněna pro každou trojici bodů z I a že I musí být interval.
3. Funkce konvexní, resp. konkávní, nemusí mít derivaci v I (k zavedení pojmů pomocí



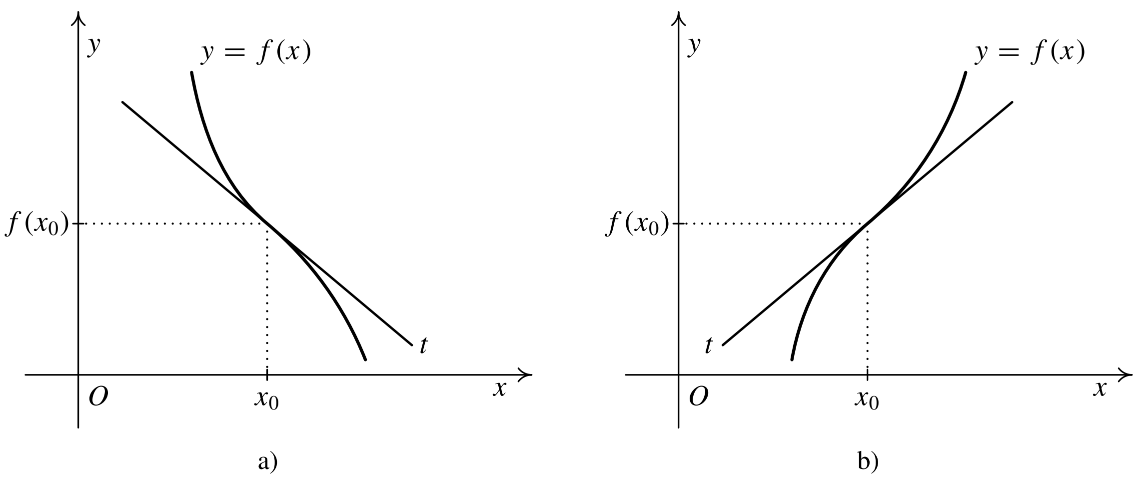
Obr. 9.6: Graf konkávní funkce

sečny existenci derivace nepotřebujeme) — viz např. výše zmíněná funkce $f\colon\ y = |x|$ nebo funkce $f\colon\ y = 2|x-3| + 3|x+2|$, jejíž graf je na str. 331. Pokud má funkce f všude v I první derivaci, pak lze pojmy konvexnost a konkávnost zavést také „pomocí tečen“ (viz [7, 10]).

Pokud má funkce f všude v I nejen první derivaci, ale i druhou, pak o tom, zda je funkce f na intervalu I ryze konvexní, resp. ryze konkávní, můžeme rozhodnout užitím věty 9.28. Než si ale uvedeme tuto větu, která bude snadným vodítkem při počítání příkladů, zavedeme si ještě jeden pojem. Řekneme si, jak se říká bodu, v němž se mění „prohnutí“, tj. konvexnost na konkávnost a opačně.

Definice 9.26. Řekneme, že funkce f má v bodě x_0 *inflexi*, jestliže existuje $f'(x_0) \in \mathbb{R}$ a funkce f je v nějakém levém okolí bodu x_0 ryze konvexní a v nějakém pravém okolí tohoto bodu ryze konkávní, resp. naopak.
Má-li funkce f v bodě x_0 inflexi, pak bod $(x_0, f(x_0))$ nazýváme *inflexním bodem* funkce f.

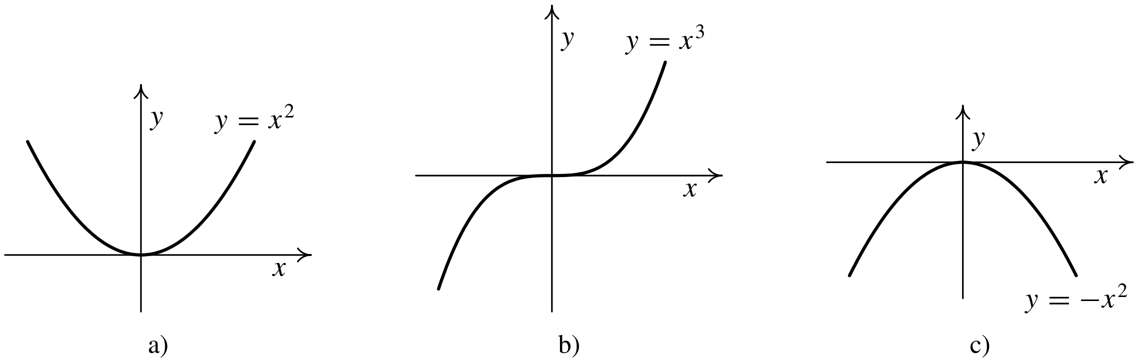
V inflexním bodě tedy musí existovat tečna (funkce zde má vlastní derivaci) a mění se zde „konvexnost na konkávnost“ — viz obr. 9.7 a) — anebo naopak — viz obr. 9.7 b).



Obr. 9.7

Poznámka 9.27.

1. Funkce $f\colon\ y = x^2$ je ryze konvexní na $\mathbb{R}$, a tudíž nemá žádný inflexní bod — viz obr. 9.8 a).
2. Funkce $f\colon\ y = x^3$ je ryze konvexní na $\langle 0, \infty)$ a ryze konkávní na $(-\infty, 0\rangle$. V bodě 0 existuje první derivace a mění se zde konkávnost na konvexnost, tedy bod 0 je inflexním bodem funkce f. Všimněme si, že $f''(0) = 0$ a $f''(x) = 6x > 0$ pro všechna $x > 0$ a $f''(x) = 6x < 0$ pro všechna $x < 0$ — viz obr. 9.8 b).



Obr. 9.8

3. Funkce $f\colon\ y = -x^2$ je ryze konkávní na celém $\mathbb{R}$, tudíž nemá žádný inflexní bod — viz obr. 9.8 c).

Jak souvisí pojmy ryzí konvexnost, ryzí konkávnost a inflexní bod s vlastnostmi druhé derivace, ukazuje následující věta.

Věta 9.28. *Nechť má funkce f v intervalu (a, b) druhou derivaci. Je-li*

i) $f''(x) > 0$ *pro každé* $x \in (a, b)$, *pak je* f *ryze konvexní na* (a, b),

ii) $f''(x) < 0$ *pro každé* $x \in (a, b)$, *pak je* f *ryze konkávní na* (a, b),

iii) $f''(x_0) = 0$ *v nějakém bodě* $x_0 \in (a, b)$ *a dále je* f'' *kladná v nějakém levém okolí bodu* x_0 *a záporná v nějakém pravém okolí bodu* x_0, *resp. naopak, pak má funkce* f *v bodě* x_0 *inflexi.*

Poznámka 9.29.

1. Srovnejte větu 9.28 (podmínka pro ryzí konvexnost a konkávnost) s větou 9.17 (podmínka pro lokální extrém).
2. Pokud má f na celém (a, b) druhou derivaci, inflexe může nastat pouze v bodě, kde $f''(x) = 0$ — to je „podezřelý“ bod. Zda inflexe opravdu nastává, rozhodneme podle intervalů ryzí konvexnosti a konkávnosti dané funkce. Všimněte si analogie s hledáním lokálních extrémů. Tam nás zajímaly nulové body a znaménko první derivace. Zde nás zajímají nulové body a znaménko druhé derivace.
3. V konkrétních příkladech budeme uvádět *maximální intervaly, na nichž je funkce ryze konvexní, resp. ryze konkávní*. Tím budeme rozumět intervaly, které nejsou podmnožinou nějakého „většího“ intervalu, na kterém by byla daná funkce ještě ryze konvexní, resp. ryze konkávní. Konvexnost (konkávnost) funkce je definována (9.22, 9.24) pro libovolné intervaly I, kdežto ve větě 9.28 se mluví pouze o otevřených intervalech. Při hledání maximálních intervalů, na nichž je funkce konvexní (konkávní), si tedy budeme všímat i krajních bodů příslušných intervalů. Jestliže bude daná funkce v krajním bodě intervalu spojitá, pak lze tento bod zahrnout do příslušného intervalu, na němž je funkce konvexní (konkávní). Důkaz viz [7, str. 177].

Shrňme si naše dosavadní poznatky do jakéhosi návodu, jak postupovat při hledání inflexních bodů a maximálních intervalů, na nichž je funkce f ryze konvexní, resp. ryze konkávní:

1. Určíme $D(f)$.
2. Vypočteme f' a $D(f')$.
3. Vypočteme f'' a $D(f'')$.
4. Určíme intervaly, na nichž je f'' kladná, resp. záporná (předpokládáme přitom, že $D(f'')$ lze vyjádřit jako sjednocení disjunktních intervalů J_i a že f'' je spojitá na každém z těchto intervalů):
   a) Určíme nulové body f'', tj. řešíme rovnici $f''(x) = 0$.
   b) Každý interval J_i rozdělíme nulovými body f'' na disjunktní intervaly.
   c) Vybereme z každého intervalu jeden bod a určíme znaménko f'' v tomto bodě.
5. Určíme intervaly, na nichž je funkce konvexní, resp. konkávní (s využitím věty 9.28), a určíme inflexní body (v bodě $x_0 \in D(f)$ takovém, že $f'(x_0)$ existuje a navíc se mění konvexnost na konkávnost nebo naopak, nastává inflexe).

Poznamenejme, že intervaly, na nichž je f'' kladná, resp. záporná můžeme určit i jinak, než je uvedeno v bodě 4), a to vyřešením nerovnic $f''(x) > 0$ a $f''(x) < 0$.

Příklad 9.30. Nechť je funkce f zadána předpisem

$$f(x) = x^4 - 2x^3 - 12x^2 + 7x - 3.$$

Najděte maximální intervaly, na nichž je funkce f ryze konvexní, resp. ryze konkávní, a inflexní body funkce f.

Řešení.

1. Určíme definiční obor: $D(f) = \mathbb{R}$.
2. Vypočteme první derivaci a její definiční obor:

$$f'(x) = 4x^3 - 6x^2 - 24x + 7, \qquad D(f') = D(f).$$

3. Vypočteme druhou derivaci a její definiční obor:

$$f''(x) = 12x^2 - 12x - 24, \qquad D(f'') = D(f).$$

4. Určíme intervaly, na nichž je f'' kladná, resp. záporná.
   a) Určíme nulové body f'', tj. řešíme rovnici $f''(x) = 0$.

$$f''(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 12(x^2 - x - 2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = -1\,, x_2 = 2.$$

   b) $D(f'')$ rozdělíme nulovými body f'' na disjunktní intervaly:

$$(-\infty, -1), \quad (-1, 2), \quad (2, \infty).$$

c) Vybereme z každého intervalu jeden bod, např. -2, 0 a 3, a určíme znaménko f'' v tomto bodě.

$$f''(-2) = 48 > 0, \quad f''(0) = -24 < 0, \quad f''(3) = 48 > 0.$$

Tudíž dle Cauchyovy-Bolzanovy věty je funkce f'' kladná na intervalech $(-\infty, -1)$ a $(2, \infty)$ a záporná na intervalu $(-1, 2)$.

5. Dle věty 9.28 je tedy funkce f ryze konvexní na intervalech $(-\infty, -1)$, $(2, \infty)$ a ryze konkávní na intervalu $(-1, 2)$. Body $x_1 = -1$, $x_2 = 2$ jsou inflexními body funkce f. Znaménka druhé derivace a konvexnost resp. konkávnost na příslušných intervalech můžeme vyznačit nad číselnou osu nebo do tabulky. Přitom oblouček $\smile$ bude značit ryze konvexní část funkce a oblouček $\frown$ ryze konkávní část funkce f. Plus a minus označuje znaménko druhé derivace.

$$f'': \quad \begin{array}{ccccc} \underset{+}{\smile} & & \underset{-}{\frown} & & \underset{+}{\smile} \\ \hline & -1 & & 2 & \\ & \text{inf} & & \text{inf} & \end{array}$$

Tabulka:

	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 2)$	2	$(2, \infty)$
f''	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\smile$	inf.	$\frown$	inf.	$\smile$

6. Závěr: Vzhledem ke spojitosti funkce na $\mathbb{R}$ platí, že funkce f je ryze konvexní na intervalech $(-\infty, -1\rangle$, $\langle 2, \infty)$ a ryze konkávní na intervalu $\langle -1, 2\rangle$. Body $x_1 = -1$, $x_2 = 2$ jsou inflexními body funkce f. ▲

Příklad 9.31. Je dána funkce

$$f\colon\ y = x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Najděte maximální intervaly, na nichž je funkce f ryze konvexní, resp. ryze konkávní, a určete její inflexní body.

Řešení.

1. $D(f) = \mathbb{R}$.
2. První derivace a její definiční obor:

$$f'(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} + x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\left(-\frac{1}{2}\cdot 2x\right) = (1 - x^2)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}, \qquad D(f') = \mathbb{R}.$$

3. Druhá derivace a její definiční obor:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}(-x)(1 - x^2) + \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}(-2x) = \\ &= \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}(-x + x^3 - 2x) = x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}(x^2 - 3) = \\ &= x\bigl(x - \sqrt{3}\bigr)\bigl(x + \sqrt{3}\bigr)\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}, \qquad D(f'') = \mathbb{R}. \end{aligned}$$

4. Určíme intervaly, na nichž je f'' kladná, resp. záporná.

   a) Určíme nulové body f'', tj. řešíme rovnici $f''(x) = 0$.

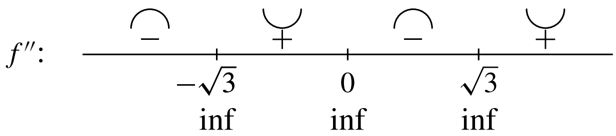
   $$f''(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\sqrt{3} \vee x = 0 \vee x = \sqrt{3}.$$

   b) $D(f'')$ rozdělíme nulovými body f'' na disjunktní intervaly:

   $$\left(-\infty, -\sqrt{3}\right), \quad \left(-\sqrt{3}, 0\right), \quad \left(0, \sqrt{3}\right), \quad \left(\sqrt{3}, \infty\right).$$

   c) Vybereme z každého intervalu jeden bod a určíme znaménko f'' v tomto bodě. Výsledek je shrnut v následující tabulce.

5. Na základě znaménka f'' určíme intervaly konvexnosti, konkávnosti a inflexní body funkce f. Výsledek zapíšeme nad číselnou osu



   nebo do tabulky:

	$\left(-\infty, -\sqrt{3}\right)$	$-\sqrt{3}$	$\left(-\sqrt{3}, 0\right)$	0	$\left(0, \sqrt{3}\right)$	$\sqrt{3}$	$\left(\sqrt{3}, \infty\right)$
f''	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\frown$	inf.	$\smile$	inf.	$\frown$	inf.	$\smile$

6. Závěr: Vzhledem ke spojitosti funkce f na $\mathbb{R}$ platí, že je ryze konkávní na intervalech $\left(-\infty, -\sqrt{3}\right\rangle$, $\left\langle 0, \sqrt{3}\right\rangle$ a ryze konvexní na intervalech $\left\langle -\sqrt{3}, 0\right\rangle$ a $\left\langle \sqrt{3}, \infty\right)$. Body $x_1 = -\sqrt{3}$, $x_2 = 0$, $x_3 = \sqrt{3}$ jsou inflexními body funkce f. ▲

Příklad 9.32. Je dána funkce

$$f\colon\ y = \sqrt[5]{x^3}.$$

Najděte maximální intervaly, na nichž je funkce f ryze konvexní, resp. ryze konkávní, a určete její inflexní body.

Řešení.

1. $D(f) = \mathbb{R}$.
2. První derivace a její definiční obor:

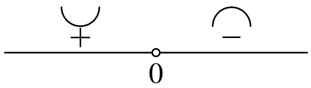
$$f'(x) = \frac{3}{5}x^{-\frac{2}{5}} = \frac{3}{5}\sqrt[5]{\frac{1}{x^2}}, \qquad D(f') = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

3. Druhá derivace a její definiční obor:

$$f''(x) = \frac{3}{5}\left(-\frac{2}{5}\right)x^{-\frac{7}{5}} = -\frac{6}{25}\sqrt[5]{\frac{1}{x^7}}, \qquad D(f'') = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

4. Určíme intervaly, na nichž je f'' kladná, resp. záporná.
   a) Určíme nulové body f'', tj. řešíme rovnici $f''(x) = 0$. Vzhledem k tomu, že je neznámá jen ve jmenovateli, nemá rovnice $f''(x) = 0$ žádné řešení. Nemáme tedy žádný nulový bod f''.
   b) Nyní máme rozdělit každý z intervalů tvořících $D(f'')$ nulovými body f'' na disjunktní intervaly. Žádné nulové body nejsou, dostáváme tedy intervaly:
   $$(-\infty, 0), \qquad (0, \infty).$$
   c) Vybereme z každého intervalu jeden bod, např. -1 a 1, a určíme znaménko f''.
   $$f''(-1) = -\frac{6}{25}\sqrt[5]{\frac{1}{(-1)^7}} > 0, \qquad f''(1) = -\frac{6}{25}\sqrt[5]{\frac{1}{1^7}} < 0.$$

   Tedy podle Cauchyovy-Bolzanovy věty je funkce f'' kladná na intervalu $(-\infty, 0)$ a záporná na intervalu $(0, \infty)$.
5. Dle věty 9.28 je funkce f ryze konvexní na intervalu $(-\infty, 0)$ a ryze konkávní na intervalu $(0, \infty)$. Otázkou je, zda je bod 0 inflexním bodem funkce f. V bodě 0 se mění charakter funkce z konvexní na konkávní, ale neexistuje v tomto bodě první derivace! Bod $x = 0$ není inflexním bodem funkce f. Výsledek zapíšeme nad číselnou osu

   f'': 

   nebo do tabulky:

	$(-\infty, 0)$	0	$(0, \infty)$
f''	$+$	neexistuje	$-$
f	$\smile$		$\frown$

6. Závěr: Funkce f je ryze konvexní na intervalu $(-\infty, 0\rangle$ a ryze konkávní na intervalu $\langle 0, \infty)$. Funkce nemá žádné inflexní body. ▲

Pro zájemce:

V dalším příkladě budeme k určení intervalů, na nichž je druhá derivace kladná, resp. záporná, využívat řešení nerovnic. Zkuste si jej spočítat také již výše uvedeným postupem, tj. pomocí Cauchyovy-Bolzanovy věty.

Příklad 9.33. Nechť je funkce f zadána předpisem
$$f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}.$$

Najděte maximální intervaly, na nichž je funkce f ryze konvexní, resp. ryze konkávní, a inflexní body funkce f.

Řešení.

1. Určíme definiční obor: $D(f) = \mathbb{R}$.
2. Vypočteme první derivaci a její definiční obor:

$$f'(x) = \mathrm{e}^{-x^2} \cdot (-2x), \qquad D(f') = D(f).$$

3. Vypočteme druhou derivaci a její definiční obor:

$$f''(x) = \mathrm{e}^{-x^2} \cdot (-2x) \cdot (-2x) + \mathrm{e}^{-x^2} \cdot (-2) = \mathrm{e}^{-x^2} \cdot (4x^2 - 2), \qquad D(f'') = D(f).$$

4. Hledáme intervaly, na nichž je f'' kladná, resp. záporná.
   a) Najdeme interval, na němž je $f''(x) > 0$. Řešíme tedy nerovnici:

$$\mathrm{e}^{-x^2} \cdot \ (4x^2 - 2) > 0.$$

   Jelikož hodnota e^{-x^2} je vždy kladná ($\mathrm{e}^y > 0$ pro každé $y \in \mathbb{R}$), je předchozí nerovnice ekvivalentní s nerovnicí:

$$4x^2 - 2 > 0.$$

   Vytkneme dvojku a dále upravujeme:

$$2 \cdot (2x^2 - 1) > 0 \ \Leftrightarrow \ 2x^2 > 1 \ \Leftrightarrow \ x^2 > \frac{1}{2} \ \Leftrightarrow \ |x| > \frac{1}{\sqrt{2}} \ \Leftrightarrow \ |x| > \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

   Tedy

$$x \in \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \infty\right) \quad \vee \quad x \in \left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

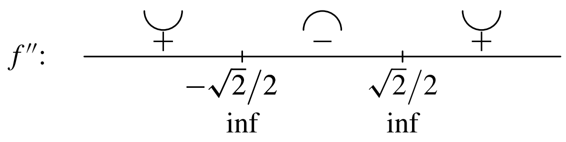
   Funkce f'' je kladná na intervalu $\left(-\infty, -\sqrt{2}/2\right)$ a na intervalu $\left(\sqrt{2}/2, \infty\right)$.

   b) Analogicky postupujeme při hledání intervalů, kde je $f''(x) < 0$. Řešíme tedy nerovnici:

$$\mathrm{e}^{-x^2} \cdot \ (4x^2 - 2) < 0 \ \Leftrightarrow \ 2(2x^2 - 1) < 0 \ \Leftrightarrow \ |x| < \sqrt{\frac{1}{2}} \ \Leftrightarrow \ x \in \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

   Funkce f'' je záporná na intervalu $\left(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2\right)$.

5. Funkce f je ryze konvexní na intervalu $\left(-\infty, -\sqrt{2}/2\right)$ a na intervalu $\left(\sqrt{2}/2, \infty\right)$ a ryze konkávní na intervalu $\left(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2\right)$. Funkce f má dva inflexní body: $x_1 = -\sqrt{2}/2$, $x_2 = \sqrt{2}/2$. Výsledek zapíšeme nad číselnou osu



   nebo do tabulky:

	$\left(-\infty, -\sqrt{2}/2\right)$	$-\sqrt{2}/2$	$\left(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2\right)$	$\sqrt{2}/2$	$\left(\sqrt{2}/2, \infty\right)$
f''	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\smile$	inf.	$\frown$	inf.	$\smile$

6. Závěr: Vzhledem ke spojitosti funkce f na $\mathbb{R}$ platí, že funkce je ryze konkávní na intervalu $\left\langle -\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2 \right\rangle$ a ryze konvexní na intervalech $\left(-\infty, -\sqrt{2}/2\right\rangle$ a $\left\langle \sqrt{2}/2, \infty \right)$. Body $x_1 = -\sqrt{2}/2$, $x_2 = \sqrt{2}/2$ jsou inflexními body funkce f. ▲

9.4 Asymptoty grafu funkce

V této podkapitole se seznámíme s pojmem asymptota grafu funkce. Ze střední školy známe pojem asymptoty v souvislosti s hyperbolou. Je to přímka, ke které se hyperbola „neomezeně přibližuje“. Ukazuje se výhodné rozlišit asymptoty podle toho, zda jsou rovnoběžné s osou y nebo ne.

Svislé asymptoty

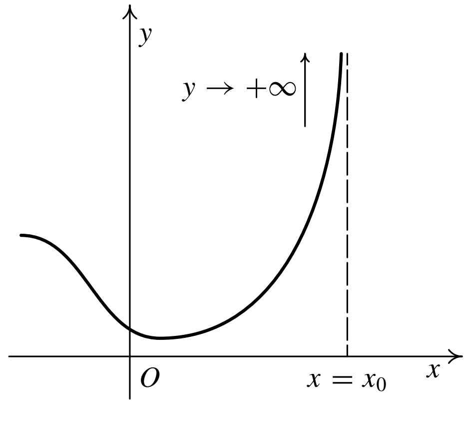
Definice 9.34. Přímka $x = x_0$, $x_0 \in \mathbb{R}$ se nazývá *svislá asymptota grafu funkce* f, jestliže je alespoň jedna jednostranná limita funkce f v bodě x_0 nevlastní, tj.

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \pm\infty \quad \text{nebo} \quad \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \pm\infty.$$

Pro svislé asymptoty se někdy používá název *asymptoty bez směrnice*.

To, že je přímka $x = x_0$ svislou asymptotou grafu funkce f, geometricky znamená, že pokud se blížíme k bodu x_0 zleva nebo zprava, body grafu funkce f se „blíží“ (pro $y \to \infty$, resp. $y \to -\infty$) k bodům přímky $x = x_0$ — viz obr. 9.9.

Pokud je funkce v nějakém bodě spojitá, nemůže zde mít svislou asymptotu, protože v tomto případě by limita byla rovna přímo funkční hodnotě a funkční hodnota nemůže být nekonečná. Připadají v úvahu tedy pouze ty body $x_0 \in \mathbb{R}$, na jejichž $\mathscr{P}(x_0)$ nebo $\mathscr{P}^+(x_0)$ nebo $\mathscr{P}^-(x_0)$ je funkce definována, ale není v tomto bodě spojitá.



Obr. 9.9

Příklad 9.35. Najděte svislé asymptoty grafu funkcí:

a) $f: y = \dfrac{1}{x^2}$, b) $g: y = 5x + \dfrac{\sin x}{x}$.

Řešení.

a) Nejprve určíme definiční obor: $D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. Funkce f je spojitá v každém bodě $D(f)$, tedy jediný bod, ve kterém by mohla být svislá asymptota, je bod $x_0 = 0$. Vypočteme limitu zprava funkce f v tomto bodě:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} \cdot \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty \cdot \infty = \infty.$$

Můžeme tedy říci, že přímka $x = 0$ je svislou asymptotou grafu funkce f.
(Všimněte si, že ke konstatování, že přímka $x = 0$ je svislou asymptotou grafu funkce f, nepotřebujeme znát limitu zleva. Stačí, když je jedna z jednostranných limit rovna plus anebo minus nekonečnu.

b) Nejprve určíme definiční obor: $D(g) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. Funkce g je spojitá v každém bodě $D(g)$, tedy jediný bod, ve kterém by mohla být svislá asymptota, je opět bod $x_0 = 0$. Vypočteme limitu funkce g v bodě nula:

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} \left(5x + \frac{\sin x}{x}\right) = \lim_{x\to 0} 5x + \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 0 + 1 = 1.$$

Protože $\lim_{x\to 0} g(x) = 1$, je i každá z jednostranných limit rovna jedné. Graf funkce g tudíž nemá v bodě nula svislou asymptotu. Jiný bod nepřipadá v úvahu, můžeme tedy říci, že graf funkce g nemá žádné svislé asymptoty. ▲

Asymptoty v $+\infty$ a $-\infty$

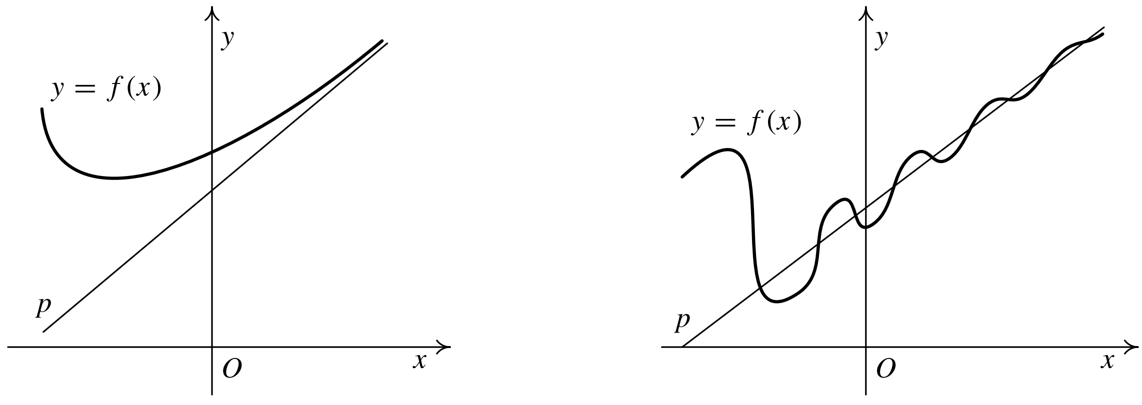
Definice 9.36. Přímka $y = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, se nazývá *asymptota grafu funkce f v plus nekonečnu*, resp. v *minus nekonečnu*, jestliže platí:

$$\lim_{x\to +\infty} \big(f(x) - (ax + b)\big) = 0, \text{ resp. } \lim_{x\to -\infty} \big(f(x) - (ax + b)\big) = 0.$$

Pro asymptoty v plus a minus nekonečnu se někdy používá název *asymptoty se směrnicí* nebo *šikmé asymptoty*.

To, že je přímka $y = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, asymptotou grafu funkce f v plus nekonečnu, geometricky znamená, že pokud se blížíme k plus nekonečnu, „body grafu funkce se blíží k bodům této přímky“. Obdobně pro asymptotu v minus nekonečnu. Asymptoty v plus a minus nekonečnu nemusí existovat současně, a pokud existují, mohou být různé.

Uvědomte si, že nevíme, zda se graf funkce k asymptotě přibližuje shora (obr. 9.10 a)), resp. zdola nebo zda kolem asymptoty „osciluje“ (obr. 9.10 b)).



a) b)

Obr. 9.10

Věta 9.37. *Přímka $y = ax + b$ je asymptotou grafu funkce f v plus nekonečnu, právě když*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = a,\ a \in \mathbb{R} \qquad a \qquad \lim_{x\to+\infty} \big(f(x) - ax\big) = b,\ b \in \mathbb{R}.$$

Přímka $y = ax + b$ je asymptotou grafu funkce f v minus nekonečnu, právě když

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = a,\ a \in \mathbb{R} \qquad a \qquad \lim_{x\to-\infty} \big(f(x) - ax\big) = b,\ b \in \mathbb{R}.$$

Při výpočtu asymptoty grafu funkce f v $+\infty$ postupujeme následujícím způsobem:

1. Zjistíme, zda existuje $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$. Jestliže neexistuje nebo je nevlastní, funkce nemá asymptotu v $+\infty$. Pokud limita $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ existuje a je vlastní, položíme $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} =$ $= a$ a přistoupíme k dalšímu bodu.
2. Zjistíme, zda existuje $\lim\limits_{x\to+\infty} \big(f(x) - ax\big)$. Jestliže neexistuje nebo je nevlastní, funkce nemá asymptotu v $+\infty$. Jestliže $\lim\limits_{x\to+\infty} \big(f(x) - ax\big)$ existuje a je vlastní, položíme $\lim\limits_{x\to+\infty} \big(f(x) - ax\big) = b$.
3. Jestliže obě limity existovaly a byly vlastní, pak je přímka $y = ax + b$ asymptotou grafu funkce f v $+\infty$.

Analogicky postupujeme při výpočtu asymptoty grafu funkce f v $-\infty$.

Příklad 9.38. Najděte asymptoty v $+\infty$ a $-\infty$ grafu funkce $f\colon y = \dfrac{3x^2}{x-1}$.

Řešení. Pokusíme se o současné provedení výpočtu pro asymptoty v $+\infty$ i v $-\infty$. Vyjde

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{3x^2}{x-1}}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x^2}{x^2-x}=3=a,$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\bigl(f(x)-ax\bigr)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{3x^2}{x-1}-3x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x^2-3x^2+3x}{x-1}=$$
$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x}{x-1}=3=b.$$

Graf funkce f má šikmou asymptotu v plus i minus nekonečnu, a tou je přímka o rovnici $y=3x+3$. ▲

Příklad 9.39. Najděte všechny asymptoty grafu funkce $f\colon\ y=\dfrac{4+x^3}{4-x^2}$.

Řešení.

1. Svislé asymptoty.
   $D(f)=\mathbb{R}\smallsetminus\{-2,2\}$, f je spojitá ve všech bodech, kde je definována. Není definována v bodech -2, 2. Pro hledání svislých asymptot připadají tedy v úvahu pouze tyto dva body.
   Vypočteme jednostranné limity v bodech -2, 2.

$$\lim_{x\to2^+}f(x)=\lim_{x\to2^+}\frac{4+x^3}{4-x^2}=\lim_{x\to2^+}\frac{4+x^3}{(2-x)(2+x)}=\lim_{x\to2^+}\frac{4+x^3}{2+x}\cdot\frac{1}{2-x}=$$
$$=\lim_{x\to2^+}\frac{4+x^3}{2+x}\cdot\lim_{x\to2^+}\frac{1}{2-x}.$$

   První limitu vypočteme dosazením (jedná se o spojitou funkci v bodě 2, tedy limita se rovná funkční hodnotě),

$$\lim_{x\to2^+}\frac{4+x^3}{2+x}=\frac{4+2^3}{2+2}=3.$$

   Druhou limitu vypočteme užitím věty 6.53. Označme $g(x)=2-x$. Pak $\lim\limits_{x\to2^+}(2-x)=0$ a funkce g je na pravém prstencovém okolí bodu 2 záporná, tudíž dle věty 6.53 je

$$\lim_{x\to2^+}\frac{1}{g(x)}=\lim_{x\to2^+}\frac{1}{2-x}=-\infty,\qquad\text{takže}\qquad\lim_{x\to2^+}f(x)=3\cdot(-\infty)=-\infty.$$

   Přímka $x=2$ je tedy svislou asymptotou grafu funkce f.
   Zbývá zjistit, zda přímka $x=-2$ je také svislou asymptotou grafu funkce f. Postupně dostaneme

$$\lim_{x\to-2^+}f(x)=\lim_{x\to-2^+}\frac{4+x^3}{4-x^2}=\lim_{x\to-2^+}\frac{4+x^3}{(2-x)(2+x)}=$$
$$=\lim_{x\to-2^+}\frac{4+x^3}{2-x}\cdot\frac{1}{2+x}=\lim_{x\to-2^+}\frac{4+x^3}{2-x}\cdot\lim_{x\to-2^+}\frac{1}{2+x}.$$

První limitu vypočteme dosazením, tj.

$$\lim_{x\to-2^+}\frac{4+x^3}{2-x}=\frac{4+(-2)^3}{2-(-2)}=-1.$$

Druhou limitu vypočteme opět užitím věty 6.53. Označme $g(x)=2+x$. Pak platí $\lim\limits_{x\to-2^+}(2+x)=0$ a funkce g je na pravém prstencovém okolí bodu -2 kladná, tedy dle věty 6.53 je

$$\lim_{x\to-2^+}\frac{1}{g(x)}=\lim_{x\to-2^+}\frac{1}{2+x}=+\infty,\qquad\text{takže}\qquad\lim_{x\to-2^+}f(x)=-1\cdot(+\infty)=-\infty.$$

Přímka $x=-2$ je také svislou asymptotou grafu funkce f.
Graf funkce f má dvě svislé asymptoty: $x=2$, $x=-2$.

2. Asymptoty v $+\infty$ a $-\infty$. Opět se pokusíme o současné provedení výpočtu pro $\pm\infty$:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{4+x^3}{4-x^2}}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{4+x^3}{x\cdot(4-x^2)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{4+x^3}{4x-x^3}=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3\cdot\left(\frac{4}{x^3}+1\right)}{x^3\cdot\left(\frac{4}{x^2}-1\right)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{4}{x^3}+1}{\frac{4}{x^2}-1}=\frac{1}{-1}=-1=a.$$

Vypočetli jsme $a=-1$. Přistoupíme tedy k výpočtu další limity:

$$\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-ax]=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{4+x^3}{4-x^2}-(-1)\cdot x\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{4+x^3}{4-x^2}+x\right]=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{4+x^3+4x-x^3}{4-x^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{4+4x}{4-x^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2\cdot\left(\frac{4}{x^2}+\frac{4}{x}\right)}{x^2\cdot\left(\frac{4}{x^2}-1\right)}=0=b.$$

Šikmou asymptotou grafu funkce f v plus i minus nekonečnu je přímka $y=-x$.

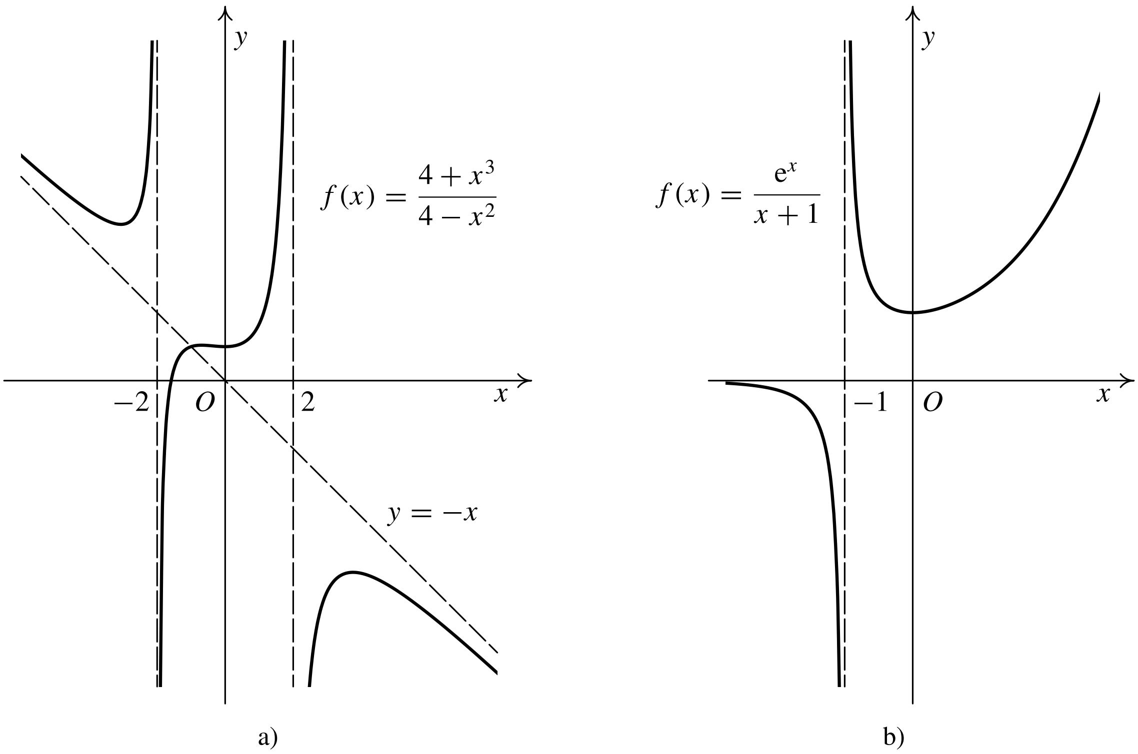
3. Závěr: Svislými asymptotami grafu funkce f jsou přímky $x=2$ a $x=-2$ a asymptotou v plus i minus nekonečnu je přímka $y=-x$ — viz obr. 9.11 a). ▲

Příklad 9.40. Najděte všechny asymptoty grafu funkce $f\colon\ y=\dfrac{e^x}{x+1}$.

Řešení.

1. Svislé asymptoty.
$D(f)=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, f je spojitá ve všech bodech, kde je definována. Svislá asymptota může tedy nastat pouze v jediném bodě $x=-1$.
Vypočteme jednostrannou limitu v bodě -1.

$$\lim_{x\to-1^+}f(x)=\lim_{x\to-1^+}\frac{e^x}{x+1}=\lim_{x\to-1^+}e^{-1}\frac{1}{x+1}=\lim_{x\to-1^+}\frac{1}{e}\cdot(+\infty)=+\infty.$$



Obr. 9.11

Při výpočtu $\lim\limits_{x \to -1^+} \frac{1}{x+1}$ jsme využili větu 6.53. Označíme-li $g(x) = x + 1$, pak platí $\lim\limits_{x \to -1^+} (x + 1) = 0$ a funkce g je na pravém prstencovém okolí bodu -1 kladná. Tudíž dle věty 6.53 je $\lim\limits_{x \to -1^+} \frac{1}{x+1} = +\infty$.

Přímka $x = -1$ je tedy svislou asymptotou grafu funkce f.

2. Asymptota v $+\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{e^x}{x+1}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^2 + x} \overset{LP}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{2x + 1} \overset{LP}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{2} = \infty.$$

Limita je nevlastní, tedy graf funkce f nemá asymptotu v $+\infty$.

3. Asymptota v $-\infty$:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\frac{e^x}{x+1}}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^x}{x^2 + x} = 0 = a.$$

Vypočetli jsme $a = 0$. Přistoupíme k výpočtu další limity.

$$\lim_{x \to -\infty} [f(x) - ax] = \lim_{x \to -\infty} \left[\frac{e^x}{x + 1} - 0x \right] = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^x}{x + 1} = 0 = b.$$

Asymptotou v $-\infty$ grafu funkce f je přímka $y = 0$.

4. Závěr: Svislou asymptotou grafu funkce f je přímka $x = -1$ a asymptotou v minus nekonečnu je přímka $y = 0$. Asymptota v plus nekonečnu není — viz obr. 9.11 b). ▲

9.5 Průběh funkce

Poznatky, které jsme získali v předchozích odstavcích, nám umožňují načrtnout graf funkce. Říkáme, že *vyšetřujeme průběh funkce*. Postup, který se skládá z řady dílčích úloh, shrneme do následujících bodů:

1. Určíme definiční obor.
2. Rozhodneme, kde je funkce spojitá, určíme příp. body nespojitosti.
3. Rozhodneme, zda je funkce sudá nebo lichá, příp. periodická.
4. Vypočteme f' a $D(f')$.
5. Určíme intervaly, na nichž je f' kladná, resp. záporná (předpokládáme přitom, že $D(f')$ lze vyjádřit jako sjednocení disjunktních intervalů J_i a že f' je spojitá na každém z těchto intervalů):
   a) Určíme nulové body f', tj. řešíme rovnici $f'(x) = 0$.
   b) Každý interval J_i rozdělíme nulovými body f' na disjunktní intervaly.
   c) Vybereme z každého intervalu jeden bod a určíme znaménko f' v tomto bodě.
6. Určíme intervaly monotonie funkce f (s využitím věty 9.1) a lokální extrémy — v bodě $x_0 \in D(f)$, kde se mění charakter funkce „z rostoucí na klesající“, nastává ostré lokální maximum a v bodě, kde se mění charakter funkce „z klesající na rostoucí“, nastává ostré lokální minimum.
7. Vypočteme f'' a $D(f'')$.
8. Určíme intervaly, na nichž je f'' kladná, resp. záporná (předpokládáme přitom, že $D(f'')$ lze vyjádřit jako sjednocení disjunktních intervalů J_i a že f'' je spojitá na každém z těchto intervalů):
   a) Určíme nulové body f'', tj. řešíme rovnici $f''(x) = 0$.
   b) Každý interval J_i rozdělíme nulovými body f'' na disjunktní intervaly.
   c) Vybereme z každého intervalu jeden bod a určíme znaménko f'' v tomto bodě.
9. Určíme intervaly, na nichž je funkce konvexní, resp. konkávní (s využitím věty 9.28), a určíme inflexní body — v bodě $x_0 \in D(f)$ takovém, že $f'(x_0)$ existuje a navíc se mění konvexnost na konkávnost nebo naopak, nastává inflexe.
10. Najdeme asymptoty:
    a) Svislé asymptoty — mohou nastat v bodech nespojitosti ležících v $D(f)$ nebo v hraničních (vlastních) bodech $D(f)$.
    b) Asymptoty v $\pm\infty$.

    I když k důkazu existence svislé asymptoty nám mnohdy stačí spočítat jen jednu jednostrannou limitu v bodě nespojitosti, kvůli načrtnutí grafu funkce je vhodné spočítat obě jednostranné limity.

11. Podle potřeby určíme další vlastnosti funkce f (průsečíky s osami, funkční hodnoty ve „významných bodech“, intervaly, na nichž je funkce kladná, resp. záporná, ...).
12. Načrtneme graf funkce f.

Poznámka 9.41. Je-li funkce sudá nebo lichá, musí všechny kořeny, intervaly, znaménka apod. vycházet v určitém smyslu souměrně. Můžeme tedy průběh takové funkce vyšetřovat pouze na „polovině“ definičního oboru.

Protože nakreslení grafu někdy dělá potíže, doporučujeme:

i) nejprve vyznačit všechny asymptoty (pokud existují),

ii) vyznačit průsečíky grafu s osou x a funkční hodnoty v bodech lokálních extrémů,

iii) načrtnout si pomocný obrázek funkce f s ohledem na to, kde je funkce nad a kde pod osou x a kde roste a klesá (bez ohledu na „prohnutí“),

iv) načrtnout graf funkce f se všemi podstatnými kvalitativními rysy (včetně správného „prohnutí“ — tj. konvexnost a konkávnost).

Příklad 9.42. Vyšetřete průběh funkce $f\colon\ y = \dfrac{x^3}{x^2-1}$.

Řešení. Budeme postupovat podle uvedeného návodu.

1. Jedná se o racionální lomenou funkci, která není definovaná pouze v kořenech jmenovatele.
   Tyto kořeny určíme z rovnice:
   $$x^2 - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm 1.$$
   Tedy: $\qquad D(f) = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$.
2. Funkce f je spojitá v každém bodě $D(f)$.
3. Periodičnost. Funkce f není periodická, neboť pro každé $k \in \mathbb{R}^+$ existuje $x \in D(f)$ takové, že: $f(x+k) = \frac{(x+k)^3}{(x+k)^2-1} \neq f(x)$.

   Sudost, lichost. Nechť $x \in D(f)$. Pak
   $$f(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2-1} = \frac{-x^3}{x^2-1} = -\frac{x^3}{x^2-1} = -f(x).$$
   Funkce je lichá, její graf bude středově souměrný vzhledem k počátku. Tedy průběh funkce stačí vyšetřovat pouze na „polovině“ definičního oboru, tj. na množině $D^*(f) = \langle 0, 1) \cup (1, \infty)$.

   Všechny další výpočty budeme proto provádět v rámci této „poloviny“ definičního oboru, tj. v rámci množiny $D^*(f) = \langle 0, 1) \cup (1, \infty)$. Chování funkce na „zbytku“ definičního oboru určíme nakonec právě z lichosti funkce f.

4. Vypočteme f' a $D^*(f')$.

$$f'(x) = \left(\frac{x^3}{x^2-1}\right)' = \frac{3x^2(x^2-1) - x^3 \cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2}, \quad D^*(f') = D^*(f)$$

5. Určíme intervaly, na nichž je f' kladná, resp. záporná:

   a) Najdeme nulové body f', tj. řešíme rovnici $f'(x) = 0$.

$$f'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2} = 0 \;\Leftrightarrow\; x^4 - 3x^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; x^2(x^2-3) = 0 \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\; x^2\bigl(x+\sqrt{3}\bigr)\bigl(x-\sqrt{3}\bigr) = 0.$$

   Dostaneme tři nulové body
$$x_0 = -\sqrt{3},\; x_1 = 0,\; x_2 = \sqrt{3}.$$

   Jelikož $x_0 \notin D^*(f)$, nebudeme jej dále do svých výpočtů zahrnovat. Vrátíme se k němu až na konci příkladu v bodě 10, kdy budeme kreslit graf funkce a z lichosti této funkce plyne, že chování funkce f v okolí bodu $x_0 = -\sqrt{3}$ se dá určit z chování funkce v okolí bodu $x_2 = \sqrt{3}$.

   b) Každý z intervalů tvořících $D^*(f') = \langle 0, 1) \cup (1, \infty)$ rozdělíme nulovými body f' na disjunktní intervaly.

$$(0, 1),\; \bigl(1, \sqrt{3}\bigr),\; \bigl(\sqrt{3}, \infty\bigr).$$

   c) Vybereme z každého intervalu jeden bod a určíme znaménko f' v tomto bodě.

$$f'\Bigl(\frac{1}{2}\Bigr) = -\frac{11}{9} < 0, \quad f'\Bigl(\frac{3}{2}\Bigr) = -\frac{27}{25} < 0, \quad f'(2) = \frac{4}{9} > 0.$$

   Dle Cauchyovy-Bolzanovy věty je tedy funkce f' záporná na intervalech $(0, 1)$ a $\bigl(1, \sqrt{3}\bigr)$ a kladná na intervalu $\bigl(\sqrt{3}, \infty\bigr)$.

6. Určíme intervaly monotonie a lokální extrémy. Funkce f je klesající na intervalech $(0, 1)$ a $\bigl(1, \sqrt{3}\bigr)$ a rostoucí na intervalu $\bigl(\sqrt{3}, \infty\bigr)$. Tedy f má v bodě $x_2 = \sqrt{3}$ ostré lokální minimum:

$$f\bigl(\sqrt{3}\bigr) = \frac{\bigl(\sqrt{3}\bigr)^3}{\bigl(\sqrt{3}\bigr)^2 - 1} = \frac{3\sqrt{3}}{3-1} = \frac{3}{2}\sqrt{3}.$$

   Další lokální extrémy určíme v závěru příkladu z lichosti funkce.

7. Vypočteme f'' a $D^*(f'')$.

$$f''(x) = \left(\frac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2}\right)' = \frac{(4x^3-6x)(x^2-1)^2 - (x^4-3x^2)(x^2-1)2x}{(x^2-1)^4} =$$
$$= \frac{(x^2-1)[(4x^3-6x)(x^2-1) - 4x(x^4-3x^2)]}{(x^2-1)^4} =$$
$$= \frac{4x^5 - 6x^3 - 4x^3 + 6x - 4x^5 + 12x^3}{(x^2-1)^3} = \frac{2x^3+6x}{(x^2-1)^3}, \quad D^*(f'') = D^*(f).$$

8. Určíme intervaly, na nichž je f'' kladná, resp. záporná.
   a) Najdeme nulové body f'', tj. řešíme rovnici $f''(x) = 0$.

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x^3 + 6x}{(x^2 - 1)^3} = 0 \Leftrightarrow 2x^3 + 6x = 0 \Leftrightarrow 2x(x^2 + 3) = 0.$$

   V reálném oboru existuje jediné řešení této rovnice, a to bod $x_1 = 0$.
   b) Nyní máme rozdělit každý z intervalů tvořících $D^*(f'')$ nulovými body f'' na disjunktní intervaly. Vzhledem k tomu, že $x_1 = 0$ je krajní bod, dostáváme intervaly:

$$(0, 1), \quad (1, \infty).$$

   c) Vybereme z každého intervalu jeden bod a určíme znaménko f'' v tomto bodě.

$$f''\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{208}{27} < 0, \quad f''(2) = \frac{28}{27} > 0.$$

   Dle Caychyovy-Bolzanovy věty je tedy druhá derivace funkce f záporná na intervalu $(0, 1)$ a kladná na intervalu $(1, \infty)$.
9. Určíme intervaly, na nichž je funkce konvexní, resp. konkávní (s využitím věty 9.28), a inflexní body.
   Funkce f je konkávní na intervalu $(0, 1)$ a konvexní na intervalu $(1, \infty)$.
   Inflexní body mohou být pouze tam, kde se mění konvexnost a konkávnost funkce. Na sjednocení intervalů $(0, 1) \cup (1, \infty)$ žádný inflexní bod není (bod 1 není bodem definičního oboru!), ale jelikož v tuto chvíli vyšetřujeme průběh funkce pouze na „polovině“ definičního oboru, zůstává otevřenou otázkou situace v bodě $x_1 = 0$.
10. Nyní máme najít asymptoty.
   a) Svislé asymptoty: Funkce není definována v bodě $x_3 = 1$. Je spojitá v každém bodě $D^*(f)$. Tedy pouze tímto bodem může procházet svislá asymptota (situace se týká pouze „poloviny“ definičního oboru). Vypočteme jednostrannou limitu v bodě $x_3 = 1$.

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x^3}{x^2 - 1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x^3}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x^3}{x+1} \cdot \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x-1} =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot (+\infty) = +\infty.$$

   Tedy přímka $x = 1$ je svislou asymptotou grafu funkce f.
   b) Asymptota v $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x^3}{x^2-1}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{x^3 - x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{x^3(1 - \frac{1}{x^2})} = 1 = a.$$

Koeficient $a \in \mathbb{R}$, lze tedy počítat druhou limitu. Vyjde

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^3}{x^2-1} - 1\cdot x\right] = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3 - x^3 + x}{x^2-1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2-1} =$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\cdot\frac{1}{x}}{x^2(1-\frac{1}{x^2})} = 0 = b.$$

Asymptota v plus nekonečnu má tedy rovnici $y = 1\cdot x + 0$, tj. $y = x$.

11. Určíme nulové body funkce f a intervaly, kde je funkce kladná a kde záporná. Nejprve najdeme nulové body funkce f.

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^3}{x^2-1} = 0 \Leftrightarrow x^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0,$$

tj. bod $x_1 = 0$ je nulovým bodem funkce f.

Funkce f je spojitá na intervalech $(0, 1)$ a na $(1, \infty)$, tudíž dle Cauchyovy-Bolzanovy věty stačí určit znaménko funkční hodnoty funkce f vždy v jednom z bodů jednotlivých intervalů $(0, 1)$, $(1, \infty)$:

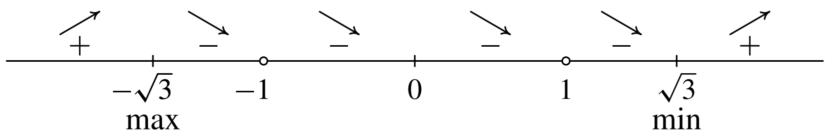
$$f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{6} < 0,\ f(2) = \frac{8}{3} > 0,$$

tedy f je záporná na $(0, 1)$ a kladná na $(1, \infty)$.

12. Shrnutím předchozích výsledků a využitím lichosti funkce f dostaneme následující poznatky o vlastnostech funkce f:

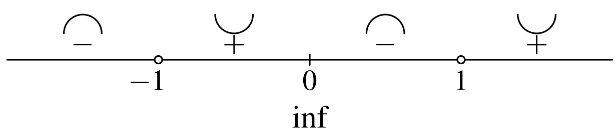
- rostoucí části funkce na intervalu $\left(\sqrt{3}, +\infty\right)$ odpovídá rostoucí část funkce na intervalu $\left(-\infty, -\sqrt{3}\right)$, klesající části funkce na intervalu $\left(1, \sqrt{3}\right)$ odpovídá klesající část na intervalu $\left(-\sqrt{3}, -1\right)$ a klesající části na intervalu $(0, 1)$ odpovídá klesající část na intervalu $(-1, 0)$,
- ostrému lokálnímu minimu v bodě $x_2 = \sqrt{3}$ odpovídá ostré lokální maximum v bodě $x_0 = -\sqrt{3}$. Znaménka derivace a monotonii si vyznačíme nad číselnou osu:

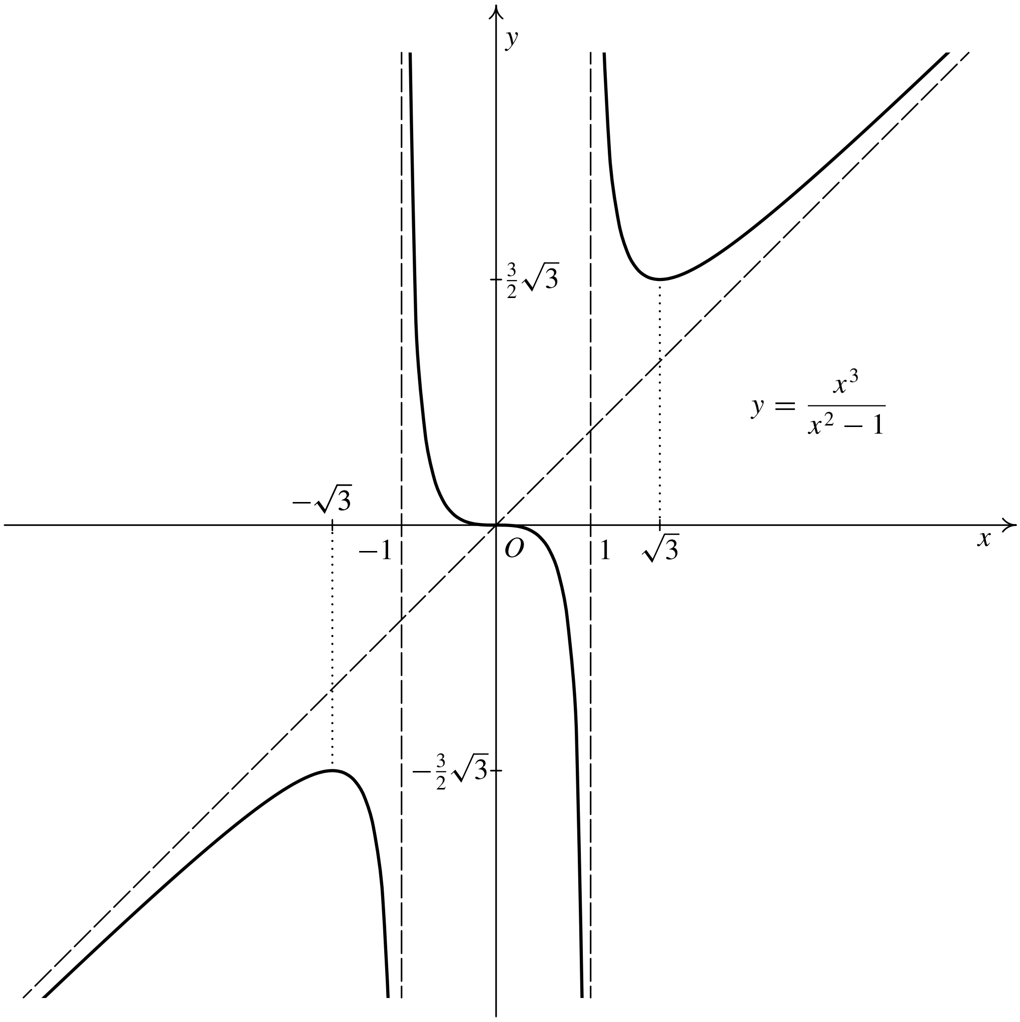
f':



- konvexní části funkce na intervalu $(1, +\infty)$ odpovídá konkávní část funkce na intervalu $(-\infty, -1)$, konkávní části na intervalu $(0, 1)$ odpovídá konvexní část na intervalu $(-1, 0)$, tedy bod $x_1 = 0$ je inflexním bodem funkce f. Znaménka druhé derivace a konvexnost a konkávnost si vyznačíme opět nad číselnou osu:

f'':





Obr. 9.12

- svislé asymptotě $x = 1$ odpovídá svislá asymptota $x = -1$,
- asymptotě $y = x$ v plus nekonečnu odpovídá stejná asymptota $y = x$ v minus nekonečnu,
- záporné části na intervalu $(0, 1)$ odpovídá kladná část na intervalu $(-1, 0)$ a kladné části na intervalu $(1, \infty)$ odpovídá záporná část na intervalu $(-\infty, -1)$.

Ze všech získaných poznatků jsme již schopni zakreslit graf funkce f — viz obr. 9.12.

▲

Předchozí funkce měla všechny vlastnosti, které jsme se učili vyšetřovat (lokální extrémy, inflexní body, konvexní a konkávní části, svislé asymptoty, asymptoty v $+\infty$ a $-\infty$. Je zřejmé, že vyšetřování průběhu takové funkce je pracné. Jestliže některá vlastnost chybí, je obvykle výpočet přiměřeně snazší. Každopádně je vidět, že k úspěšnému řešení takového komplexního příkladu je nezbytné umět řešit jednotlivé dílčí úlohy.

Příklad 9.43. Vyšetřete průběh funkce $f\colon\ y = x - \operatorname{arctg} x$.

Řešení. Budeme postupovat podle uvedeného návodu.

1. Definiční obor funkce f: $D(f) = \mathbb{R}$.
2. Funkce f je elementární, tudíž je spojitá na celém $D(f) = \mathbb{R}$.
3. Zjistíme, zda je funkce f sudá, lichá, příp. periodická.

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x) - \operatorname{arctg}(-x) = (-x) - (-\operatorname{arctg} x) = \\ &= -(x - \operatorname{arctg} x) = -f(x), \quad x \in D(f). \end{aligned}$$

   Tedy f je lichá funkce. Její graf bude souměrný podle počátku. Stačilo by tudíž vyšetřovat průběh této funkce pouze na intervalu $\langle 0, \infty)$. My však provedeme výpočty pro celý $D(f)$.

4. Vypočteme f' a $D(f')$.

$$f'(x) = (x - \operatorname{arctg} x)' = (x)' - (\operatorname{arctg} x)' = 1 - \frac{1}{1+x^2}, \quad D(f') = D(f).$$

5. Určíme intervaly, na nichž je f' kladná, resp. záporná:

   a) Najdeme nulové body f', tj. řešíme rovnici $f'(x) = 0$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{1+x^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{1+x^2-1}{1+x^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{1+x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

   b) $D(f')$ rozdělíme nulovými body f' na disjunktní intervaly.

$$(-\infty, 0), \quad (0, \infty).$$

   c) Vybereme z každého intervalu jeden bod a určíme znaménko f' v tomto bodě.

$$f'(-1) = 1 - \frac{1}{1+(-1)^2} > 0, \qquad f'(1) = 1 - \frac{1}{1+1^2} > 0.$$

   Dle Cauchyovy-Bolzanovy věty je tedy funkce f' kladná na intervalech $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$.

6. Určíme intervaly monotonie a lokální extrémy.
   Funkce f je rostoucí na intervalech $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$. Vzhledem ke spojitosti funkce f na $\mathbb{R}$, můžeme říci, že funkce je rostoucí na celém definičním oboru $\mathbb{R}$. Nemá tedy žádný lokální extrém.

$$f'\colon \quad \overset{\nearrow}{+} \quad \underset{0}{|} \quad \overset{\nearrow}{+}$$

7. Vypočteme f'' a $D(f'')$:

$$f''(x) = \frac{2x}{(1+x^2)^2}, \quad D(f'') = D(f).$$

8. Určíme intervaly, na nichž je f'' kladná, resp. záporná:

   a) Najdeme nulové body f'', tj. řešíme rovnici $f''(x) = 0$.

$$f''(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{2x}{(1+x^2)^2} = 0 \;\Leftrightarrow\; 2x = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0.$$

   b) $D(f'')$ rozdělíme nulovými body f'' na disjunktní intervaly.

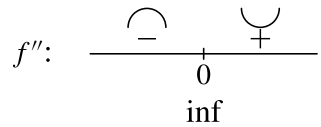
$$(-\infty, 0), \qquad (0, \infty).$$

   c) Vybereme z každého intervalu jeden bod a určíme znaménko f'' v tomto bodě.

$$f''(-1) < 0, \qquad f''(1) > 0.$$

   Dle Cauchyovy-Bolzanovy věty je tedy funkce f'' záporná na intervalu $(-\infty, 0)$ a kladná na intervalu $(0, \infty)$.

9. Určíme intervaly konvexnosti a konkávnosti funkce f a inflexní body: Funkce f je konkávní na intervalu $(-\infty, 0)$ a konvexní na intervalu $(0, \infty)$. Bod nula je inflexním bodem funkce f (mění se v něm konkávnost na konvexnost a existuje v něm první derivace funkce f). Zde vidíme další zdůvodnění skutečnosti, že v nule nemá funkce f lokální extrém.



10. Najdeme asymptoty funkce f. Funkce f je spojitá na celém $D(f)$, proto nemůže mít žádnou svislou asymptotu. Najděme asymptotu grafu funkce f v $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(1 - \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\right) = 1 - \lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} =$$
$$= 1 - \lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x \cdot \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 1 - \left(+\frac{\pi}{2}\right) \cdot \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 1 - 0 = 1 = a_1.$$

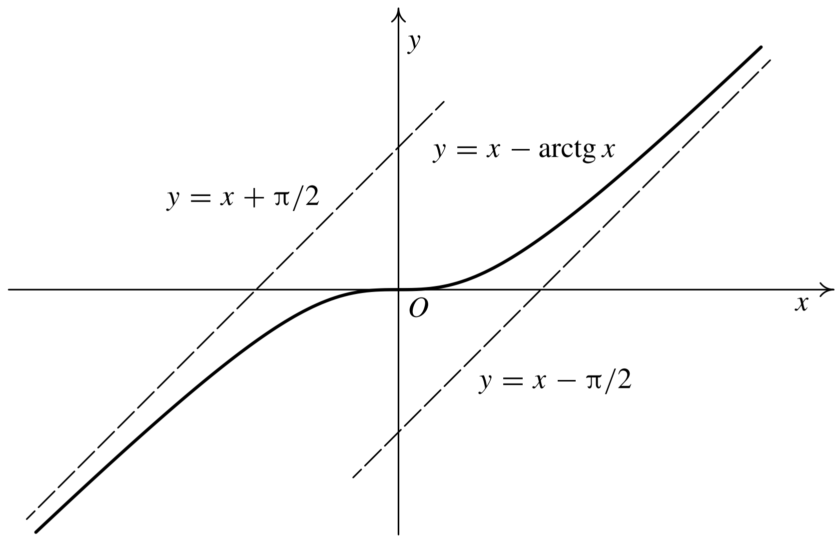
   Vypočetli jsme $a_1 = 1$. Přistoupíme k výpočtu další limity:

$$\lim_{x\to+\infty} \big(f(x) - ax\big) = \lim_{x\to+\infty} (x - \operatorname{arctg} x - x) = \lim_{x\to+\infty} (-\operatorname{arctg} x) =$$
$$= -\lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2} = b_1.$$

   Asymptotou grafu funkce f v plus nekonečnu je přímka $y = x - \frac{\pi}{2}$.

   Spočtěme nyní asymptotu v $-\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x} = \lim_{x\to-\infty} \left(1 - \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\right) = 1 - \lim_{x\to-\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} =$$
$$= 1 - \lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x \cdot \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 1 - \left(-\frac{\pi}{2}\right) \cdot \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 1 = a_2.$$



Obr. 9.13

Můžeme přistoupit k výpočtu další limity.

$$\lim_{x\to-\infty}\bigl(f(x)-ax\bigr)=\lim_{x\to-\infty}(x-\operatorname{arctg}x-x)=\lim_{x\to-\infty}(-\operatorname{arctg}x)=$$
$$=-\lim_{x\to-\infty}\operatorname{arctg}x=+\frac{\pi}{2}=b_2.$$

Asymptotou grafu funkce f v minus nekonečnu je přímka $y=x+\frac{\pi}{2}$.

11. Chceme-li určit průsečíky grafu funkce f se souřadnými osami, dostaneme rovnici $x-\operatorname{arctg}x=0$, kterou neumíme algebraicky řešit. Postupujme tedy úvahou. Z toho, že je funkce rostoucí, plyne, že může mít maximálně jeden průsečík s osou x, tj. rovnice může mít nejvýše jeden kořen. Dále víme, že se jedná o funkci lichou, která je navíc definovaná v 0. Z toho vyplývá, že musí procházet nulou. Jediným průsečíkem funkce s osou x je tedy bod $x=0$.
12. Nyní zbývá zakreslit graf funkce f se všemi podstatnými rysy — viz obr. 9.13. ▲

Σ Pojmy k zapamatování

— stacionární bod,

— lokální maximum, minimum,

— konvexnost, konkávnost,

— inflexní bod,

— svislá asymptota,

— asymptota v plus a minus nekonečnu.

Kontrolní otázky

?

1. Vysvětlete postup při hledání lokálních extrémů funkce.
2. Jakým způsobem hledáme inflexní body dané funkce?
3. Může nastat inflexe v bodě, v němž nemá funkce první derivaci?
4. V kterých bodech může mít funkce svislou asymptotu?
5. Vysvětlete postup při hledání asymptot v plus a minus nekonečnu.
6. Co rozumíme úlohou *vyšetření průběhu funkce*?

Příklady k procvičení

!

1. Určete maximální intervaly ryzí monotonie a lokální extrémy funkce f (pokud existují):

a) $f\colon y = 2x^2 - 5x + 1$, b) $f\colon y = \dfrac{\ln^2 x}{x}$, c) $f\colon y = \dfrac{x-1}{x}$,

d) $f\colon y = \sqrt[3]{(x^4-1)^2}$, e) $f\colon y = 3 - 2\sqrt[3]{x^2}$, f) $f\colon y = x\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$,

g) $f\colon y = \sqrt{8x - x^2}$, h) $f\colon y = \mathrm{e}^{x^3-12x}$, i) $f\colon y = 2x + 9\sqrt[3]{(1-x)^2}$.

2. Najděte maximální intervaly, na nichž je funkce f ryze konvexní resp. ryze konkávní, a určete její inflexní body:

a) $f\colon y = x^3 + 3x$, b) $f\colon y = \ln(x+2)$, c) $f\colon y = \dfrac{x^4}{x^3-1}$,

d) $f\colon y = x^2 - 1 + \sqrt[3]{x^2}$, e) $f\colon y = \dfrac{x}{1+x^2}$, f) $f\colon y = \dfrac{\cos x}{2+\sin x}$,

g) $f\colon y = x - \ln(x^2-9)$, h) $f\colon y = \mathrm{e}^{2x-x^2}$, i) $f\colon y = \left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^4$.

3. Určete asymptoty grafu funkce f (pokud existují):

a) $f\colon y = \dfrac{1}{x^2-9}$, b) $f\colon y = \dfrac{\cos x}{x}$, c) $f\colon y = x + \dfrac{\ln x}{x}$,

d) $f\colon y = \dfrac{x}{x-1}$, e) $f\colon y = 3x + \dfrac{3}{x-2}$, f) $f\colon y = x + \dfrac{2x}{x^2-1}$,

g) $f\colon y = x\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}}$, h) $f\colon y = \sqrt[3]{x^3+4x^2}$, i) $f\colon y = x\ln\left(\mathrm{e} + \dfrac{1}{x}\right)$.

4. Vyšetřete průběh funkce:

a) $f\colon y = x^3 - 3x + 2$, b) $f\colon y = \dfrac{x^2+1}{x}$, c) $f\colon y = \dfrac{x}{3-x^2}$,

d) $f\colon y = \ln(4-x^2)$, e) $f\colon y = \ln\dfrac{x+1}{1-x}$, f) $f\colon y = \sqrt[3]{2x^2-x^3}$,

g) $f\colon y = x\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$, h) $f\colon y = x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$, i) $f\colon y = \arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$.

5. Rozhodněte, které z následujících tvrzení jsou pravdivá.

   a) Je-li $f''(x) = 0$, má funkce f v bodě x inflexi.
   b) Je-li funkce periodická, nemá svislé asymptoty.
   c) Je-li $f'(x) = 0$ a současně $f''(x) = 0$, nemá f v bodě x lokální extrém.
   d) Funkce f spojitá v $D(f) = \langle 0, \infty)$ nemá žádnou svislou asymptotu.
   e) Je-li $f'(x) = 0$, pak má funkce f v bodě x lokální extrém.
   f) Je-li $f'(x) = 0$, $f''(x) = 0$ a $f'''(x) = 2$, nemá f v bodě x lokální extrém.
   g) Je-li $f'(x) = 0$ a současně $f''(x) = -3$, má f v bodě x ostré lokální maximum.
   h) Je-li $f''(x) > 0$ pro každé $x \in (0, 1)$, pak je f ryze konvexní na $(0, 1)$.
   i) Je-li f klesající na $(0, 2)$, pak je $f'(x) < 0$ pro každé $x \in (0, 2)$.
   j) Je-li $f''(x) < 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}$, je funkce f ryze konkávní na $\mathbb{R}$.

Autotest

1. Má-li funkce v bodě x_0 stacionární bod, pak (nastane, nenastane, může nastat) v tomto bodě lokální extrém.
2. Uveďte příklad funkce, která splňuje podmínku $f'(x_0) = 0$, ale nemá v tomto bodě lokální extrém.
3. Je-li $f'(x) > 0$ pro každé $x \in J$, kde J je interval, pak funkce f je na J (rostoucí, klesající).
4. Je-li $f''(x) < 0$ pro každé $x \in J$, kde J je interval, pak funkce f je na J (ryze konvexní, ryze konkávní).
5. Uveďte příklad funkce, jejíž derivace v bodě x_0 neexistuje, ale má v tomto bodě lokální extrém.
6. Uveďte příklad funkce s vlastností $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) = 0$, ale x_0 není inflexním bodem funkce f.
7. Uveďte příklad funkce, která není spojitá v bodě x_0, ale $x = x_0$ není svislou asymptotou grafu funkce f.
8. Určete lokální extrémy a maximální intervaly ryzí monotonie funkce f dané předpisem
$$f(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2+1}.$$
9. Určete intervaly ryzí konvexnosti, ryzí konkávnosti a inflexní body funkce f dané předpisem
$$f(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}.$$
10. Najděte asymptoty grafu funkce $f\colon y = \dfrac{x^3}{x^2-4}$.
11. Vyšetřete průběh funkce $f\colon y = -\dfrac{2}{4-x^2}$.

Kapitola 10

Globální extrémy

Průvodce studiem

V aplikacích matematiky se velmi často setkáváme s úlohou najít extrém jisté funkce f na nějaké množině M, tj. najít bod z množiny M, v němž funkce nabývá největší, resp. nejmenší funkční hodnoty. Říkáme, že hledáme globální extrémy funkce f na množině M. První úlohy na určování globálních extrémů byly řešeny již dlouho předtím, než byla známa derivace. Již ve starověkém Řecku se setkáváme s následujícími úlohami: nalézt rovinný obrazec, který má při daném obvodu maximální obsah; nalézt obdélník s daným obvodem tak, aby jeho obsah byl maximální aj.

Jak je vidět, příklady na hledání globálních extrémů jsou často zadávány „slovně“. Chceme vlastně z určité množiny objektů (geometrických objektů, fyzikálních situací atd.) vybrat ten, pro nějž určitý údaj vychází maximální, resp. minimální. Podívejte se například na stranu 3, kde jsme si zadání tří takových úloh uvedli. Nyní konečně máme dostatečný matematický aparát, abychom si tyto úlohy vyřešili. Je jasné, že je-li úloha zadána „slovně“, je třeba nejdříve vytvořit „matematickou“ formulaci problému — vyjádřit funkci f, jejíž globální maximum, resp. minimum budeme určovat. Říkáme, že vytváříme matematický model dané úlohy.

Hledání globálních maxim a minim funkcí jedné proměnné patří mezi nejjednodušší extremální úlohy. Touto problematikou se (v daleko větší obecnosti) zabývá např. lineární programování, kvadratické programování, konvexní programování, nelineární programování, variační počet a teorie optimálního řízení.

Cíle

Po prostudování této kapitoly budete schopni

- určit globální extrémy spojité funkce na uzavřeném a ohraničeném intervalu,
- řešit „slovní“ úlohy vedoucí na hledání globálních extrémů.

Definice 10.1. Nechť $M \subset D(f)$ a $x_0 \in M$.
Řekneme, že *funkce f nabývá na množině M globálního maxima v bodě x_0*, jestliže pro všechna $x \in M$ platí $f(x) \leqq f(x_0)$.
Řekneme, že *funkce f nabývá na množině M globálního minima v bodě x_0*, jestliže pro všechna $x \in M$ platí $f(x) \geqq f(x_0)$.
Nabývá-li funkce f na množině M globálního maxima nebo minima v bodě x_0, říkáme, že *funkce f nabývá na množině M globálního extrému v bodě x_0*.

Místo globální extrém se někdy používá název *absolutní extrém*.

Poznámka 10.2.

1. Předchozí definice říká, že funkce f nabývá na množině M globálního maxima v bodě x_0, jestliže $f(x_0) = \max\{f(x), x \in M\}$, a funkce f nabývá na množině M globálního minima v bodě x_0, jestliže $f(x_0) = \min\{f(x), x \in M\}$.
2. Globální maximum, resp. minimum, funkce f na M může, ale nemusí existovat. Uveďme si tři příklady:
   i) Funkce $f(x) = x^3$ má na množině $M = \langle -1, 1\rangle$ globální maximum v bodě $x = 1$ a globální minimum v bodě $x = -1$.
   ii) Funkce $f(x) = x^2$ má na množině $M = \langle 0, 1)$ globální minimum v bodě $x = 0$. Globální maximum neexistuje, neboť neexistuje maximální prvek množiny funkčních hodnot této funkce na zadané množině.
   iii) Funkce $f(x) = \frac{1}{x}$ má na množině $M = \langle 2, \infty)$ globální maximum v bodě $x = 2$ a globální minimum neexistuje.
3. Funkce může na množině M nabývat globálního maxima, resp. minima, ve více bodech — funkční hodnota v těchto bodech musí být stejná. Např. funkce $f(x) = \sin x$ nabývá na množině $M = \langle 0, 4\pi\rangle$ globálního maxima v bodech $x = \frac{\pi}{2}$ a $x = \frac{5\pi}{2}$ a globálního minima v bodech $x = \frac{3\pi}{2}$ a $x = \frac{7\pi}{2}$.
4. Rozdíl mezi lokálním a globálním extrémem je podstatný. Zatímco u lokálního extrému musí příslušná nerovnost platit jen v nějakém okolí bodu x_0, u globálního extrému musí být splněna na celé uvažované množině.

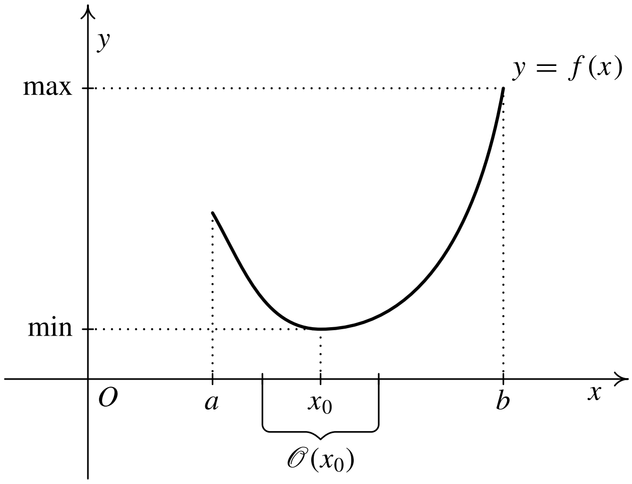
Při hledání globálních extrémů se nejprve omezíme na případ, kdy bude funkce f *spojitá* a množina M bude *uzavřený a ohraničený interval*. V takovém případě budeme mít existenci globálních extrémů zajištěnu.

Věta 10.3 (Weierstrassova). *Nechť je funkce f spojitá na uzavřeném ohraničeném intervalu $\langle a, b\rangle$, $a, b \in \mathbb{R}$. Pak funkce f nabývá na $\langle a, b\rangle$ globálního maxima i globálního minima.*

Je-li tedy interval *uzavřený a ohraničený* a funkce f *spojitá*, pak globální extrémy určitě existují. Podívejme se, v jakých bodech mohou být. Je-li v bodě x_0 globální extrém a $x_0 \in (a, b)$, je v x_0 i lokální extrém (je-li totiž např. $f(x) \geqq f(x_0)$ pro všechna $x \in (a, b)$, tím spíš tato nerovnost platí na nějakém okolí bodu x_0) — viz obr. 10.1. Tedy globální extrém může nastat

i) buď v bodě lokálního extrému v intervalu (a, b),
ii) nebo v krajním bodě $x = a$, resp. $x = b$.

Například na obr. 10.1 je nejmenší funkční hodnota (globální minimum) ve vnitřním bodě x_0, kde je současně lokální minimum, avšak největší hodnota (globální maximum) je v krajním bodě b.



Obr. 10.1

Jsou-li splněny předpoklady Weierstrassovy věty, pak víme, že globální extrémy existují a jsou buď v bodech lokálních extrémů anebo v krajních bodech daného intervalu. Stačí tedy již pouze porovnat funkční hodnoty v „podezřelých bodech“.

Postup hledání globálních extrémů spojité funkce f na uzavřeném a ohraničeném intervalu $\langle a, b\rangle$ lze tedy shrnout do těchto tří bodů:

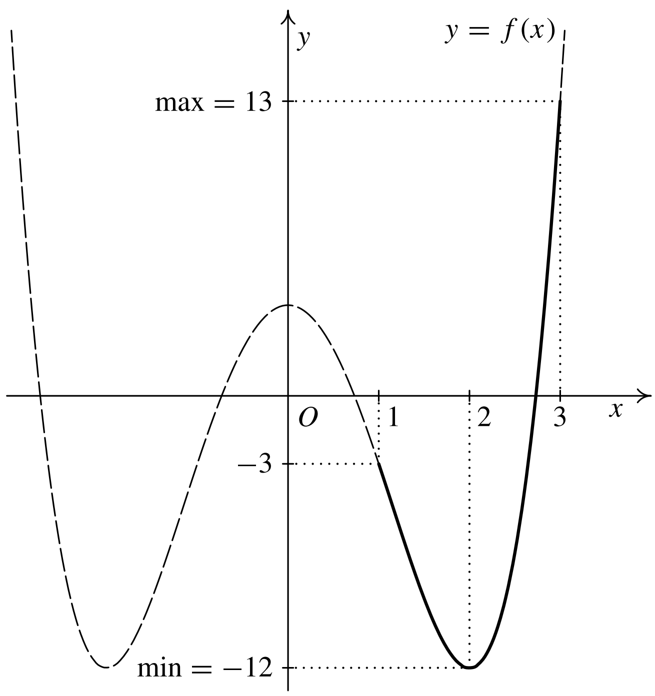
1. V intervalu (a, b) najdeme body „podezřelé z lokálních extrémů“:
   a) Body, v nichž je derivace nulová (stacionární body).
   b) Body, v nichž derivace neexistuje.
2. Vypočteme funkční hodnoty ve všech bodech podezřelých z lokálních extrémů a v krajních bodech intervalu $\langle a, b\rangle$.
3. Vybereme bod, ve kterém má funkce f největší, resp. nejmenší, funkční hodnotu. V tomto bodě nabývá funkce f globálního maxima, resp. globálního minima.

Poznámka 10.4. Máme-li díky tvrzení Weierstrassovy věty zaručenu existenci globálních extrémů, nemusíme ověřovat, zda v bodech „podezřelých“ z existence lokálního extrému tento extrém skutečně nastává. Jestliže vezmeme v úvahu nějaký stacionární bod, ve kterém funkce nemá lokální extrém, nic se neděje. Tento bod nemůže být ani bodem globálního extrému. Zjistí se to při porovnávání funkčních hodnot v jednotlivých podezřelých bodech. Pokud naopak globální extrém nastává ve více bodech, výše uvedeným způsobem je najdeme všechny.

Příklad 10.5. Najděte globální extrémy funkce $f\colon\, y = x^4 - 8x^2 + 4$ na množině $M = \langle 1, 3\rangle$.

Řešení. Funkce f je spojitá, interval $\langle 1, 3\rangle$ je uzavřený a ohraničený, tudíž dle Weierstrassovy věty existuje jak globální minimum, tak globální maximum. Lze tedy použít zmíněný postup.

1. V intervalu $(1, 3)$ najdeme body „podezřelé“ z lokálních extrémů. K tomu budeme potřebovat derivaci: $f'(x) = 4x^3 - 16x$.
   a) Určíme stacionární body:
   $$f'(x) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad 4x^3 - 16x = 0 \quad\Leftrightarrow\quad 4x(x^2 - 4) = 0.$$
   Jeden kořen je $x_1 = 0$. Další kořeny dostaneme z rovnice $x^2 - 4 = 0$, tedy $x_{2,3} = \pm 2$. Našli jsme tři stacionární body $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = -2$. V intervalu $(1, 3)$ leží pouze $x_0 = 2$.
   b) Žádný další bod nepřipadá v úvahu, neboť derivace existuje v každém bodě množiny M.
2. Vypočteme funkční hodnoty v podezřelých bodech a v krajních bodech intervalu $\langle 1, 3\rangle$.
   $$f(2) = 2^4 - 8\cdot 2^2 + 4 = -12,\ f(1) = 1^4 - 8\cdot 1^2 + 4 = -3,\quad f(3) = 3^4 - 8\cdot 3^2 + 4 = 13.$$



Obr. 10.2

3. Vybereme největší a nejmenší z hodnot $f(2) = -12$, $f(1) = -3$, $f(3) = 13$. Dostáváme, že funkce f nabývá na množině M globálního minima v bodě $x_0 = 2$, $f(2) = -12$ a globálního maxima v bodě $b = 3$, $f(3) = 13$. Pro ilustraci uvádíme graf funkce f — viz obr. 10.2. ▲

Příklad 10.6. Najděte globální extrémy funkce f na intervalu $\langle -1, 2\rangle$:

$$f\colon\ y = 1 - \sqrt[5]{(x^2 + 2x)^4}.$$

Řešení. Funkce f je spojitá, interval $\langle -1, 2\rangle$ je uzavřený a ohraničený, proto můžeme opět využít Weierstrassovu větu.

1. V intervalu $(-1, 2)$ najdeme body „podezřelé" z lokálních extrémů. Předpis pro funkci f upravíme do tvaru $f(x) = 1 - (x^2 + 2x)^{4/5}$ a zderivujeme:

$$f'(x) = -\frac{4}{5} \cdot (x^2 + 2x)^{-\frac{1}{5}} \cdot (2x + 2) = -\frac{8}{5} \cdot \frac{x + 1}{\sqrt[5]{x^2 + 2x}}\,.$$

   a) Nalezneme stacionární body:

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{8}{5} \cdot \frac{x+1}{\sqrt[5]{x^2 + 2x}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_0 = -1.$$

   Stacionárním bodem funkce f je tedy bod $x_0 = -1$, ale $-1 \notin (-1, 2)$, tudíž jej nebudeme počítat mezi podezřelé body.

   b) Dále určíme body, v nichž derivace neexistuje, tj. body, v nichž je jmenovatel zlomku roven nule: $x_1 = 0$, $x_2 = -2$. Bod $x_2 = -2 \notin (-1, 2)$, dále proto uvažujeme pouze bod $x_1 = 0$.

2. Určíme funkční hodnoty v podezřelých bodech a v krajních bodech intervalu $\langle -1, 2\rangle$:

$$f(0) = 1, \quad f(-1) = 0, \quad f(2) = 1 - \sqrt[5]{8^4} \doteq -4{,}3.$$

3. Porovnáme funkční hodnoty v podezřelých bodech: $f(2) = 1 - \sqrt[5]{8^4} \doteq -4{,}3$, $f(-1) = 0$, $f(0) = 1$. Funkce f tedy nabývá na intervalu $\langle -1, 2\rangle$ globálního maxima v bodě $x_1 = 0$, $f(0) = 1$ a globálního minima v bodě $b = 2$, $f(2) = 1 - \sqrt[5]{8^4} \doteq -4{,}3$. ▲

V následujícím příkladě si ukážeme, jak se dá při hledání globálních extrémů postupovat v případě, že nejsou splněny předpoklady Weierstrassovy věty, tedy nemáme zaručenu existenci globálních extrémů. Musíme proto využít jiných vlastností, např. monotonie, abychom mohli rozhodnout, ve kterých bodech globální extrémy existují, případně proč daná funkce některý z globálních extrémů nemá.

Příklad 10.7. Zjistěte, zda existují globální extrémy funkcí f, g na zadaných množinách. Pokud existují, nalezněte je:

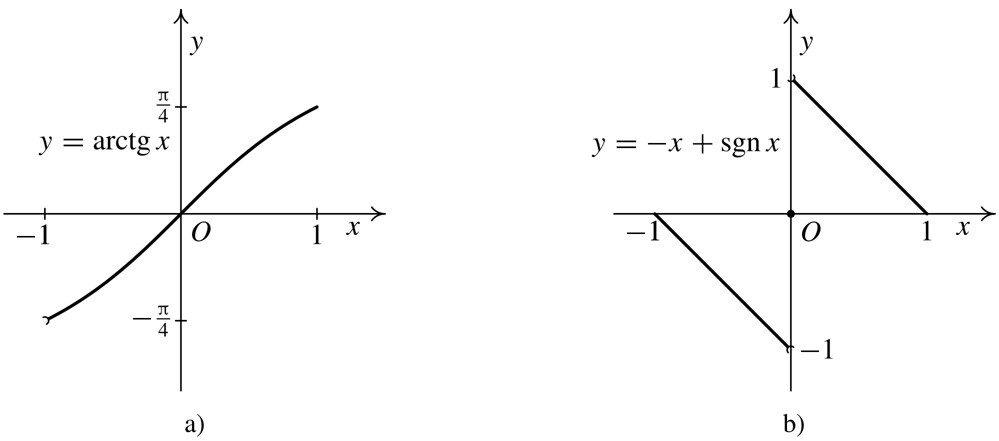
a) $f\colon\ y = \operatorname{arctg} x,\ M_1 = (-1, 1\rangle$, b) $g\colon\ y = -x + \operatorname{sgn} x,\ M_2 = \langle -1, 1\rangle$.

Řešení.

a) Interval $(-1, 1\rangle$ není uzavřený, tudíž nelze využít Weierstrassovu větu. V takovém případě se snažíme alespoň částečně vyšetřit průběh funkce — známe-li graf funkce, pak můžeme ihned odpovědět, zda existují globální extrémy.
Vypočtěme derivaci funkce f. Dostaneme:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Platí, že $f'(x) > 0$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$, tudíž i pro x z množiny $(-1, 1\rangle$. Funkce je tedy rostoucí na M_1, a tudíž nemá v žádném bodě množiny M_1 lokální extrém. V pravém krajním bodě je největší funkční hodnota (pro každé $x \in (-1, 1\rangle$ platí, že $f(x) \leqq f(1)$). Nejmenší funkční hodnota však neexistuje (levý krajní bod do intervalu $(-1, 1\rangle$ nepatří). Tedy globálního maxima funkce f nabývá v bodě 1, $f(1) = \frac{\pi}{4}$, globálního minima funkce f na množině M_1 nenabývá — viz obrázek 10.3 a).



Obr. 10.3

b) V tomto případě je interval uzavřený a ohraničený, ovšem funkce g není na tomto intervalu spojitá. Tedy opět nelze využít Weierstrassovu větu.
Využijeme znalosti funkce signum a předpis pro funkci g si vyjádříme takto:

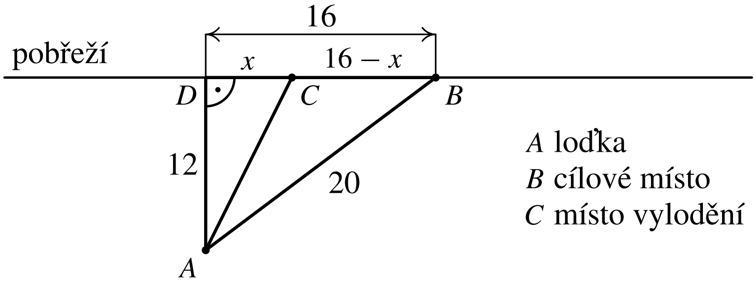
$$g(x) = \begin{cases} -x-1, & \text{pro } x \in \langle -1, 0), \\ 0, & \text{pro } x = 0, \\ -x+1, & \text{pro } x \in (0, 1\rangle. \end{cases}$$

Nyní již snadno načrtneme graf funkce g (nemusíme nic dalšího vyšetřovat, jedná se o jednoduchou funkci) — viz. obr. 10.3 b). Z obrázku vidíme, že funkce g nemá na množině M_2 ani globální maximum, ani globální minimum. (Blížíme-li se do bodu nula zprava, funkční hodnoty se blíží k hodnotě 1, tj. $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}(-x+1) = 1$, ale této hodnoty nikdy nedosáhnou, neboť $g(0) = 0$. Analogicky $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}(-x-1) = -1$, ale $g(0) = 0$). ▲

V současné době hraje v praxi velice důležitou roli optimalizace. Hledáme „nejlepší“ nebo „nejhorší“ řešení nějakého problému. Naše úloha o globálním maximu nebo minimu je právě úlohou takového typu (ovšem velice speciální a jednoduchou) — viz následující příklady.

Příklad 10.8. Muž v loďce je vzdálen 12 km od pobřeží (majícího tvar přímky). Chce se co nejrychleji dostat do místa na pobřeží, které je od něj vzdáleno 20 km. Rozhodněte, kde se má vylodit, víte-li, že dokáže veslovat rychlostí 6 km/h a po břehu se pohybovat rychlostí 10 km/h.

Řešení. Načrtneme si danou situaci:



Cílem úlohy je zjistit, v kterém místě na pobřeží je vhodné se vylodit, chceme-li se co nejrychleji dostat z místa A na moři do cílového místa B na pobřeží. Celkový čas, který nám zabere přesun z bodu A do B, si označme t. Přitom čas veslování označme t_1 a čas pohybu po souši t_2. Tedy

$$t = t_1 + t_2.$$

Čas t_1 spočteme jako podíl vzdálenosti bodů A, C a rychlosti veslování. Bod C nechť označuje místo vylodění. Pak

$$t_1 = \frac{|AC|}{6}.$$

Obdobně čas t_2 je podíl vzdálenosti bodů C, B a rychlosti pohybu po souši. Tj.

$$t_2 = \frac{|CB|}{10}.$$

Nyní je třeba vyjádřit velikosti $|AC|$ a $|CB|$. Nechť bod D označuje patu kolmice vedené z bodu A na pobřeží. Trojúhelník ADB je pravoúhlý, pomocí Pythagorovy věty vypočteme, že $|DB| = 16$. Označíme-li si velikost úsečky CD písmenem x, viz náčrtek, pak $|CB| = 16 - x$.

Konečně aplikací Pythagorovy věty na trojúhelník ACD dostaneme

$$|AC| = \sqrt{144 + x^2}.$$

Dosazením do vztahu pro čas máme

$$t(x) = t_1 + t_2 = \frac{|AC|}{6} + \frac{|CB|}{10} = \frac{\sqrt{144 + x^2}}{6} + \frac{16 - x}{10}.$$

Nalezli jsme funkci $t(x)$ proměnné x, jejíž globální minimum budeme nyní hledat. Přitom neznámá x může nabývat hodnot z intervalu $M = \langle 0, 16\rangle$.

Matematická formulace úlohy: Najděte globální minimum funkce

$$t(x) = \frac{\sqrt{144 + x^2}}{6} + \frac{16 - x}{10}$$

na množině $M = \langle 0, 16\rangle$.

Vidíme, že funkce t je spojitá, interval M je uzavřený a ohraničený, podle Weierstrassovy věty tedy globální minimum bude existovat.

1. V intervalu $(0, 16)$ najdeme body „podezřelé" z lokálního extrému. K tomu potřebujeme derivaci funkce t:

$$t'(x) = \frac{x}{6\sqrt{144 + x^2}} - \frac{1}{10}.$$

   a) Určíme body, v nichž je derivace nulová:

$$f'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{x}{6\sqrt{144 + x^2}} - \frac{1}{10} = 0.$$

   Vyřešením této rovnice dostaneme jediný stacionární bod $x = 9$.

   b) Žádné další podezřelé body nemáme, protože derivace existuje na celém intervalu.

2. Vyšetříme funkční hodnoty v krajních bodech intervalu a v bodech „podezřelých" z extrému, které se nacházejí uvnitř intervalu.

$$t(0) = \frac{108}{30}, \qquad t(9) = \frac{96}{30}, \qquad t(16) = \frac{100}{30}.$$

3. Funkce t nabývá na množině M globálního minima v bodě $x = 9$.

Muž se dostane nejrychleji z místa A do místa B, pokud se vylodí ve vzdálenosti 9 km od místa D, tj. 7 km od cílového místa B. ▲

Příklad 10.9. Určete rozměry otevřeného zahradního bazénu se čtvercovým dnem daného objemu 32 m^3 tak, aby se na vyzdění jeho dna a stěn spotřebovalo co nejméně materiálu.

Řešení. Bazén má tvar kvádru. Označme písmenem a, $a > 0$, délku strany podstavy, písmenem v, $v > 0$, výšku tohoto kvádru. Objem V, $V > 0$, kvádru se čtvercovou podstavou a a výškou v se vypočte podle následujícího vzorce:

$$V = a^2 \cdot v \;\Rightarrow\; v = \frac{V}{a^2}.$$

Označme obsah podstavy S_1 a obsah jedné stěny S_2. Pak pro obsah podstavy platí $S_1 = a^2$ a pro obsah jedné stěny platí $S_2 = a \cdot v = a \cdot \frac{V}{a^2} = \frac{V}{a}$.

Vyzdít se mají čtyři stěny a dno, tedy celková plocha k vyzdění se rovná

$$S = S_1 + 4 \cdot S_2 = a^2 + 4 \cdot \frac{V}{a}.$$

Matematická formulace úlohy: Najděte globální minimum funkce S:

$$S(a) = a^2 + 4 \cdot \frac{V}{a}$$

na intervalu $(0, \infty)$ (proměnná a se uvažuje pouze v tomto intervalu vzhledem k slovnímu zadání úlohy — je to délka strany). Zde nemůžeme využít Weierstrassovu větu, protože daný interval není uzavřený ani ohraničený. Tedy v této chvíli nevíme, zda funkce S vůbec nějaké globální minimum bude mít. Budeme vyšetřovat monotonii funkce S na intervalu $(0, \infty)$.

1. Vypočteme derivaci funkce S:

$$S'(a) = 2a - \frac{4V}{a^2}\,.$$

2. Určíme intervaly, na nichž je S' kladná, resp. záporná.
   a) Určíme nulové body derivace:

   $$S'(a) = 0 \;\Leftrightarrow\; 2a - \frac{4V}{a^2} = 0 \;\Leftrightarrow\; 2a^3 = 4V \;\Leftrightarrow\; a_0 = \sqrt[3]{2V}\,.$$

   Po dosazení hodnoty $V = 32\ \mathrm{m}^3$, dostáváme $a_0 = 4$ m.
   b) Rozdělíme interval $(0, \infty)$ bodem $a_0 = 4$ na dva disjunktní intervaly $(0, 4)$, $(4, \infty)$.
   c) Určíme znaménko S' na těchto intervalech: Na intervalu $(0, 4)$ je S' záporná a na intervalu $(4, \infty)$ je S' kladná.
3. Monotonie: Funkce S je na $(0, 4)$ klesající a na $(4, \infty)$ rostoucí. S má tedy v bodě a_0 ostré lokální minimum.

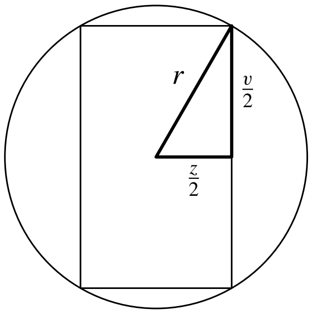
Vzhledem k vyšetřené monotonii vidíme, že bod lokálního minima musí být zároveň bodem globálního minima funkce S na intervalu $(0, \infty)$ (v žádném jiném bodě nemůže být funkční hodnota nižší).
Závěr: Bazén bude splňovat zadané podmínky, bude-li mít rozměry $a = 4$ m, $v = 2$ m ▲

Nyní přistupme k řešení tří příkladů, jejichž zadání jsme si uvedli v úvodní kapitole na straně 3.

Příklad 10.10. Z břevna kruhového průřezu s poloměrem $r = 20$ cm máme vytesat trám, který bude mít průřez ve tvaru obdélníku se stranami z a v („základnou“ a „výškou“). Jak máme volit z a v, aby trám měl maximální nosnost, víme-li, že jeho nosnost je úměrná první mocnině z a druhé mocnině v?

Řešení. Znázorníme-li si schématicky do obrázku průřez břevna jako kruh a průřez hledaného trámu jako obdélník vepsaný do daného kruhu — viz obr. 10.4, můžeme zadání úlohy zformulovat takto:

Jaké rozměry má mít obdélník vepsaný do kruhu s poloměrem 20 cm, má-li být součin základny z a druhé mocniny výšky v maximální?



Obr. 10.4

Podle Pythagorovy věty platí

$$r^2 = \left(\frac{z}{2}\right)^2 + \left(\frac{v}{2}\right)^2 ,$$

odkud

$$v^2 = 4r^2 - z^2.$$

Chceme, aby trám měl maximální nosnost, tedy ptáme se, pro která z je

$$f(z) = zv^2 = z\left(4r^2 - z^2\right) = 4r^2 z - z^3$$

maximální. Číslo z hledáme pouze na intervalu $\langle 0, 40\rangle$, neboť šířka trámu musí být větší nebo rovna nule a nemůže být větší než průměr břevna, tj. z nemůže být větší než $2r = 40$.

Matematická formulace úlohy: Najděte globální maximum funkce f dané předpisem

$$f(z) = 4r^2 z - z^3$$

na intervalu $\langle 0, 40\rangle$.

Protože funkce je spojitá a interval ohraničený a uzavřený, podle Weierstrassovy věty globální maximum existuje. Použijeme známý postup.

1. Najdeme body podezřelé z lokálního extrému v intervalu $(0, 40)$. K tomu potřebujeme derivaci funkce f.

$$f'(z) = 4r^2 - 3z^2.$$

   a) Najdeme stacionární body funkce f:

$$f'(z) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4r^2 - 3z^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z_0 = \pm\sqrt{\frac{4r^2}{3}}.$$

   Protože uvažujeme pouze $z > 0$, dostáváme jediný stacionární bod:

$$z_0 = +\sqrt{\frac{4r^2}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\, r = \frac{2\sqrt{3}}{3}\, r.$$

   Po dosazení za $r = 20$ cm, získáme

$$z_0 = \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot 20 \doteq 23{,}1.$$

   b) Protože derivace existuje na celém intervalu $\langle 0, 40\rangle$, je z_0 jediný podezřelý bod z lokálního extrému.

2. Vypočteme funkční hodnotu v bodě z_0 a v krajních bodech zadaného intervalu.

$$\begin{aligned} f(z_0) &= \frac{16}{9}\sqrt{3}\,r^3 \doteq 24\,633{,}6 > 0,\\ f(0) &= 4\cdot 20^2\cdot 0 - 0^3 = 0,\\ f(40) &= 4\cdot 20^2\cdot 40 - (40)^3 = 0. \end{aligned}$$

3. Největší funkční hodnotu nabývá funkce f v bodě z_0, který je tedy bodem globálního maxima. Vzhledem ke slovní formulaci úlohy dopočítáme i výšku trámu:

$$v_0 = \sqrt{4r^2 - \frac{4}{3}r^2} = \sqrt{\frac{8}{3}}\,r = \sqrt{\frac{8}{3}}\cdot 20 \doteq 32{,}6.$$

Závěr: Maximální nosnost $24\,633{,}6\ \mathrm{cm}^3$ bude mít trám o obdélníkovém průřezu s rozměry $z_0 = 23{,}1$ cm a $v_0 = 32{,}6$ cm. ▲

Příklad 10.11. Světelný zdroj Z_2 (např. pouliční svítilna) má vzdálenost 36 m od světelného zdroje Z_1. Zdroj Z_2 má osmkrát větší intenzitu než zdroj Z_1. Který bod na spojnici obou zdrojů bude nejméně osvětlený? (Intenzita osvětlení světelným zdrojem je přímo úměrná intenzitě zdroje a klesá s druhou mocninou vzdálenosti od uvažovaného zdroje.)

Řešení. Označme a, $a > 0$, intenzitu zdroje Z_1. Intenzita zdroje Z_2 je $8a$. Označme dále x vzdálenost bodu P na spojnici bodů Z_1 a Z_2 měřenou od zdroje Z_1. Pak intenzita osvětlení v bodě P od zdroje Z_1 bude úměrná číslu a/x^2, od zdroje Z_2 číslu $8a/(36-x)^2$ (se stejnou konstantou úměrnosti).

Tedy máme najít na intervalu $(0, 36)$ takové x, pro které bude součet obou intenzit minimální.

Matematická formulace: Najděte globální minimum funkce f dané předpisem

$$f(x) = \frac{a}{x^2} + \frac{8a}{(36-x)^2}\,,\quad a = \text{konst.}$$

na intervalu $(0, 36)$.

Interval není uzavřený, nelze tedy využít Weierstrassovu větu. Nevíme, zda globální minimum bude existovat. Pokusíme se vyšetřit monotonii funkce f na intervalu $(0, 36)$.

1. Vypočteme první derivaci funkce f.

$$\begin{aligned} f'(x) &= (ax^{-2})' + (8a(36-x)^{-2})' = -2ax^{-3} + 8a(-2)(36-x)^{-3}(-1) =\\ &= -\frac{2a}{x^3} + \frac{16a}{(36-x)^3}\,. \end{aligned}$$

2. Určíme intervaly, na nichž je f' kladná, resp. záporná.

a) Najdeme stacionární body:

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{2a}{x^3} + \frac{16a}{(36-x)^3} = 0.$$

Rovnici můžeme řešit tak, že zlomky na levé straně převedeme na společného jmenovatele. (Zkuste to, nebude to hezká rovnice!) Ale protože $x > 0$ a $36 - x > 0$, můžeme předchozí rovnici upravit takto:

$$\frac{2a}{x^3} = \frac{16a}{(36-x)^3} \;\Leftrightarrow\; \frac{(36-x)^3}{x^3} = \frac{16a}{2a} \;\Leftrightarrow\; \frac{(36-x)^3}{x^3} = 8 \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\; \frac{36-x}{x} = 2 \;\Leftrightarrow\; 36 - x = 2x \;\Leftrightarrow\; 3x = 36 \;\Leftrightarrow\; x = 12.$$

Stacionárním bodem je tedy bod $x_0 = 12$.
Funkce f má všude v otevřeném intervalu $(0, 36)$ první derivaci. Tedy lokální extrémy může mít pouze ve stacionárních bodech.

b) Rozdělíme interval $(0, 36)$ bodem $x_0 = 12$ na dva intervaly. Dostaneme $(0, 12)$, $(12, 36)$.

c) V každém z nich vybereme jeden bod, např. v prvním bod 2 a ve druhém 20, a určíme znaménko první derivace v těchto bodech:

$$f'(2) = -\frac{a}{4} + \frac{2a}{17^3} \doteq -0{,}249a < 0, \qquad f'(20) = -\frac{a}{4 \cdot 10^3} + \frac{a}{16^2} \doteq 0{,}004a > 0.$$

Tedy dle Cauchyovy-Bolzanovy věty platí, že $f'(x) < 0$ pro $x \in (0, 12)$ a $f'(x) > 0$ pro $x \in (12, 36)$.

Funkce f je tudíž na intervalu $(0, 12)$ klesající a na intervalu $(12, 36)$ rostoucí. V bodě $x_0 = 12$ tedy nabývá ostrého lokálního minima.

Z výše uvedeného je zřejmé, že v žádném bodě intervalu $(0, 12)$ ani intervalu $(12, 36)$ nemůže být funkční hodnota nižší, než je funkční hodnota v bodě $x_0 = 12$, tedy funkce f nabývá v bodě $x_0 = 12$ i globálního minima.

Ještě vypočteme funkční hodnotu funkce f v bodě $x_0 = 12$:

$$f(12) = \frac{a}{12^2} + \frac{8a}{(36-12)^2} = \frac{a}{12^2} + \frac{8a}{24^2} = \frac{a}{12^2} + \frac{8a}{2^2 \cdot 12^2} = \frac{a}{144} + \frac{2a}{144} = \frac{3a}{144} = \frac{a}{48}.$$

Závěr: Nejméně osvětlený bod se nachází ve vzdálenosti 12 m od zdroje Z_1. ▲

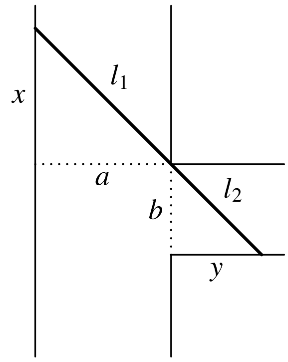
Příklad 10.12. Z kanálu šířky $a = 6$ m vychází pod pravým úhlem kanál šířky $b = 4$ m (viz obr. 10.5). Najděte největší délku tyče, kterou je možno splavit z jednoho kanálu do druhého.

Řešení. Označme písmenem l délku tyče. Z obrázku 10.5 je zřejmé, že pro délku tyče, kterou je ještě možno splavit z jednoho kanálu do druhého, platí

$$l = l_1 + l_2 = \sqrt{x^2 + a^2} + \sqrt{b^2 + y^2}.$$

Dále je vidět, že platí

$$\frac{y}{b} = \frac{a}{x}, \quad \text{tj.} \quad y = \frac{a \cdot b}{x}.$$



Obr. 10.5

Dosadíme do vztahu pro délku l a dostaneme

$$l(x) = \sqrt{x^2 + a^2} + \sqrt{b^2 + \frac{a^2b^2}{x^2}} = \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{b}{x}\sqrt{x^2 + a^2} = \sqrt{x^2 + a^2} \cdot \left(1 + \frac{b}{x}\right).$$

Největší délka tyče, kterou je ještě možno splavit, nesmí být větší než minimum funkce l na intervalu $(0, +\infty)$. Je to vlastně „vzpříčená" poloha tyče. Samozřejmě kratší tyč lze splavit také („nedrhne" o stěny kanálu), ovšem nás zajímá nejdelší možná tyč, tedy právě „vzpříčená poloha". Delší by už „neprošla".

Matematická formulace úlohy zní tedy takto: Najděte globální minimum funkce l dané předpisem

$$l(x) = \sqrt{x^2 + a^2} \cdot \left(1 + \frac{b}{x}\right).$$

na intervalu $(0, +\infty)$.

Interval není uzavřený ani ohraničený, nelze využít Weierstrassovu větu. Vyšetříme monotonii funkce l na intervalu $(0, +\infty)$.

1. Vypočteme první derivaci funkce l.

$$l'(x) = \frac{\frac{1}{2} \cdot 2x}{\sqrt{x^2 + a^2}} \cdot \left(1 + \frac{b}{x}\right) + \sqrt{x^2 + a^2} \cdot \left(-\frac{b}{x^2}\right) =$$
$$= \frac{x + b}{\sqrt{x^2 + a^2}} - \frac{b\sqrt{x^2 + a^2}}{x^2} = \frac{x^3 + bx^2 - b(x^2 + a^2)}{x^2\sqrt{x^2 + a^2}} = \frac{x^3 - a^2b}{x^2 \cdot \sqrt{x^2 + a^2}}.$$

2. Určíme intervaly, na nichž je l' kladná, resp. záporná.
   a) Najdeme stacionární body:

   $$l'(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - a^2b = 0 \Leftrightarrow x_0 = \sqrt[3]{a^2b} = \sqrt[3]{6^2 \cdot 4} = 2\sqrt[3]{18} \doteq 5{,}2.$$

   Funkce l má derivaci všude na intervalu $(0, \infty)$, bod x_0 je tedy jediným bodem „podezřelým " z lokálního extrému.
   b) Rozdělíme interval $(0, \infty)$ bodem $x_0 = 2\sqrt[3]{18}$ na dva intervaly $(0, 2\sqrt[3]{18})$, $(2\sqrt[3]{18}, \infty)$.

c) V každém z nich vybereme jeden bod, např. 1 a 10 a určíme znaménko první derivace v těchto bodech:

$$l'(1) = \frac{1 - 6^2 \cdot 4}{1\sqrt{1 + 6^2}} < 0; \qquad l'(10) = \frac{1000 - 6^2 \cdot 4}{100\sqrt{100 + 6^2}} > 0.$$

Funkce l tedy na intervalu $(0, 2\sqrt[3]{18})$ klesá a na intervalu $(2\sqrt[3]{18}, \infty)$ roste. V bodě $x_0 = 2\sqrt[3]{18}$ je tedy ostré lokální minimum.

Bod x_0 je jediným bodem, kde může nastat globální minimum. Funkce l je spojitá a kladná na intervalu $(0, \infty)$ a klesá vlevo od x_0 a roste vpravo od x_0. Tedy funkce l nabývá v bodě x_0 také globálního minima.

Pro největší délku hledané tyče, tj. funkční hodnotu funkce l v bodě x_0 dostaneme

$$l(x_0) = \sqrt{\left(\sqrt[3]{a^2 b}\right)^2 + a^2} \cdot \left(1 + \frac{b}{\sqrt[3]{a^2 b}}\right) = \sqrt{a^{\frac{4}{3}} \cdot b^{\frac{2}{3}} + a^2} \cdot \left(1 + \frac{b}{a^{\frac{2}{3}} \cdot b^{\frac{1}{3}}}\right) =$$

$$= \sqrt{a^2(a^{-\frac{2}{3}} b^{\frac{2}{3}} + 1)} \cdot \left(1 + a^{-\frac{2}{3}} b^{\frac{2}{3}}\right) = a\left(a^{-\frac{2}{3}} b^{\frac{2}{3}} + 1\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(a^{-\frac{2}{3}} b^{\frac{2}{3}} + 1\right) =$$

$$= a \cdot \left(a^{-\frac{2}{3}} b^{\frac{2}{3}} + 1\right)^{\frac{3}{2}} = a \left(\frac{b^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}}\right)^{\frac{3}{2}} = a \frac{\left(b^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}}{a} = \left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Po dosazení hodnot $a = 6$ m, $b = 4$ m dostaneme $l(x_0) \doteq 14$ m.

Závěr: Největší délka tyče, kterou je možno splavit z jednoho kanálu do druhého, je tudíž asi 14 metrů. ▲

Σ Pojmy k zapamatování

— globální maximum a minimum funkce f na množině M,

— Weierstrassova věta.

? Kontrolní otázky

1. Vysvětlete vztah mezi Weierstrassovou větou a globálními extrémy.
2. Jak hledáme globální extrémy dané funkce v případě, že nejsou splněny předpoklady Weierstrassovy věty?

Příklady k procvičení

!

1. Najděte globální extrémy funkce f (pokud existují):

   a) $f\colon y = x^2 - 6x + 10,\ x \in \langle -1, 5\rangle$,

   b) $f\colon y = x^2 \ln x,\ x \in \langle 1, \mathrm{e}\rangle$,

   c) $f\colon y = x - 3\ln x,\ x \in \langle 1, \mathrm{e}^2\rangle$,

   d) $f\colon y = \sqrt[3]{(x-2)^2},\ x \in \langle 0, 3\rangle$,

   e) $f\colon y = \operatorname{arctg} \dfrac{1-x}{1+x},\ x \in \langle 0, 1\rangle$,

   f) $f\colon y = x^x,\ x \in (0, \infty)$.

2. Mezi všemi kladnými čísly vyberte to, jehož součet s převrácenou hodnotou je minimální.

3. Mezi všemi obdélníky daného obsahu P vyberte ten, který má nejmenší obvod.

4. Mezi všemi okny daného obvodu a, které mají tvar sjednocení obdélníku a půlkruhu sestrojeného nad jednou jeho stranou, vyberte to, které má největší obsah.

5. Určete rozměry parního kotle tvaru válce tak, aby při daném objemu V bylo ochlazování páry ve válci nejmenší, tj. aby povrch válce byl minimální.

6. Z obdélníkového plechu o velikosti 80 cm krát 50 cm se má po odstřižení stejně velkých čtverců v rozích plechu vyrobit krabice bez víka. Jak velké čtverce je třeba odstřihnout, aby vzniklá krabice měla maximální objem, a jak velký bude tento objem?

7. Na přímce o rovnici $y = 3x + 1$ najděte bod, který je nejblíže bodu $(8, -5)$.

8. Do elipsy o poloosách a, b vepište obdélník největšího obsahu.

9. Najděte kladná čísla a, b tak, aby body $A = (a, 0)$, $B = (0, b)$, $C = (2, 4)$ ležely na jedné přímce a aby vzdálenost bodů A a B byla minimální. Vypočtěte tuto vzdálenost.

10. Z 1 m^3 betonu máme, pokud je to možné, odlít co nejvyšší těleso buď ve tvaru krychle, nebo koule, nebo koule postavené na krychli.

*****

Lenost činí všechny věci obtížnými, píle všechny snadnými.

Energie a vytrvalost si dobude všech věcí.

(B. Franklin)

*****

Kapitola 11

Aproximace funkce polynomem

Průvodce studiem

V inženýrských disciplínách jsou často různé vztahy vyjadřovány velmi složitými funkcemi. A tak přirozeně vzniká otázka, zda by bylo možné danou složitou funkci nahradit (aproximovat) funkcí jednodušší, jejíž hodnoty lze snadno vypočítat.

Tato problematika je v současné matematice velmi podrobně propracována. My se v této kapitole seznámíme s tím, jak lze danou funkci na okolí nějakého bodu (tj. lokálně) aproximovat pomocí polynomiálních funkcí. Polynomy mají totiž spoustu výhodných vlastností. Například to, že funkční hodnotu každého polynomu lze vypočítat pouze pomocí operací sčítání a násobení. Další velmi pěknou vlastností je to, že polynomy mají derivace libovolného řádu a derivací polynomu dostáváme opět polynom.

Postupně si ukážeme, jak zvolit polynomiální funkci, abychom se při výpočtu funkční hodnoty dopustili co nejmenší chyby, jak lze chybu odhadnout, jak závisí chyba aproximace na tom, jak daleko jsme od zadaného bodu, atd.

Nejprve se budeme věnovat nejjednodušší aproximaci pomocí polynomu prvního stupně, tj. danou funkci budeme v okolí nějakého bodu nahrazovat lineární funkcí. Dále pak budeme funkci aproximovat obecně polynomem n-tého stupně.

Cíle

Po prostudování této kapitoly budete umět

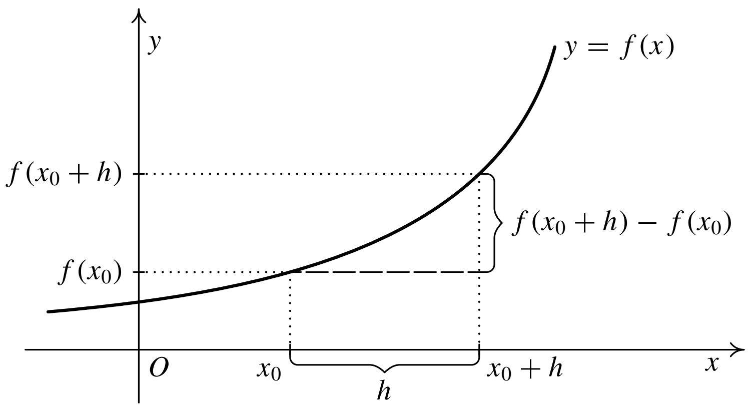
- najít diferenciál funkce v daném bodě,
- definovat pojem diferencovatelnosti funkce,
- najít Taylorův polynom funkce v daném bodě.

11.1 Diferenciál

Jak jsme již v úvodu naznačili, budeme se nejprve věnovat aproximaci zadané funkce f pomocí lineární funkce.

Nechť f je funkce znázorněná na obr. 11.1 a x_0 libovolný bod. Vezměme nyní malé číslo h (kladné nebo záporné) a posuňme se z bodu x_0 do bodu $x_0 + h$.

Číslo h někdy nazýváme *přírůstek nezávisle proměnné* a rozdíl $f(x_0 + h) - f(x_0)$ nazýváme *přírůstek závisle proměnné* neboli *přírůstek funkčních hodnot*.



Obr. 11.1

Chceme nyní funkci f nahradit v okolí $\mathscr{O}(x_0)$ funkcí lineární. Tj. chceme najít takové číslo $A \in \mathbb{R}$, aby v „dostatečné blízkosti“ bodu x_0 platilo:

$$f(x_0 + h) - f(x_0) \doteq A \cdot h.$$

Při tomto nahrazení se dopouštíme jisté chyby. Označme si ji $\omega(h)$. Je to funkce proměnné h, pro niž tedy dostáváme:

$$\omega(h) = f(x_0 + h) - f(x_0) - A \cdot h. \tag{11.1}$$

Chceme zjistit, zda existuje takové číslo A, že funkce $\omega(h)$ definovaná vztahem (11.1) nabývá pro „dostatečně malá“ h „velmi malých“ hodnot. Zde je třeba se zamyslet nad tím, co budeme rozumět pod pojmem „velmi malá“ hodnota.

Mohli bychom požadovat, aby $\lim\limits_{h\to 0} \omega(h) = 0$, tedy

$$\lim_{h\to 0} \omega(h) = \lim_{h\to 0} (f(x_0 + h) - f(x_0) - A \cdot h) = 0.$$

To však není rozumné, neboť pro spojitou funkci f by této „míře přesnosti“ vyhovovala jakákoliv volba $A \in \mathbb{R}$.

Rozumnější je požadovat, aby $\lim\limits_{h\to 0} \frac{\omega(h)}{h} = 0$. Pak

$$\lim_{h\to 0} \frac{\omega(h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - A \cdot h}{h} = \lim_{h\to 0} \left(\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - A \right).$$

Tedy
$$\lim_{h\to 0}\frac{\omega(h)}{h}=0 \qquad \Leftrightarrow \qquad A=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$
Požadujeme-li, aby $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\omega(h)}{h}=0$, pak existuje právě jedno číslo $A\in\mathbb{R}$ splňující vztah (11.1).

Definice 11.1. Předpokládejme, že je funkce f definovaná na nějakém okolí bodu x_0. Existuje-li takové číslo $A\in\mathbb{R}$, že pro funkci ω definovanou vztahem (11.1) platí $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\omega(h)}{h}=0$, pak říkáme, že *funkce f je v bodě x_0 diferencovatelná.*
Lineární funkci $\mathrm{d}f_{x_0}$ definovanou předpisem $\mathrm{d}f_{x_0}(h)=A\cdot h$ nazýváme *diferenciálem funkce f v bodě x_0.*

Předpokládejme nyní, že je funkce f v bodě x_0 diferencovatelná a diferenciál $\mathrm{d}f_{x_0}(h)$ je dán vztahem $\mathrm{d}f_{x_0}(h)=A\cdot h$. Všimněme si, čemu je rovno číslo A. Odvodili jsme, že platí
$$A=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$
Dle poznámky 7.4 a definice 7.2 je tedy
$$A=f'(x_0).$$

Věta 11.2. *Funkce f je v bodě $x_0\in\mathbb{R}$ diferencovatelná právě tehdy, když existuje vlastní derivace $f'(x_0)$ funkce f v bodě x_0. Pro diferenciál pak platí*
$$\mathrm{d}f_{x_0}(h)=f'(x_0)\cdot h \quad \text{pro každé } h\in\mathbb{R}.$$

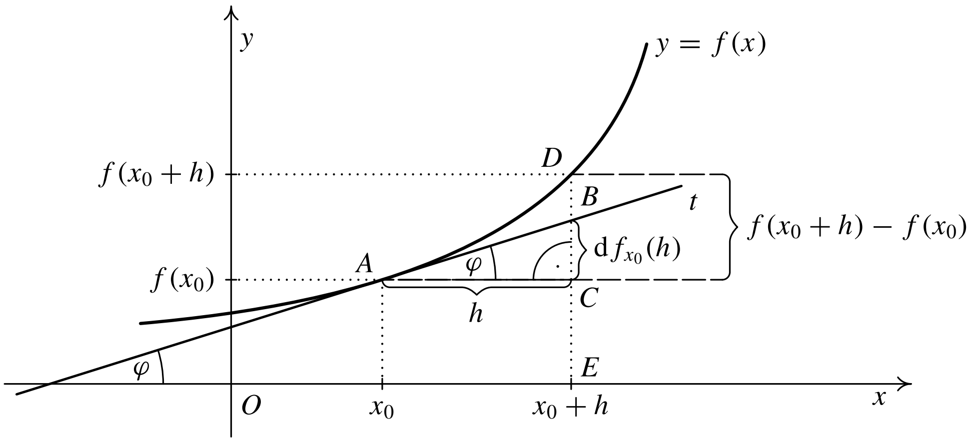
Důkaz. Věta má tvar ekvivalence, musíme tedy dokázat obě implikace.

1. Předpokládáme, že je funkce f diferencovatelná v bodě x_0, tj. existuje takové číslo $A\in\mathbb{R}$, že platí
$$\lim_{h\to 0}\frac{\omega(h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)-A\cdot h}{h}=0.$$
Z toho jednoznačně vyplývá, že
$$A=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f'(x_0).$$
Dokázali jsme, že z diferencovatelnosti funkce v bodě x_0 plyne existence vlastní derivace $f'(x_0)$ a je rovna A.
2. Předpokládejme, že existuje vlastní derivace $f'(x_0)$. Chceme ukázat, že funkce f je diferencovatelná v bodě x_0. Tj. chceme ukázat, že existuje číslo $A\in\mathbb{R}$ takové, že
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)-A\cdot h}{h}=0.$$

Položme $A = f'(x_0)$. Pak

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)-A\cdot h}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)-f'(x_0)\cdot h}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - f'(x_0)\right) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - \lim_{h\to 0} f'(x_0) =$$
$$= f'(x_0) - f'(x_0) = 0.$$

Dokázali jsme, že hledané číslo A existuje, tedy funkce f je diferencovatelná. □



Obr. 11.2

Poznámka 11.3.

1. Z předchozí věty vyplývá, že pokud diferenciál existuje, je určen jednoznačně.
2. Tvrzení, že funkce f je v bodě x_0 diferencovatelná, je totéž, jako že funkce f má v bodě x_0 derivaci $f'(x_0)$. Tedy například větu „má-li funkce f je v bodě x_0 derivaci, pak je v tomto bodě spojitá“, bychom mohli přeformulovat „je-li funkce f v bodě x_0 diferencovatelná, je v bodě x_0 spojitá“.
3. Protože je diferencovatelnost funkcí jedné proměnné totéž jako vlastnost míti derivaci, je diferenciál funkcí jedné proměnné celkem nezajímavý. Podstatného významu nabude až při studiu diferenciálního počtu funkcí více proměnných.
4. Všimněme si nyní geometrického významu diferenciálu — viz obr. 11.2.
   V bodě $(x_0, f(x_0))$ jsme sestrojili přímku t ke grafu funkce f. V pravoúhlém trojúhelníku ACB, který nám vznikne, je $|AC| = h$ a $|BC| = \mathrm{d}f_{x_0}(h)$. Pro směrnici této přímky platí

   $$k_t = \operatorname{tg}\varphi = \frac{|BC|}{|AC|} = \frac{\mathrm{d}f_{x_0}(h)}{h} = \frac{f'(x_0)\cdot h}{h} = f'(x_0)\,.$$

   Vyšlo nám, že směrnice přímky t je rovna první derivaci v bodě x_0. Jedná se tedy o tečnu ke grafu funkce f sestrojenou v dotykovém bodě $(x_0, f(x_0))$.

Skutečná funkční hodnota v bodě $x_0 + h$ je tedy součtem dvou částí:

- $f(x_0) + \mathrm{d}f_{x_0}(h)$, což je vlastně hodnota na tečně t (úsečka EB),
- $\omega(h)$, což je část mezi tečnou t a grafem funkce f (úsečka BD).

Příklad 11.4. Nechť je dáno $x_0 = 1$. Najděte $\mathrm{d}f_{x_0}(h)$, kde $f(x) = \sqrt{x^2+1}$.

Řešení. Vypočteme derivaci funkce f. Vyjde

$$f'(x) = \left(\sqrt{x^2+1}\right)' = \left[(x^2+1)^{\frac{1}{2}}\right]' = \frac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}\,2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Tedy

$$\mathrm{d}f_{x_0}(h) = f'(x_0)\cdot h = \frac{x_0}{\sqrt{{x_0}^2+1}}\,h.$$

Pro $x_0 = 1$ je

$$\mathrm{d}f_1(h) = \frac{1}{\sqrt{1^2+1^2}}h = \frac{1}{\sqrt{2}}\,h.$$

▲

Všimněte si, že výsledkem je funkce proměnné h (diferenciál je funkce). Pro konkrétní h pak dostaneme konkrétní výsledek. Např. pro $h = 0{,}01$ je

$$\mathrm{d}f_1(0{,}01) = \frac{1}{\sqrt{1^2+1^2}}\,0{,}01 = \frac{0{,}01}{\sqrt{2}} \doteq 0{,}007.$$

Nyní si všimneme použití diferenciálu. První se bude týkat přibližného výpočtu hodnoty $f(x_0+h)$. Jak jsme již konstatovali dříve — viz obr. 11.2, je pro $f'(x_0) \neq 0$ a „dostatečně malé“ h, úsečka BD mnohem kratší než úsečka BC a lze ji tedy při srovnání s ní s určitou chybou zanedbat. Jinými slovy $\omega(h)$ zanedbáváme ve srovnání s $\mathrm{d}f_{x_0}(h)$. Tím dostaneme ze vztahu (11.1) přibližný vzorec

$$f(x_0+h) \doteq f(x_0) + f'(x_0)\cdot h. \tag{11.2}$$

Obecný odhad chyby, které se použitím tohoto přibližného vzorce dopustíme, nebudeme prozatím provádět — lze to udělat pomocí Taylorovy věty, o které budeme hovořit dále.

Příklad 11.5. Nechť je dána funkce f předpisem $f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x + 10$. Vypočtěte hodnotu rozdílu $f(x_0+h) - f(x_0)$ a porovnejte tuto hodnotu s hodnotou diferenciálu funkce f v bodě $x_0 = 5$ pro následující hodnoty přírůstku h:
a) $h = 1$, b) $h = 0{,}1$, c) $h = 0{,}01$.

Řešení. Nejprve vypočteme hodnoty přírůstků $f(x_0+h) - f(x_0)$ pro $x_0 = 5$ a různé hodnoty h:

a) pro $h = 1$ je $f(x_0+h) - f(x_0) = f(5+1) - f(5) = 42$,
b) pro $h = 0{,}1$ je $f(x_0+h) - f(x_0) = f(5+0{,}1) - f(5) = 3{,}201$,

c) pro $h = 0{,}01$ je $f(x_0 + h) - f(x_0) = f(5 + 0{,}01) - f(5) = 0{,}311\,001$.

Vyjádřeme nyní diferenciál $\mathrm{d}f_{x_0}(h)$ funkce f v bodě x_0: $\mathrm{d}f_{x_0}(h) = f'(x_0) \cdot h$.
Vypočteme derivaci funkce f: $f'(x) = 3x^2 - 10x + 6$.
Dosadíme bod $x_0 = 5$: $f'(5) = 31$. Tedy $\mathrm{d}f_5(h) = 31 \cdot h$.

a) pro $h = 1$ je $\mathrm{d}f_5(1) = 31$,
b) pro $h = 0{,}1$ je $\mathrm{d}f_5(0,1) = 3{,}1$,
c) pro $h = 0{,}01$ je $\mathrm{d}f_5(0,01) = 0{,}31$.

Nyní porovnejme hodnoty rozdílu $f(x_0+h) - f(x_0)$ a diferenciálu $\mathrm{d}f_{x_0}(h)$. Označme písmenem Ch chybu, které se dopouštíme, pokud tento rozdíl nahradíme diferenciálem:

a) $Ch(1) = 11$,
b) $Ch(0{,}1) = 0{,}101$,
c) $Ch(0{,}01) = 0{,}001\,001$.

Závěr: Vidíme, že nahrazení rozdílu funkčních hodnot diferenciálem při pevně zvoleném čísle x_0 je tím přesnější, čím jsou hodnoty přírůstku h menší (v absolutní hodnotě). ▲

Tedy pokud známe hodnotu nějaké funkce a její derivace pouze v jednom bodě a funkce splňuje naše předpoklady (existuje konečná derivace této funkce v daném bodě), můžeme odhadnout funkční hodnoty v bodech, které jsou „blízko“ danému bodu, pomocí diferenciálu.

Příklad 11.6. Užitím diferenciálu vypočtěte přibližně:

a) $\sqrt{382}$, b) $\ln 1{,}3$, c) $\sin(-0{,}22)$.

Řešení. Ve všech případech budeme využívat vztah (11.2). Číslo x_0 budeme volit tak, aby $f(x_0)$ bylo možno vypočíst bez použití kalkulačky.

a) Označme $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 400$, $h = -18$. Dále

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}, \qquad f'(x_0) = f'(400) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{400}} = \frac{1}{40}.$$

Tedy

$$\sqrt{382} \doteq f(x_0) + f'(x_0) \cdot h = \sqrt{400} + \frac{1}{40} \cdot (-18) = 20 - \frac{9}{20} = 19{,}55.$$

b) Označme $f(x) = \ln x$, $x_0 = 1$, $h = 0,3$. Derivace

$$f'(x) = \frac{1}{x}, \qquad f'(x_0) = f'(1) = 1,$$

tedy

$$\ln 1{,}3 \doteq f(x_0) + f'(x_0) \cdot h = \ln 1 + 1 \cdot 0{,}3 = 0 + 0{,}3 = 0{,}3.$$

c) Označme $f(x) = \sin x$, $x_0 = 0$, $h = -0{,}22$. Platí $f'(x) = \cos x$, $f'(0) = 1$, tedy

$$\sin(-0{,}22) \doteq f(x_0) + f'(x_0) \cdot h = \sin 0 + 1 \cdot (-0{,}22) = -0{,}22. \qquad \blacktriangle$$

Poznámka 11.7.
Použití diferenciálu na řešení úloh podobných předchozímu příkladu je v dnešní době kalkulaček a počítačů nepopíratelně archaismem. Způsob, jakým tyto stroje počítají, ovšem dobře ilustruje.

Vzorec (11.2) lze také použít, pokud neznáme analytický předpis funkce f a hodnoty $f(x_0)$ a $f'(x_0)$ jsme získali např. měřením. Zásadní význam má tento vztah (11.2) rovněž ve fyzice a dalších technických disciplínách při odvozování nejrůznějších vzorců, kdy se vyšší mocniny přírůstku (tj. u nás výraz $\omega(h)$) zanedbávají. Tyto členy vlastně zmizí při nějakém limitním přechodu. Použití diferenciálu znamená linearizaci problému.

Jiným příkladem použití diferenciálu je odhad absolutní a relativní změny veličiny. S těmito pojmy se často setkáme při různých měřeních. Při našem označení *absolutní změnou* rozumíme číslo $Ch = f(x_0 + h) - f(x_0)$ a *relativní změnou* číslo $Ch_r = \frac{Ch}{f(x_0)}$. Z toho, co již víme, plynou následující přibližná vyjádření pro tyto změny.

Absolutní změna: $$Ch \doteq \mathrm{d}f_{x_0}(h),$$

Relativní změna: $$Ch_r = \frac{Ch}{f(x_0)} \doteq \frac{\mathrm{d}f_{x_0}(h)}{f(x_0)}.$$

Později uvidíme, jak lze vyjádřit a odhadnout chyby těchto přibližných vzorců.

Příklad 11.8. Do plechu jsou vrtány kruhové otvory o poloměru $r = 1{,}2$ cm. Nepřesností výroby je způsobeno, že skutečný poloměr se může lišit a to maximálně o $0{,}1$ cm. Určete přibližně absolutní a relativní změnu obsahu kruhového otvoru.

Řešení. Obsah kruhu je dán vzorcem $f(r) = \pi r^2$. Nejprve máme určit absolutní změnu $f(r) - f(1{,}2)$, jestliže víme, že r se liší od $1{,}2$ maximálně o $h = 0{,}1$, tj. platí $|r - 1{,}2| \leqq 0{,}1$. Protože $f'(r) = (\pi r^2)' = 2\pi r$, dostaneme

$$Ch \doteq \mathrm{d}f_{1,2}(h) = f'(1{,}2) \cdot h = 2\pi \cdot 1{,}2 \cdot 0{,}1 = 0{,}24\pi \doteq 0{,}7536.$$

Pro odhad relativní změny pak vyjde

$$Ch_r = \frac{Ch}{f(x_0)} \doteq \frac{0,24\pi}{\pi(1{,}2)^2} = \frac{0{,}24\pi}{1{,}44\pi} = \frac{1}{6} \doteq 0{,}1667.$$

Absolutní změna obsahu kruhového otvoru je přibližně $0{,}75$ cm^2, relativní změna je přibližně $0{,}17$, tj. 17%. ▲

U výpočtů tohoto typu je nevýhodné, že si nemůžeme předem zadat přesnost výpočtu (velikost chyby). Jsme pouze schopni, pokud známe skutečnou hodnotu, vzniklou chybu odhadnout. Výpočty hodnot s předem danou přesností budeme provádět v části 11.2 týkající se Taylorova polynomu.

Na závěr tohoto oddílu uvedeme definici diferenciálů vyšších řádů.

Definice 11.9. Nechť $n \in \mathbb{N}$. *Diferenciálem n-tého řádu funkce f v bodě x_0* nazýváme funkci $\mathrm{d}^n f_{x_0}$ danou předpisem:

$$\mathrm{d}^n f_{x_0}(h) = f^{(n)}(x_0) \cdot h^n. \tag{11.3}$$

Diferenciál n-tého řádu funkce f v bodě x_0 je tedy polynom stupně nejvýše rovného n.

11.2 Taylorův polynom

V oddíle 11.1 jsme hovořili o diferenciálu. Jednalo se o nahrazení funkce na okolí daného bodu lineární funkcí, tedy polynomem stupně jedna. Je přirozené položit si otázku, zda by bylo možné nahradit výchozí funkci polynomem vyššího stupně, např. stupně dva (grafem je parabola), který by ji nahrazoval přesněji. Je-li t funkce, jejímž grafem je tečna k funkci f v bodě x_0, pak zřejmě platí:

$f(x_0) = t(x_0)$ .... tečna prochází bodem $(x_0, f(x_0))$,

$f'(x_0) = t'(x_0)$ .... derivace $f'(x_0)$ je stejná jako směrnice tečny.

Po polynomu, který hledáme, budeme obdobně požadovat, aby v bodě x_0 měl nejen stejnou funkční hodnotu a derivaci, ale aby se shodovaly i další derivace. Obecně budeme chtít funkci f, která má v bodě x_0 alespoň n-tou derivaci, nahradit polynomem T takovým, že

$$\begin{aligned} f(x_0) &= T(x_0), \\ f'(x_0) &= T'(x_0), \\ f''(x_0) &= T''(x_0), \\ &\vdots \\ f^{(n)}(x_0) &= T^{(n)}(x_0). \end{aligned}$$

Je otázkou, zda takový polynom existuje a jak ho najdeme.

Polynom T můžeme (jako každý polynom n-tého stupně) vyjádřit v tomto tvaru:

$$T(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n. \tag{11.4}$$

Vypočteme všechny derivace polynomu T až do n-tého řádu:

$$\begin{aligned} T'(x) &= a_1 + 2a_2(x - x_0) + \cdots + n \cdot a_n(x - x_0)^{n-1}, \\ T''(x) &= 2 \cdot 1a_2 + 3 \cdot 2a_3(x - x_0) + \cdots + n \cdot (n-1) \cdot a_n(x - x_0)^{n-2}, \\ &\vdots \\ T^{(n)}(x) &= n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \cdots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot a_n. \end{aligned}$$

Dosadíme bod x_0:

$$\begin{aligned} T'(x_0) &= a_1, \\ T''(x_0) &= 2! \cdot a_2, \\ T'''(x_0) &= 3! \cdot a_3, \\ &\vdots \\ T^{(n)}(x_0) &= n!\, a_n. \end{aligned}$$

Připomeňme, že pro faktoriál přirozeného čísla n platí:

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1; \text{ přitom klademe: } 0! = 1.$$

Nyní porovnáme tyto hodnoty s derivacemi funkce f v bodě x_0 (požadujeme, aby se hodnoty derivací funkce f a T v bodě x_0 shodovaly) a osamostatníme koeficienty a_n:

$$\begin{aligned} f(x_0) &= T(x_0) = a_0 && \Rightarrow \quad a_0 = f(x_0), \\ f'(x_0) &= T'(x_0) = a_1 && \Rightarrow \quad a_1 = f'(x_0), \\ f''(x_0) &= T''(x_0) = 2!\, a_2 && \Rightarrow \quad a_2 = \frac{1}{2!} f''(x_0), \\ &\vdots \\ f^{(n)}(x_0) &= T^{(n)}(x_0) = n!\, a_n && \Rightarrow \quad a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0). \end{aligned}$$

Dosadíme-li koeficienty $a_0, \dots, a_n$ do vztahu (11.4) pro polynom T, dostáváme

$$T(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n.$$

Definice 11.10. Nechť funkce f má v bodě x_0 derivace do řádu n. Pak se polynom

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

nazývá *Taylorův*[1]*polynom n-tého stupně* funkce f v bodě x_0.

Poznámka 11.11.

1. Funkce T_n je skutečně polynom — proměnná je x a vše ostatní jsou konstanty.
2. Stupeň polynomu T_n je nejvýše n. Pokud $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, je stupeň právě n, pokud platí $f^{(n)}(x_0) = 0$, je stupeň menší než n. Je-li T_n nulovým polynomem, pak stupeň není definován — viz poznámka 4.27.

[1] **Brook Taylor** (1685–1731) (čti tejlor) — anglický matematik. Zabýval se analýzou, mechanikou a balistikou.

3. Číslo x_0 nazýváme *střed Taylorova polynomu.*
4. Taylorův polynom lze zapsat pomocí diferenciálů vyšších řádů takto:

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{\mathrm{d} f_{x_0}(h)}{1!} + \frac{\mathrm{d}^2 f_{x_0}(h)}{2!} + \cdots + \frac{\mathrm{d}^n f_{x_0}(h)}{n!}, \text{ kde } h = x - x_0.$$

Nelze říci, že tento zápis by byl výrazně stručnější. U funkcí více proměnných, s nimiž se seznámíme v matematické analýze II, však bude zápis pomocí diferenciálů podstatně stručnější. Zde ho uvádíme spíše pro porovnání do budoucna.

Poznámka 11.12. Nahradíme-li danou funkci v okolí bodu x_0 Taylorovým polynomem, dopouštíme se tím určité chyby. Zamysleme se nyní nad touto chybou, kterou si označme $R(x)$. Platí

$$R(x) = f(x) - T(x),$$

kde $f(x)$ je funkční hodnota funkce f v bodě x a $T(x)$ je funkční hodnota Taylorova polynomu v bodě x.

- Podívejme se nejprve na nejjednodušší případ, kdy funkci nahrazujeme Taylorovým polynomem prvního stupně. Vyšli jsme z toho, že požadujeme

$$\begin{aligned} f(x_0) &= T(x_0), \\ f'(x_0) &= T'(x_0). \end{aligned}$$

Přitom $f(x_0) - T(x_0) = R(x_0)$ a $f'(x_0) - T'(x_0) = R'(x_0)$. Požadujeme tedy, aby platilo

$$R(x_0) = 0, \qquad R'(x_0) = 0. \tag{11.5}$$

Lze ukázat, že z platnosti (11.5) vyplývá platnost limity $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{R(x)}{x - x_0} = 0$.

Důkaz. Předpokládejme, že platí $R(x_0) = R'(x_0) = 0$. Pak

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R(x)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{R(x) - R(x_0)}{x - x_0} = R'(x_0) = 0.$$

Při úpravě jsme přidali do čitatele člen $R(x_0)$, který je podle předpokladu nulový, takže nezmění hodnotu limity. □

- Přejděme nyní k dalšímu případu, kdy funkci nahrazujeme Taylorovým polynomem druhého stupně. Řekli jsme si, že budeme požadovat, aby platilo

$$\begin{aligned} f(x_0) &= T(x_0), \\ f'(x_0) &= T'(x_0), \\ f''(x_0) &= T''(x_0). \end{aligned}$$

Přitom $f(x_0) - T(x_0) = R(x_0)$, $f'(x_0) - T'(x_0) = R'(x_0)$ a $f''(x_0) - T''(x_0) = R''(x_0)$. Požadujeme tedy, aby platilo

$$R(x_0) = 0, \qquad R'(x_0) = 0, \qquad R''(x_0) = 0. \tag{11.6}$$

Lze ukázat, že z platnosti (11.6) vyplývá platnost limity $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{R(x)}{(x - x_0)^2} = 0$.

Důkaz. Předpokládejme, že platí $R(x_0) = R'(x_0) = R''(x_0) = 0$. Pak

$$\lim_{x\to x_0} \frac{R(x)}{(x-x_0)^2} \overset{LP}{=} \lim_{x\to x_0} \frac{R'(x)}{2(x-x_0)} = \lim_{x\to x_0} \frac{R'(x)-R'(x_0)}{2(x-x_0)} = \frac{R''(x_0)}{2} = 0.$$

V prvním kroku jsme limitu, která je typu $\frac{0}{0}$, řešili l'Hospitalovým pravidlem a v dalším kroku jsme přidali do čitatele člen $R'(x_0)$, který je podle předpokladu nulový, takže nezmění hodnotu limity. □

- Analogicky bychom nalezli podmínku pro chybu, které se dopustíme, nahrazujeme--li funkci Taylorovým polynomem n-tého stupně:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{R(x)}{(x-x_0)^n} = 0. \tag{11.7}$$

Je tedy skutečně pravda, že čím vyšší stupeň Taylorova polynomu použijeme, tím bude nahrazení přesnější? Jinak řečeno, čím vyšší stupeň Taylorova polynomu použijeme, tím bude chyba menší? Podívejme se na podmínku pro chybu (11.7) — aby byla splněna, pak pro x velmi blízká x_0 musí být číslo $|R(x)|$ „mnohokráte menší“ než $|x-x_0|^n$. Se zvětšujícím se n se $|x-x_0|^n$ zmenšuje a tím se také musí zmenšovat $|R(x)|$. Tedy skutečně lze čekat, že čím vyšší stupeň Taylorova polynomu použijeme, tím bude nahrazení přesnější.

Příklad 11.13. Najděte Taylorův polynom

a) 1. stupně, b) 2. stupně, c) 3. stupně

funkce $f\colon y = \ln x$ se středem v bodě $x_0 = 1$.

Řešení. Máme $x_0 = 1$. Pro napsání $T_1(x)$, $T_2(x)$ a $T_3(x)$ potřebujeme určit hodnoty funkce a prvních tří derivací v bodě $x_0 = 1$. Je

$$\begin{aligned}
f(x) &= \ln x &&\Longrightarrow && f(1) = 0,\\
f'(x) &= \frac{1}{x} &&\Longrightarrow && f'(1) = 1,\\
f''(x) &= -\frac{1}{x^2} &&\Longrightarrow && f''(1) = -1,\\
f'''(x) &= \frac{2}{x^3} &&\Longrightarrow && f'''(1) = 2.
\end{aligned}$$

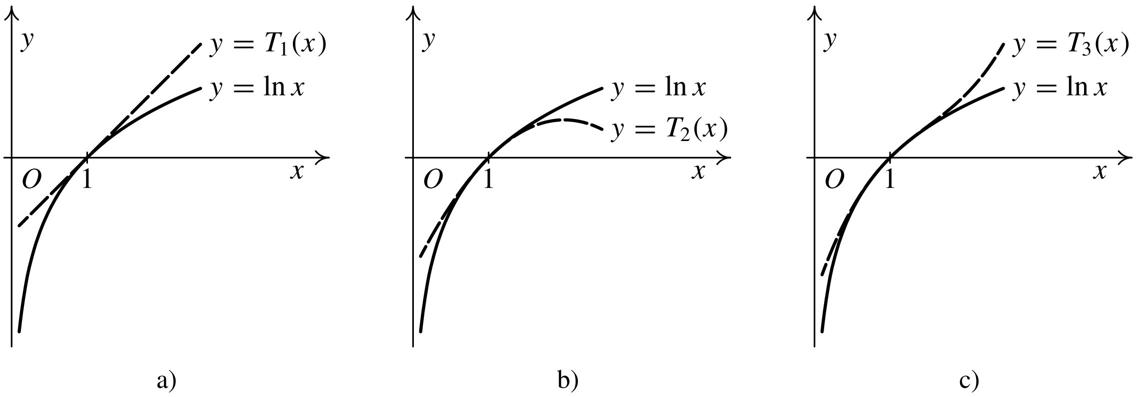
Tedy hledané polynomy vypadají takto:

a) $T_1(x) = 0 + 1\cdot(x-1) = x-1$,

b) $T_2(x) = T_1(x) + \dfrac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 = (x-1) - \dfrac{1}{2}(x-1)^2$,

c) $T_3(x) = T_2(x) + \dfrac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 = (x-1) - \dfrac{1}{2}(x-1)^2 + \dfrac{1}{3}(x-1)^3$.

Graf funkce f a Taylorových polynomů 1., 2. a 3. stupně ilustruje obrázek 11.3. ▲



Obr. 11.3: Funkce $\ln x$ a její Taylorovy polynomy

Příklad 11.14. Najděte Taylorův polynom 4. stupně funkce $f\colon\ y = x\ln x$ se středem v bodě $x_0 = 1$.

Řešení. Máme $x_0 = 1$, $n = 4$. Pro napsání $T_4(x)$ potřebujeme určit hodnoty funkce a prvních čtyř derivací v bodě $x_0 = 1$. Je

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x\ln x && \Longrightarrow && f(1) = 0,\\
f'(x) &= \ln x + x\,\frac{1}{x} = \ln x + 1 && \Longrightarrow && f'(1) = 1,\\
f''(x) &= \frac{1}{x} && \Longrightarrow && f''(1) = 1,\\
f'''(x) &= -\frac{1}{x^2} && \Longrightarrow && f'''(1) = -1,\\
f^{(4)}(x) &= \frac{2}{x^3} && \Longrightarrow && f^{(4)}(1) = 2.
\end{aligned}
$$

Obecně je

$$
\begin{aligned}
T_4(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}\,(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}\,(x-x_0)^2 &+\\
+ \frac{f'''(x_0)}{3!}\,(x-x_0)^3 &+ \frac{f^{(4)}(x_0)}{4!}\,(x-x_0)^4.
\end{aligned}
$$

Po dosazení vyjde

$$
\begin{aligned}
T_4(x) &= 0 + \frac{1}{1}\,(x-1) + \frac{1}{2}\,(x-1)^2 - \frac{1}{2\cdot 3}\,(x-1)^3 + \frac{2}{2\cdot 3\cdot 4}\,(x-1)^4 =\\
&= (x-1) + \frac{1}{2}\,(x-1)^2 - \frac{1}{6}\,(x-1)^3 + \frac{1}{12}\,(x-1)^4.
\end{aligned}
$$

▲

11.3 Taylorův vzorec

Nyní si všimněme vztahu funkce a jejího Taylorova polynomu. Již víme, že nahradíme-li funkci f na okolí daného bodu Taylorovým polynomem, dopouštíme se tím určité chyby. Chybu nahrazení funkce Taylorovým polynomem můžeme vyjádřit v tomto tvaru:

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x).$$

Vyjádření funkce f ve tvaru

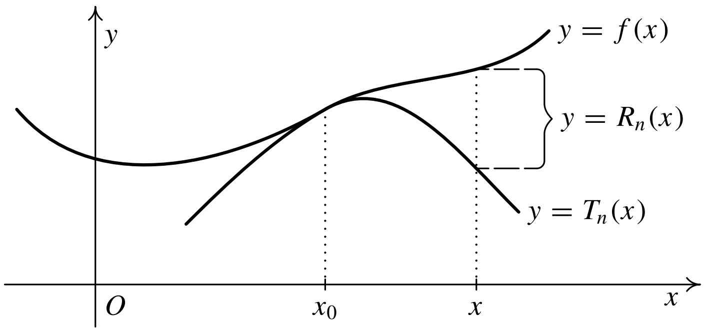
$$f(x) = T_n(x) + R_n(x)$$

nazýváme *Taylorův vzorec funkce* f *v bodě* x_0. Funkci R_n nazýváme *zbytek po* n*-tém členu v Taylorově vzorci funkce* f *v bodě* x_0.

Význam zbytku je znázorněn na obr. 11.4. Velikost zbytku nám říká, jak moc se liší T_n od f. Čím menší bude zbytek, tím přesnější bude přibližné vyjádření

$$f(x) \doteq T_n(x).$$

Tento vztah bude obecně pochopitelně platit jen v „malém“ okolí bodu x_0, tj. $|x - x_0|$ musí být „malé“. Jak malé, se dozvíme v následující větě.



Obr. 11.4

Věta 11.15 (Taylor). *Nechť má funkce* f *v okolí* $\mathcal{O}(x_0)$ *bodu* x_0 *vlastní derivace až do řádu* $n+1$, $n \geqq 1$. *Nechť* $x \in \mathcal{O}(x_0)$. *Pak existuje číslo* ξ *ležící mezi* x_0 *a* x *takové, že platí:*

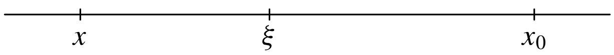
$$f(x) = T_n(x) + R_n(x),$$

kde

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,(x - x_0)^{n+1}.$$

Poznámka 11.16.

1. Uvedená podoba zbytku R_n se nazývá *Lagrangeův tvar zbytku*. Existuje řada jiných (mnohdy vhodnějších, ale složitějších) tvarů zbytku.
2. Číslo ξ, které závisí při pevném středu x_0 na volbě x, nemusí být dáno jednoznačně. Věta neříká nic o konkrétní hodnotě čísla ξ. Mluví jen o jeho existenci. Zdálo by se tedy, že její užitek bude malý. Avšak to, že ξ leží mezi x_0 a x — viz obr. 11.5, nám často umožňuje alespoň odhadnout velikost zbytku $R_n(x)$, tj. najít konstantu, která shora omezuje jeho absolutní hodnotu, což je v aplikacích velmi užitečné. Ukážeme to v následujících příkladech.



Obr. 11.5

3. Všimněte si, že zatímco pro určení T_n potřebujeme, aby f měla n derivací, předchozí věta vyžaduje o jednu derivaci více, tj. $n+1$.
4. Ve speciálním případě, kdy střed je $x_0 = 0$, mluvíme o *Maclaurinově*[1] *vzorci (a Maclaurinově polynomu)*. Jeho podoba je

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}\,x + \frac{f''(0)}{2!}\,x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,x^n + R_n(x).$$

Příklad 11.17. Najděte Taylorův vzorec pro $n = 2$, $x_0 = 1$ funkce f dané předpisem $f(x) = \operatorname{arctg} x$.

Řešení. Napíšeme nejprve obecně tvar Taylorova vzorce pro $n = 2$:

$$\begin{aligned} f(x) &= T_2(x) + R_2(x) = \\ &= f(1) + \frac{f'(1)}{1!}\,(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}\,(x-1)^2 + \frac{f'''(\xi)}{3!}\,(x-1)^3. \end{aligned}$$

Je tedy nutné vypočítat tři derivace funkce f dané předpisem $f(x) = \operatorname{arctg} x$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x^2+1}\,, \\ f''(x) &= \frac{0(x^2+1) - 1\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}\,, \\ f'''(x) &= \frac{-2(x^2+1)^2 + 2x\cdot 2(x^2+1)2x}{(x^2+1)^4} = \frac{(x^2+1)[-2(x^2+1) + 2x\cdot 2\cdot 2x]}{(x^2+1)^4} = \\ &= \frac{-2x^2 - 2 + 8x^2}{(x^2+1)^3} = \frac{6x^2-2}{(x^2+1)^3}\,. \end{aligned}$$

[1] **Colin Maclaurin** (1698–1746) (čti meklórin) — skotský matematik, zabýval se analýzou a geometrií.

Po dosazení $x_0 = 1$ dostaneme

$$\begin{aligned} f(1) &= \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}\,, \\ f'(1) &= \frac{1}{1^2+1} = \frac{1}{2}\,, \\ f''(1) &= \frac{-2\cdot 1}{(1^2+1)^2} = -\frac{1}{2}\,. \end{aligned}$$

Pak

$$\begin{aligned} \operatorname{arctg} x &= \frac{\pi}{4} + \frac{\frac{1}{2}}{1}(x-1) - \frac{\frac{1}{2}}{2}(x-1)^2 + \frac{f'''(\xi)}{3!}(x-1)^3 = \\ &= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{4}(x-1)^2 + \frac{6\xi^2-2}{6(\xi^2+1)^3}(x-1)^3, \end{aligned}$$

kde ξ leží mezi číslem 1 a x. ▲

Pro zájemce:

Ukážeme si, jak je možné odhadnout velikost zbytku v Taylorově vzorci.

Příklad 11.18. Určete maximální chybu, které se dopustíme, nahradíme-li na intervalu $(0{,}9;\ 1{,}1)$ funkci $f(x) = \operatorname{arctg} x$ Taylorovým polynomem 2. stupně v bodě $x_0 = 1$.

Řešení. Obecně jsme chybu určili v předchozím příkladě:

$$R_2(x) = \frac{6\xi^2-2}{6(\xi^2+1)^3}(x-1)^3, \quad \text{kde } 0{,}9 < \xi < 1{,}1.$$

Abychom zlomek zvětšili, musíme zvětšit čitatel a zmenšit jmenovatel.

Čitatel: $|6\xi^2 - 2|$
Využijeme pravidla pro počítání s nerovnostmi a fakt, že $\xi < 1{,}1$.
$|6\xi^2 - 2| \leqq 6|\xi|^2 + 2 < 6\cdot 1{,}1^2 + 2 = 9{,}26$.

Jmenovatel: $|6(\xi^2+1)^3| = 6(\xi^2+1)^3$.
Protože $\xi^2 \geqq 0$, je $\xi^2 + 1 \geqq 1$, a tedy i $6(\xi^2+1)^3 \geqq 6\cdot 1^3 = 6$.

Celkem dostaneme

$$\begin{aligned} |R_2(x)| &= \frac{|6\xi^2-2|}{6(\xi^2+1)^3}|x-1|^3 \leqq \frac{9{,}26}{6}|x-1|^3 \leqq \\ &\leqq 1{,}55|x-1|^3 \leqq 1{,}55\cdot 0{,}1^3 = 0{,}001\,55 < 0{,}001\,6. \end{aligned}$$

Jestliže tedy v intervalu $(0{,}9;\ 1{,}1)$ nahradíme funkci $f(x) = \operatorname{arctg} x$ Taylorovým polynomem druhého stupně

$$T_2(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{4}(x-1)^2,$$

tj. zanedbáme zbytek $R_2(x)$, pak je chyba, které se dopustíme, menší než 0,001 6. ▲

Poznámka 11.19.
Z předchozího příkladu je vidět, že zatímco napsání Taylorova polynomu je úloha poměrně snadná (stačí znát vzorec a umět derivovat), je odhad zbytku poměrně obtížná úloha, která často vyžaduje umět odhadnout velikost některých funkčních hodnot, k čemuž jsou třeba znalosti počítání s nerovnostmi.

Příklad 11.20. Najděte Maclaurinův vzorec pro $n = 1$ funkce f dané předpisem $f(x) = \sqrt{1+x^2}$.

Řešení. Obecný tvar hledaného vzorce je

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}\,x + \frac{f''(\xi)}{2!}\,x^2.$$

Vypočítáme derivace:

$$f'(x) = \left[(1+x^2)^{\frac{1}{2}}\right]' = \frac{1}{2}\,(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,,$$
$$f''(x) = \frac{1\sqrt{x^2+1} - x\,\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}\,.$$

Dosadíme bod $x_0 = 0$ a dostaneme

$$f(0) = \sqrt{1+0^2} = 1,$$
$$f'(0) = \frac{0}{\sqrt{0^2+1}} = 0.$$

Tedy

$$\sqrt{1+x^2} = 1 + \frac{0}{1}\,x + \frac{f''(\xi)}{2!}\,x^2 = 1 + \frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{(\xi^2+1)^3}}\,x^2\,,$$

kde ξ je číslo mezi 0 a x. ▲

Příklad 11.21. Najděte Taylorův vzorec pro $n = 3$, $x_0 = -2$ funkce dané předpisem $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + x - 5$.

Řešení. Obecný tvar bude

$$f(x) = f(-2) + \frac{f'(-2)}{1!}\,(x+2) + \frac{f''(-2)}{2!}\,(x+2)^2 + \frac{f'''(-2)}{3!}\,(x+2)^3 + R_3(x),$$

kde

$$R_3(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\,(x+2)^4.$$

Postupně dostáváme

$$\begin{aligned}
f(x) &= 2x^3 - 3x^2 + x - 5 &&\implies & f(-2) &= 2(-2)^3 - 3(-2)^2 - 2 - 5 = -35,\\
f'(x) &= 6x^2 - 6x + 1 &&\implies & f'(-2) &= 6(-2)^2 - 6(-2) + 1 = 37,\\
f''(x) &= 12x - 6 &&\implies & f''(-2) &= 12(-2) - 6 = -30,\\
f'''(x) &= 12 &&\implies & f'''(-2) &= 12,\\
f^{(4)}(x) &= 0 &&\implies & f^{(4)}(\xi) &= 0.
\end{aligned}$$

Dostáváme tedy, že pro libovolnou hodnotu čísla ξ je zbytek nulový:

$$R_3(x) = \frac{0}{4!}\,(x+2)^4 = 0.$$

Platí tedy přesně

$$f(x) = -35 + 37(x+2) - 15(x+2)^2 + 2(x+2)^3. \qquad \blacktriangle$$

Poznámka 11.22.
Situace, která nastala v předchozím příkladě, tj. že zbytek je nulový a že platí přesně rovnost $f(x) = T_n(x)$, vznikne vždy, když funkce f bude polynom stupně $m = n$. Pak je totiž $f^{(n+1)}$ nulová funkce a tedy $R_n(x) = 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}$.

Podíváme-li se na výsledek předchozího příkladu, lze říci, že jsme vlastně přepsali polynom f na tvar, ve kterém se vyskytují pouze mocniny výrazu $x+2$ (zatímco v zadání jsou mocniny x). Často se tato úloha formuluje takto: *Rozviňte daný polynom f vzhledem k mocninám $x - x_0$.* Úlohu řešíme tak, že najdeme Taylorův polynom T_n, kde $n = \operatorname{st} f$, se středem v bodě x_0.

Pro zájemce:

Předchozí příklad je možno řešit i algebraicky. Nejprve přeformulujme zadání:

Příklad 11.23. Uvažujme vektorový prostor P_3 polynomů stupně maximálně 3 s bází $E = (x^3, x^2, x, 1)$. Určete souřadnice polynomu $p(x) = 2x^3 - 3x^2 + x - 5$ vzhledem k bázi $F = \big((x+2)^3, (x+2)^2, (x+2), 1\big)$.

Řešení. Známe souřadnice polynomu $p(x)$ v bázi E: $[p]_E = (2, -3, 1, -5)$.

Chceme určit souřadnice polynomu $p(x)$ v bázi F: $[p]_F = (t_1, t_2, t_3, t_4)$. Platí

$$p(x) = t_1(x+2)^3 + t_2(x+2)^2 + t_3(x+2) + t_4 \cdot 1.$$

Po dosazení polynomu $p(x)$ a úpravě dostáváme

$$2x^3 - 3x^2 + x - 5 = t_1(x^3 + 6x^2 + 12x + 8) + t_2(x^2 + 4x + 4) + t_3(x+2) + t_4.$$

Víme, že dva polynomy se rovnají, rovnají-li se koeficienty u stejných mocnin x. Porovnáním koeficientů u stejných mocnin x dostaneme soustavu lineárních rovnic pro neznámé t_1, t_2, t_3, t_4:

$$\begin{aligned} 2 &= t_1, \\ -3 &= 6t_1 + t_2, \\ 1 &= 12t_1 + 4t_2 + t_3, \\ -5 &= 8t_1 + 4t_2 + 2t_3 + t_4. \end{aligned}$$

Jejím vyřešením dostaneme $t_1 = 2$, $t_2 = -15$, $t_3 = 37$, $t_4 = -35$. Polynom $p(x)$ má tedy v bázi F souřadnice $[p]_F = (2, -15, 37, -35)$, tj. platí:

$$p(x) = 2(x+2)^3 - 15(x+2)^2 + 37(x+2) - 35. \qquad \blacktriangle$$

Příklad 11.24. Rozviňte polynom $f\colon\ y = 2x^4 - 3x^3 + x^2 - x + 5$ vzhledem k mocninám $x - 2$.

Řešení. Řešíme analogicky jako předchozí příklad. Nejprve ovšem zvolme $x_0 = 2$. Dále určíme

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^4 - 3x^3 + x^2 - x + 5 & &\Longrightarrow & f(2) &= 15, \\ f'(x) &= 8x^3 - 9x^2 + 2x - 1 & &\Longrightarrow & f'(2) &= 31, \\ f''(x) &= 24x^2 - 18x + 2 & &\Longrightarrow & f''(2) &= 62, \\ f'''(x) &= 48x - 18 & &\Longrightarrow & f'''(2) &= 78, \\ f^{(4)}(x) &= 48 & &\Longrightarrow & f^{(4)}(2) &= 48, \\ f^{(5)}(x) &= 0. \end{aligned}$$

Vytvoříme Taylorův polynom 4. stupně funkce f v bodě x_0:

$$\begin{aligned} T_4(x) = {} & f(2) + f'(2)(x-2) + \frac{1}{2} f''(2)(x-2)^2 + \frac{1}{3!} f'''(2)(x-2)^3 + \\ & + \frac{1}{4!} f^{(4)}(2)(x-2)^4 = \\ = {} & 15 + 31(x-2) + 31(x-2)^2 + 13(x-2)^3 + 2(x-2)^4. \end{aligned}$$

Protože je $f^{(5)}(x) = 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}$, z Taylorovy věty dostáváme, že $f(x) = T_4(x)$ pro každé $x \in \mathbb{R}$.

Funkci f tedy lze zapsat ve tvaru

$$f(x) = 2(x-2)^4 + 13(x-2)^3 + 31(x-2)^2 + 31(x-2) + 15. \qquad \blacktriangle$$

Nyní si uvedeme Maclaurinovy vzorce některých elementárních funkcí, se kterými se velmi často setkáváme. Najdeme tvar pro obecné n.

Příklad 11.25. Najděte Maclaurinovy vzorce následujících funkcí pro obecné n:
a) $f: y = \mathrm{e}^x$, b) $f: y = \sin x$, c) $f: y = \cos x$, d) $f: y = \ln(1+x)$, $x > -1$.

Řešení.

a) $f: y = \mathrm{e}^x$, $x \in \mathbb{R}$.
Pro derivace platí

$$f'(x) = \mathrm{e}^x,\ f''(x) = \mathrm{e}^x, \dots, f^{(n)}(x) = \mathrm{e}^x,\ f^{(n+1)}(x) = \mathrm{e}^x.$$

Dosadíme $x_0 = 0$. Vyjde

$$f(0) = \mathrm{e}^0 = 1,\ f'(0) = \mathrm{e}^0 = 1,\ f''(0) = \mathrm{e}^0 = 1, \dots, f^{(n)}(0) = \mathrm{e}^0 = 1.$$

Dále platí

$$f^{(n+1)}(\xi) = \mathrm{e}^\xi.$$

Tedy

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x), \tag{11.8}$$

kde

$$R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\,\mathrm{e}^\xi,\ \text{přičemž } \xi \text{ leží mezi body } 0 \text{ a } x. \tag{11.9}$$

b) $f: y = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$. Je výhodné najít polynom sudého stupně $2n$.

Postupně dostáváme

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sin x & &\Longrightarrow & f(0) &= \sin 0 = 0,\\
f'(x) &= \cos x & &\Longrightarrow & f'(0) &= \cos 0 = 1,\\
f''(x) &= -\sin x & &\Longrightarrow & f''(0) &= -\sin 0 = 0,\\
f'''(x) &= -\cos x & &\Longrightarrow & f'''(0) &= -\cos 0 = -1,\\
f^{(4)}(x) &= \sin x & &\Longrightarrow & f^{(4)}(0) &= \sin 0 = 0,\\
f^{(5)}(x) &= \cos x & &\Longrightarrow & f^{(5)}(0) &= \cos 0 = 1,\\
f^{(6)}(x) &= -\sin x & &\Longrightarrow & f^{(6)}(0) &= -\sin 0 = 0,\\
f^{(7)}(x) &= -\cos x & &\Longrightarrow & f^{(7)}(0) &= -\cos 0 = -1 \ \text{atd.}
\end{aligned}$$

Tedy

$$\sin x = 0 + \frac{1}{1!}x + \frac{0}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{0}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \frac{0}{6!}x^6 - \frac{1}{7!}x^7 + \dots + R_{2n}(x) =$$

$$= \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + R_{2n}(x),$$

kde

$$R_{2n}(x) = (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cos\xi, \text{ přičemž } \xi \text{ leží mezi body 0 a } x.$$

Všimněte si, že vzorec obsahuje jen liché mocniny x.

c) $f: y = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$. Je výhodné najít polynom lichého stupně $2n+1$.

Obdobně jako pro sinus dostaneme

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + R_{2n+1}(x), \tag{11.10}$$

kde

$$R_{2n+1}(x) = (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \cos\xi, \text{ přičemž } \xi \text{ leží mezi body 0 a } x.$$

Všimněte si, že vzorec obsahuje jen sudé mocniny x.

d) $f: y = \ln(1+x)$, $x > -1$.

Postupně dostáváme

$$\begin{aligned}
f(x) &= \ln(1+x) & &\Longrightarrow & f(0) &= \ln 1 = 0,\\
f'(x) &= \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} & &\Longrightarrow & f'(0) &= \frac{1}{1+0} = 1,\\
f''(x) &= -(1+x)^{-2} = \frac{-1}{(1+x)^2} & &\Longrightarrow & f''(0) &= \frac{-1}{(1+0)^2} = -1,\\
f'''(x) &= 2(1+x)^{-3} = \frac{2}{(1+x)^3} & &\Longrightarrow & f'''(0) &= \frac{2}{(1+0)^3} = 2,\\
&\vdots\\
f^{(n)}(x) &= (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(1+x)^n} & &\Longrightarrow & f^{(n)}(0) &= (-1)^{n-1}(n-1)!\,,\\
f^{(n+1)}(x) &= (-1)^n \frac{n!}{(1+x)^{n+1}}.
\end{aligned}$$

Po dosazení a vykrácení faktoriálů vyjde

$$\ln(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + R_n(x),$$

kde

$$R_n(x) = (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{1}{(1+\xi)^{n+1}}, \text{ přičemž } \xi \text{ leží mezi body 0 a } x.$$

▲

Doposud jsme si ukazovali, jak lze při daném n odhadnout $R_n(x)$. Častá je však i opačná úloha — určit n tak, aby zbytek $R_n(x)$ byl menší než předem dané číslo (tj. je třeba určit, kolik členů se musí sečíst, aby chyba byla menší než zadané číslo).

Příklad 11.26. Užitím Maclaurinova vzorce vypočtěte hodnotu čísla e s chybou menší než 0,001.

Řešení. Využijeme Maclaurinova vzorce (11.8) pro e^x a dosadíme $x = 1$. Vyjde

$$e^1 = e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + R_n(1).$$

Přitom podle (11.9) je

$$R_n(1) = \frac{e^\xi}{(n+1)!}, \text{ přičemž } \xi \text{ leží mezi body 0 a 1.}$$

Ptáme se, kolik členů máme sečíst, aby byla chyba menší než 0,001, tj. $|R_n(1)| < 0{,}001$, neboli

$$\frac{e^\xi}{(n+1)!} < 0{,}001, \quad \text{kde } \xi \in (0, 1).$$

Potřebujeme shora odhadnout e^ξ. Vzhledem k tomu, že exponenciální funkce je rostoucí, $\xi < 1$ a $e < 3$, dostaneme:

$$e^\xi < e^1 < 3.$$

Tudíž

$$R_n(1) = \frac{e^\xi}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}.$$

Hledáme tedy první přirozené číslo n, pro něž bude

$$\frac{3}{(n+1)!} < 0{,}001.$$

Postupně dostáváme

$$\begin{aligned}
n = 1 \quad &\Longrightarrow \quad \frac{3}{2!} = \frac{3}{2} > 0{,}001\,, \\
&\vdots \\
n = 5 \quad &\Longrightarrow \quad \frac{3}{6!} = \frac{3}{720} = \frac{1}{240} > 0{,}001, \\
n = 6 \quad &\Longrightarrow \quad \frac{3}{7!} = \frac{3}{5040} = \frac{1}{1680} < 0{,}001.
\end{aligned}$$

Pro $n = 6$ vyjde hodnota čísla e:

$$e \doteq 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} \doteq 2{,}718\,055\,559$$

s chybou menší než 0,001.

Pro porovnání: hodnota čísla e vypočtená na základě definice 5.23 zaokrouhlená na osm desetinných míst je $e \doteq 2{,}718\,281\,82\ldots$. Chyba vyjádření čísla e pomocí Maclaurinova polynomu 6. stupně je tedy menší než 0,000 226 226. ▲

Příklad 11.27. Užitím Taylorovy věty určete, pro která $x \in \mathbb{R}$ platí přibližný vzorec: $\cos x \doteq 1 - \dfrac{x^2}{2}$ s přesností 10^{-3}.

Řešení. Označme $f(x) = \cos x$. Maclaurinův polynom 3. stupně funkce f je roven výrazu na pravé straně zadané rovnosti. Tedy chyba, která vzniká při nahrazení funkce kosinus tímto polynomem, je podle (11.10):

$$R_3(x) = \frac{f^{(4)}(\xi) \cdot x^4}{4!} = \frac{\cos\xi \cdot x^4}{24},$$

kde ξ leží mezi body 0 a x.

V zadání se požaduje, aby vztah platil s přesností 0,001, tedy aby absolutní hodnota chyby $R_3(x)$ byla menší nebo rovna 0,001: $|R_3(x)| \leqq 0{,}001$:

$$|R_3(x)| = \left|\frac{\cos\xi \cdot x^4}{24}\right| \leqq \frac{|\cos\xi| \cdot |x^4|}{24} \leqq \frac{|x^4|}{24}.$$

Využili jsme toho, že $|\cos\xi| \leqq 1$. Hledáme tedy takové $x \in \mathbb{R}$, pro něž platí

$$\frac{|x^4|}{24} \leqq 0{,}001.$$

Z toho okamžitě plyne $|x^4| \leqq 0{,}024$, tj. $x \in \left\langle -\sqrt[4]{0{,}024};\ \sqrt[4]{0{,}024} \right\rangle = \langle -0{,}39;\ 0{,}39\rangle$.

Pokud dosadíme x z tohoto intervalu (např. $0{,}16$) a vypočteme hodnotu kosinu pomocí uvedeného vztahu, bude se od skutečné hodnoty $\cos 0{,}16$ lišit až na čtvrtém desetinném místě (anebo dále). Zkuste si tento výpočet provést na svých kalkulačkách (pozor! hodnota $0{,}16$ není ve stupních, ale v radiánech). ▲

V předchozích příkladech jsme několikrát naznačili, že v malém okolí středu se se zvyšujícím se stupněm Taylorova polynomu chyba aproximace, tj. velikost zbytku v Taylorově vzorci, zmenšuje. To sice platí v „rozumných“ případech, ale obecně tomu tak bohužel není, jak ukazuje následující příklad.

Příklad 11.28. Najděte Maclaurinův polynom stupně $n = 2$ funkce

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{pro } x \neq 0, \\ 0 & \text{pro } x = 0. \end{cases}$$

Řešení. Spočítejme první derivaci v bodě 0:

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0+} \frac{e^{-1/x^2} - 0}{x} = \lim_{y\to +\infty} e^{-y^2} y = \lim_{y\to+\infty} \frac{y}{e^{y^2}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{LP}{=} \lim_{y\to+\infty} \frac{1}{2y e^{y^2}} = 0.$$

Při výpočtu jsme použili větu o limitě složené funkce ($y = \frac{1}{x}$) a l'Hospitalovo pravidlo. Obdobně dostaneme $f'_-(0) = 0$, dohromady $f'(0) = 0$.

Druhou derivaci v bodě 0 musíme počítat stejně jako první derivaci přímo z definice. Dostáváme

$$f''(0) = \lim_{x\to 0} \frac{\left(e^{-1/x^2}\right)' - 0}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{-1/x^2}\cdot 2}{x^4} =$$
$$= \lim_{y\to+\infty} 2e^{-y}y^2 = \lim_{y\to+\infty} \frac{4y}{e^y} = \lim_{y\to+\infty} 4e^{-y} = 0,$$

přičemž jsme ve výpočtu použili větu o limitě složené funkce ($y = \frac{1}{x^2}$) a dvakrát l'Hospitalovo pravidlo.

Proto Maclaurinův polynom druhého stupně funkce f je

$$T_2(x) = 0 + 0\cdot x + 0\cdot x^2 = 0,$$

tj. tento polynom je nulový.

Není těžké indukcí ukázat, že daná funkce má nulový Taylorův polynom stupně n pro všechna $n \in \mathbb{N}$ — viz [7, str. 160].

Tedy tento příklad ilustruje situaci, kdy se zvyšujícím se stupněm Taylorova polynomu se velikost zbytku nezmenšuje. ▲

Σ Pojmy k zapamatování

— diferenciál funkce f v bodě x_0,

— diferencovatelnost,

— diferenciál n-tého řádu funkce f v bodě x_0,

— Taylorův polynom n-tého stupně funkce f v bodě x_0,

— Taylorův vzorec funkce f v bodě x_0,

— Maclaurinův polynom funkce f v bodě x_0.

? Kontrolní otázky

1. Kdy je funkce diferencovatelná v bodě x_0?
2. Jaký je geometrický význam diferenciálu funkce v bodě x_0?
3. Jakým způsobem lze využít diferenciálu funkce k výpočtu přibližné funkční hodnoty?
4. Jakým způsobem lze využít diferenciálu funkce při odhadu absolutní a relativní změny?
5. Vysvětlete použití Taylorova polynomu.
6. Zformulujte Taylorovu větu a popište Lagrangeův tvar zbytku.
7. Kdy mluvíme o Maclaurinově vzorci funkce f?
8. Uveďte Maclaurinovy vzorce funkcí e^x, $\sin x$, $\cos x$.

Příklady k procvičení

!

1. Vypočtěte diferenciál funkce v obecném bodě $x_0 \in D(f)$:

   a) $f: y = \dfrac{x^2}{x^2-1}$, b) $f: y = \sin^3 x$, c) $f: y = \arcsin \dfrac{1}{x}$.

2. Najděte přírůstek funkce f a její diferenciál v bodě x_0 pro dané h, je-li:

   a) $f: y = 3x^2,\ x_0 = 1,\ h = 0{,}1$, b) $f: y = x^3 - 4x^2 - 10x - 12,\ x_0 = 0,\ h = 0{,}2$.

3. Vypočtěte diferenciál funkce f v bodě x_0 pro daný přírůstek h.

   a) $f: y = 4x^2 + \sqrt[3]{x},\ x_0 = 1,\ h = 0{,}2$, b) $f: y = \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}},\ x_0 = 0,\ h = -0{,}2$,

   c) $f: y = \ln\bigl(x + \sqrt{1+x^2}\bigr),\ x_0 = 0,\ h = 0{,}01$,

   d) $f: y = \sin^4 x,\ x_0 = \dfrac{\pi}{4},\ h = 0{,}1$.

4. Užitím diferenciálu určete přibližnou hodnotu výrazu:

   a) $\sqrt[4]{267}$, b) $1{,}04^5$, c) $\operatorname{arctg} 1{,}1$.

5. Odhadněte pomocí diferenciálu absolutní a relativní změnu funkční hodnoty funkce f, jestliže

   a) $f: y = x^2 + 1,\ x_0 = 1,\ h = 0{,}2$, b) $f: y = \operatorname{tg} x,\ x_0 = 0,\ h = -0{,}01$.

6. Délka hrany krychle je $x = 5\ \mathrm{m} \pm 0{,}01\ \mathrm{m}$. Odhadněte absolutní a relativní změnu objemu krychle.

7. S jakou přesností je třeba změřit poloměr koule, aby při výpočtu objemu koule relativní změna nepřesahovala 1%?

8. Rozviňte podle mocnin $x - a$ polynom.

   a) $f: y = x^3 - 2x + 5,\ a = 1$, b) $f: y = x^4 - 3x^2 - 10x + 11,\ a = 2$.

9. Napište Taylorův polynom třetího stupně funkce:

   a) $f: y = \ln x$ v okolí bodu $x_0 = 1$, b) $f: y = \cos \dfrac{x}{2}$ v okolí bodu $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$.

10. Napište Maclaurinův polynom třetího stupně funkce:

    a) $f: y = \mathrm{e}^{2x}$, b) $f: y = \dfrac{1+x}{1-x}$.

11. Napište Maclaurinův polynom n-tého stupně, kde $n \in \mathbb{N}$, funkce:

    a) $f: y = \ln(1+x)$, b) $f: y = \dfrac{1}{1-x}$.

12. Pomocí Taylorova vzorce (pro $n = 3$) přibližně vypočtěte:

    a) $\sqrt[3]{30}$, b) $\operatorname{arctg} 0{,}8$.

13. Užitím Maclaurinova vzorce vypočtěte:

    a) Hodnotu čísla e s chybou menší než 10^{-5}, b) $\sqrt{5}$ s chybou menší než 10^{-4}.

Autotest

1. Vypočtěte diferenciál funkce f v bodě x_0 pro dané h. Přitom $f\colon\, y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $x_0 = 1$, $h = 0{,}3$.
2. Užitím diferenciálu určete přibližnou hodnotu výrazů:

   a) $\ln 0{,}94$, b) $\sqrt[3]{9}$.
3. Napište Maclaurinův polynom n-tého stupně funkce $f\colon\, y = \mathrm{e}^{x^2}$.
4. Pomocí Maclaurinova polynomu druhého stupně určete přibližnou hodnotu výrazu $\sqrt[5]{1{,}5}$.
5. Užitím Maclaurinova vzorce funkce $f\colon\, y = \ln \dfrac{1+x}{1-x}$ pro obecné n vypočtěte hodnotu $\ln 3$ s chybou menší než 10^{-3}.
6. Rozviňte polynom $f\colon\, y = x^4 - 2x^2 + x - 2$ vzhledem k mocninám $x + 1$.

*****

Málo lidí ví, jak mnoho musí člověk vědět, aby poznal, jak málo ví.

(F. Vymazal)

Svět hledá lidi, kteří dovedou něco udělat, ne lidi, kteří umějí vysvětlovat, proč něco neudělali.

(H. Rowlandová)

*****

Klíč k příkladům k procvičení

Kapitola 1

1. a) $24a^2b^3$, b) 2, c) $2\sqrt{2}$, d) $\frac{\pi}{4}$.
2. $\frac{-2}{a^2-a+1}$, $a \neq 0$, $a \neq -b$, $a \neq -1$, $a \neq 1$.
3. $K = \{\}$.
4. $K = \{9\}$,
5. $K = (2, 3) \cup (5, 7)$.
6. $K = \langle -4, \frac{2}{3} \rangle$.
7. $K = \{1\}$.
8. $K = (3, \infty)$.
9. $K = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{\frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\}$.
10. 28 minut.

Kapitola 2

1. $M = \{8, 16, 24, 32, 40, 48\}$,

2.

a)	$\min A$ neexistuje,	$\max A = 9$,	$\inf A = 0$,	$\sup A = 9$,
b)	$\min B$ neexistuje,	$\max B$ neexistuje,	$\inf B = -\infty$,	$\sup B = +\infty$,
c)	$\min C = 1$,	$\max C$ neexistuje,	$\inf C = 1$,	$\sup C = +\infty$,
d)	$\min D$ neexistuje,	$\max D$ neexistuje,	$\inf D = -\infty$,	$\sup D = +\infty$,
e)	$\min E$ neexistuje,	$\max E$ neexistuje,	$\inf E = -\infty$,	$\sup E = +\infty$,
f)	$\min F$ neexistuje,	$\max F$ neexistuje,	$\inf F = -\infty$,	$\sup F = +\infty$.

3. $A \times B = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3)\}$,
   $B \times A = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2)\}$.

5. Předpokládáme-li, že $x = y$, pak nelze dělit výrazem $x^2 - xy$, neboť je roven nule.

Kapitola 3

1. a) neklesající, b) sudá, c) neklesající, lichá, d) sudá.

2. a) sudá, b) sudá, c) lichá, d) ani sudá ani lichá,
   e) sudá, f) lichá, g) lichá, h) ani sudá ani lichá.

3. Ano

7. a) souměrné podle osy y, b) souměrný podle počátku,
   c) $H(f) = \langle 0, \infty)$, d) souměrné podle počátku,
   e) klesající, f) je vždy prostá,
   g) lichá.

8. a) ne, b) ne, c) ano, d) ano, e) ne,
   f) ano, g) ano, h) ne, i) ne, j) ne.

9. a) všechny liché funkce, b) všechny sudé funkce, c) všechny funkce.

10. Na druhý břeh se převezou oba chlapci, jeden z nich se s loďkou vrátí. Převeze se jeden z přátel a druhý syn vesluje zpět. Znovu se přeplaví oba chlapci a znovu se jeden z nich vrátí. Pak se převeze druhý přítel a druhý syn se vrátí s loďkou. Nakonec se na druhý břeh přeplaví oba chlapci.

Kapitola 4 – oddíl 4.1

1. a) 2, b) 2, c) -1, d) 0, e) -2.

2. a) 32, b) 1, c) $\sqrt[3]{2}$, d) $1/125$, e) $1/9$, f) $1/\sqrt[4]{3}$.

3. a) 25, b) 2, c) 10, d) $z > 0$, e) $1/100$.

4. a) $D(f) = (-\infty, 2)$, b) $D(f) = (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$,
   c) $D(f) = (-\infty, -1\rangle \cup \langle 1, +\infty)$, d) $D(f) = (0, +\infty)$,
   e) $D(f) = (-1/2, 1)$, f) $D(f) = (-\infty, 1) \cup (4, \infty)$,
   g) $D(f) = (0, +\infty)$, h) $D(f) = (-3, 1)$,
   i) $D(f) = (-1, 1)$, j) $D(f) = (-2, \infty)$,
   k) $D(f) = (-\infty, -2) \cup (3, \infty)$.

5. a) lichá, b) lichá.

6. a) $f^{-1}\colon y = 2 - \mathrm{e}^x,\ D(f^{-1}) = \mathbb{R}$,
   b) $f^{-1}\colon y = \ln \sqrt{x^2 - 2x - 2},\ D(f^{-1}) = (1 + \sqrt{3}, +\infty)$,
   c) $f^{-1}\colon y = \ln \frac{4x-4}{x+1},\ D(f^{-1}) = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$,
   d) $f^{-1}\colon y = \frac{5-\mathrm{e}^x}{2},\ D(f^{-1}) = \mathbb{R}$,

e) $f^{-1}\colon y = \ln(3 - x^2),\ D(f^{-1}) = \langle 0, \sqrt{3}),$

f) $f^{-1}\colon y = \ln \frac{2}{x-1},\ D(f^{-1}) = (1, +\infty).$

Kapitola 4 – oddíl 4.2

1. a) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, b) $\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$, c) $\langle 1, +\infty)$,
d) $(-\infty, 1\rangle \cup \langle 2, +\infty)$, e) $(-\infty, -1\rangle \cup (1, +\infty)$, f) $\langle -3, -1) \cup (-1, +\infty)$,
g) $\langle -4, 2\rangle \cup \langle 3, +\infty)$, h) $\mathbb{R}$.

2. a) $s = 2 : D(f) = (-\infty, +\infty)$, b) $s = -1 : D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$,
c) $s = \frac{1}{2} : D(f) = \langle 0, +\infty)$, d) $s = -\frac{1}{2} : D(f) = (0, +\infty)$.

3. a) lichá, rostoucí, b) sudá, ohraničená zdola, c) lichá, prostá,
d) lichá, klesající, e) sudá, ohraničená shora, f) lichá, prostá.

4. a) nemá smysl, b) $-\frac{1}{3}$, c) nemá smysl, d) $\frac{1}{2\sqrt[4]{2}}$.

5. a) $f^{-1}\colon\ y = \sqrt{x-1},\ x \in \langle 1, \infty)$, b) $f^{-1}\colon\ y = -\sqrt{1-x^2},\ x \in \langle 0, 1\rangle$,
c) $f^{-1}\colon\ y = \frac{1}{x-1},\ x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, d) $f^{-1}\colon\ y = \frac{3-x}{5},\ x \in \langle -22, 28\rangle$.

Kapitola 4 – oddíl 4.3

1. a) $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$, b) $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$,
c) $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\frac{\pi}{4},\ k \in \mathbb{Z}\}$, d) $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$,
e) $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\}$, f) $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{(4k+1)\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\}$,
g) $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{k\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\}$, h) $D(f) = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \langle -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\rangle$,
i) $D(f) = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} (-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi)$, j) $D(f) = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \langle \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \frac{13\pi}{6} + 2k\pi\rangle$
k) $D(f) = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} (\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{3}{4}\pi + k\pi\rangle$, l) $D(f) = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \langle \frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{3}{4}\pi + k\pi\rangle$.

2. a) $D(f) = \langle 1/3, 1\rangle$, b) $D(f) = \langle -3/2, 5/2\rangle$, c) $D(f) = (-\infty, 0\rangle \cup \langle 1, +\infty)$,
d) $D(f) = \langle -1, 3\rangle$, e) $D(f) = (1, 2\rangle$, f) $D(f) = \langle -1, \infty)$,
g) $D(f) = (3/2, 11\rangle$, h) $D(f) = \langle -1/3, 1\rangle$, i) $D(f) = \langle -1, 1\rangle$,
j) $D(f) = \langle \sqrt[3]{\frac{1}{e}}, \sqrt[3]{e}\rangle$.

3. a) π, b) 4π, c) π, d) π,
e) 4π, f) π, g) $\frac{2}{3}\pi$, h) 4π.

4. a) $\frac{\pi}{6}$, b) $-\frac{\pi}{2}$, c) $\frac{\pi}{3}$, d) $-\frac{\pi}{4}$, e) $\frac{\pi}{2}$, f) π,
g) $\frac{\pi}{4}$, h) $\frac{2}{3}\pi$, i) $\frac{\pi}{3}$, j) $-\frac{\pi}{4}$, k) 0, l) $\frac{2}{3}\pi$.

5. a) $x \in \langle 0, \pi \rangle$, b) $x \in \langle -1, 1 \rangle$, c) $x \in (0, \pi)$, d) $x \in (-\infty, \infty)$.

6. a) $f^{-1}\colon y = \frac{1}{3}\big(1 - \arccos \frac{x}{2}\big),\ D(f^{-1}) = \langle -2, 2 \rangle$
   b) $f^{-1}\colon y = \frac{1}{5}\big(2 + \operatorname{arctg}(x-2)\big),\ D(f^{-1}) = (-\infty, +\infty)$
   c) $f^{-1}\colon y = \frac{1}{2}\big(1 + \cos \frac{x-3}{4}\big),\ D(f^{-1}) = \langle 3, 3 + 4\pi \rangle$
   d) $f^{-1}\colon y = 2 + \operatorname{cotg}(2-x),\ D(f^{-1}) = (2 - \pi, 2)$
   e) $f^{-1}\colon y = \frac{1}{3}(1 + \arcsin x),\ D(f^{-1}) = \langle -1, 1 \rangle$
   f) $f^{-1}\colon y = \frac{1}{3}\big(4 + \operatorname{tg}(x-1)\big),\ D(f^{-1}) = (1 - \frac{\pi}{2}, 1 + \frac{\pi}{2})$
   g) $f^{-1}\colon y = \frac{1}{2}\big(-1 + \arccos(2-x)\big),\ D(f^{-1}) = \langle 1, 3 \rangle$.

7. a) $f\colon y = \sqrt{1 - x^2}$, b) $f\colon y = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

Kapitola 4 – oddíl 4.5

1. a) $x_{1,2,3} = 1$, b) $x_{1,2} = 2, x_3 = -3$,
   c) $x_{1,2} = 0, x_{3,4} = 1, x_5 = 3/2$, d) $x_1 = 2, x_{2,3,4} = -2$,
   e) $x_1 = 2, x_{2,3,4} = 1, x_5 = -2$, f) $x_1 = 1 + i, x_2 = 1 - i, x_{3,4} = -3, x_5 = 2$,
   g) $x_{1,2} = 1, x_3 = -3, x_4 = 5$, h) $x_{1,2} = \pm i, x_3 = -1, x_{4,5} = 2$.

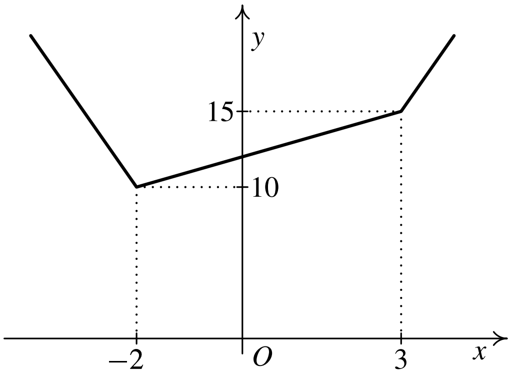
2. a) $f\colon y = -\frac{1}{12}(x-2)(x^2-1)$,
   b) $f\colon y = \frac{1}{6}(x-1)(x-2)(x^2+1)$,
   c) $f\colon y = -\frac{3}{2}(x-2)^2(x-3)(x^2-2x+2)$,
   d) $f\colon y = \frac{1}{50}(x^2-2x+2)(x^2-4x+5)$,
   e) $f\colon y = \frac{1}{8}(x+1)(x-2)^2$,
   f) $f\colon y = -\frac{1}{5}(x^2+1)(x-1)$,
   g) $f\colon y = \frac{1}{30}(x^2-2x+2)(x-1)(x-2)$.

3. a) $-4 + \dfrac{23 - 2x}{x^2 - 3x + 6}$, b) $2x + 2 + \dfrac{4x + 5}{x^2 - 2x}$,
   c) $3x^2 + 3 + \dfrac{-6x^2 + 5x - 8}{x^3 - x + 1}$.

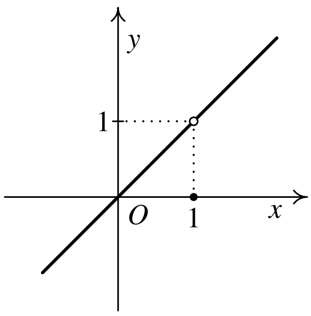
4. a) $(x+1)(x^2-x+1)$, b) $(x-2)(x+2)(x^2+4)$,
   c) $(x-3)(x+1)(x-1)$, d) $5(x+1)(x-5)(x-1/5)$,
   e) $(x-1)(x^2+x+1)$, f) $(x-2)(x+2)(x^2+3)$,
   g) $(x-1)(5x^2+2x+5)$, h) $(x+1)(x-2)(x^2+x+1)$,
   i) $(x-1)(x+3)(x-4)(x^2+x+3)$.

Autotest ke kapitole 4

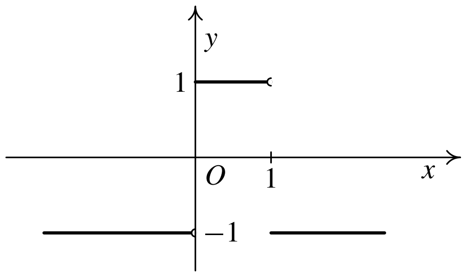
1.



2. a) sudá, b) ani sudá ani lichá, c) sudá.
3. a) $\langle -2, 2/3 \rangle$, b) $(-\infty, -2\rangle \cup (3, +\infty)$, c) $(0, 1\rangle \cup \langle 4, +\infty)$.
4. a) 0, b) $1/2$, c) $\pi/4$, d) $\pi/4$.
5. Musí.
6. Není monotónní.
7. b), c).
8. Může ale nemusí.
9. $f^{-1}\colon\ y = \dfrac{e^{x-2} + 1}{2}, \quad x \in \mathbb{R}$.
10. $f^{-1}\colon\ y = \dfrac{1}{2} \arccos(x + 3) + \dfrac{5}{4}, \quad x \in \langle -4, -2\rangle$.
11.



a)



b)

12. $x_1 = -2,\ x_{2,3,4} = 1,\ x_5 = 0$.
13. Nejvýše.
14. Nemůže.
15. 6.

Kapitola 5

1. a) $-\infty$, b) $\frac{5}{7}$, c) 0, d) 1.
2. a) 0, b) $-\infty$, c) 0, d) $+\infty$, e) ∞, f) $\frac{-1}{4}$.
3. a) e^6, b) e^3, c) $e^{1/3}$, d) $e^{3/2}$, e) $e^{1/3}$, f) 1.
4. a) 1, b) 1, c) $\sqrt[7]{6}$.
5. a) 0, b) 0, c) 0, d) 9, e) 1, f) 1.
6. a) 0, b) 0, c) 0.
7. a) ∞, b) 0, c) 1, d) 0, e) $1/6$, f) ∞.
8. a) neexistuje, b) 0, c) neexistuje, d) 1, e) 0, f) neexistuje.
9. a) 0, b) $\frac{1}{3}$.
10. a) $-\frac{1}{2}$, b) $\frac{9}{8}$.
11. a) ne, b) ano, c) ne,
    d) ne, e) ne, f) ano.
12. ano, $d = 4$.
13. úloha má dvě řešení: a) $d = 4$, $a_1 = 5$, b) $d = -4$, $a_1 = 13$.
14. úloha má dvě řešení: a) $q = 2$, $a_1 = 2$, b) $q = 1/2$, $a_1 = 16$.
15. počet vložených čísel je 10, diference $d = 3$.
16. 8 s.
17. 1,74 mm.
18. 9 cm, 12 cm, 15 cm.
19. $\frac{1}{512}\,\mathrm{m}^2$.

Autotest ke kapitole 5

1. a) $\sqrt{5}/10$, b) 0, c) $\sqrt{e}$, d) $-\infty$.
2. a) 0, b) 0.
3. např. $a_n = n$.

Kapitola 6

1. a) $-3/5$, b) 1, c) 1, d) 1, e) $1/\pi$, f) $\pi/4$.

2. a) 1, b) $-7/27$, c) $1/2$, d) $-1/\sqrt{2}$, e) $3/2$,
 f) $9/10$, g) $-2/5$, h) $-1/2$, i) $-5/12$.

3. a) 6, b) 4, c) 4,
 d) $-1/12$, e) $1/24$, f) 0.

4. a) 0, b) $3/5$, c) $+\infty$, d) $+\infty$, e) 0, f) $2/5$.

5. a) -1, b) 0, c) -1.

6. a) 0, b) 0, c) 0.

7. a) $7/4$, b) $1/3$, c) 1.

 Nápověda k 7c): využijte úpravu $\frac{\arcsin x}{x} = \frac{\arcsin x}{\sin(\arcsin x)}$.

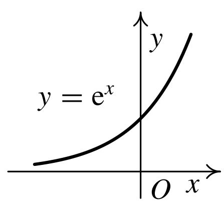
8. a) $-\infty$, b) neexistuje, c) $+\infty$, d) neexistuje,
 e) $-\infty$, f) $+\infty$, g) neexistuje, h) neexistuje.

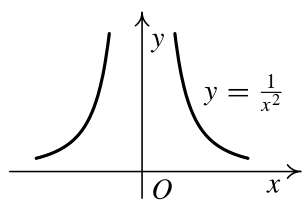
9. a) 2, b) $\pm\infty$, c) ± 1.

10. a) spojitá, b) nespojitá, c) nespojitá, d) nespojitá.

11. a) $x_0 = 0$, b) $x_0 = -1$, c) $x_0 = 0$, d) $x_0 = 0$, e) $x_0 = 0$.

Autotest ke kapitole 6

1. Nemusí být.
2. Je.
3. Existuje vlastní.
4. Nejvýše.
5. Např. $y = \frac{1}{x-1}$.
6. a) Např. 

 b) Např. 

7. a) $-\frac{1}{2}$, b) $-\infty$, c) $\frac{7}{4}$, d) $\frac{7}{2}$.
8. a) neexistuje, b) $-\infty$.

Kapitola 7

1. a) 0, b) $\sqrt{5}/2$.

2. a) $8x^5$, b) $\frac{-1}{x^5}$, c) $\frac{-1}{5\sqrt[5]{x^6}}$,
   d) $\frac{5x^3-4}{3x^3}$, e) $\frac{2}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}} - \frac{5}{9\sqrt[3]{x^4}}$, f) $\frac{-5}{4\sqrt[4]{x^7}}$,
   g) $9x^2 - \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{3}{x^4}$, h) $\frac{2}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{3\sin^2 x}$, i) $6x^2 + 5\cos x$.

3. a) $7, 17, -13$, b) $\frac{-\sqrt{2}+2}{8}, -\frac{1}{2}, 0$.

4. a) $5x^4 - 3x^2 - 10x$, b) $\frac{x(x+\sin 2x)}{\cos^2 x}$, c) $2x\ln x + x + \frac{1}{x}$,
   d) $2x\operatorname{cotg} x - \frac{x^2}{\sin^2 x}$, e) $\frac{\cos x}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x}\,\sin x$, f) $\cos 2x$,
   g) $\frac{2\operatorname{arctg} x}{3\sqrt[3]{x}} + \frac{\sqrt[3]{x^2}}{1+x^2}$, h) $\left(\frac{7}{2}\sqrt{x^5} + \sqrt{x^7}\right)\mathrm{e}^x$, i) $\mathrm{e}^x\big(\cos x + x(\cos x - \sin x)\big)$.

5. a) $\frac{1}{(x+1)^2}$, b) $\frac{1}{1-\sin x}$, c) $\frac{\mathrm{e}^x(\sin x-\cos x)}{\sin^2 x}$,
   d) $\frac{2(1-2x)}{(1-x+x^2)^2}$, e) $\frac{-4\sqrt[3]{x}}{3(x-\sqrt[3]{x})^2}$, f) $\frac{x\ln 10\log x-(1+x^2)\operatorname{arctg} x}{(x+x^3)\ln 10\log^2 x}$,
   g) $\frac{\mathrm{e}^x(1+x-x^2+x^3)}{(1+x^2)^2}$, h) $\frac{x(2x\operatorname{arctg} x+1)\ln x-(x^2+1)\operatorname{arctg} x}{x\ln^2 x}$, i) $\frac{(2\ln x+1)(x^2+x)-x^2\ln x}{(x+1)^2}$.

6. a) $6\mathrm{e}^{3x}$, b) $\frac{3}{x}$, c) $\frac{2x}{x^2-1}$, $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$,
   d) $\frac{1}{\sqrt{4x-x^2}}$, e) $\frac{1}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ f) $\frac{-6x^2}{(x^3-1)^3}$.

7. a) $\operatorname{tg}^3 x$, $D(f) = D(f') = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi)$,
   b) $\frac{2\operatorname{sgn} x}{\sqrt{2-x^2}}$, $D(f) = \left\langle -\sqrt{2}, \sqrt{2} \right\rangle$, $D(f') = \left(-\sqrt{2}, 0\right) \cup \left(0, \sqrt{2}\right)$,
   c) $\frac{2x}{x^2-4} + \frac{1}{\sqrt{4x-x^2}}$, $D(f) = \langle 0, 2)$, $D(f') = (0, 2)$.

8. a) $\frac{-\sin x}{1+\cos x}$, b) $\frac{1}{2x\sqrt{6x-1}}$, c) $\sqrt{\frac{x}{2-x}}$, d) $2x\operatorname{arctg}\frac{x}{2}$,
   e) $\frac{x\mathrm{e}^x}{2\sqrt{1+\mathrm{e}^x}}$, f) $\frac{-\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)\sqrt{1-\mathrm{e}^{2x}}}$, g) $\frac{\sqrt{1+x}}{x}$, h) $\frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}}$.

9. a) $\left(\frac{1}{1-x}\right)^x \left[\frac{x}{1-x} - \ln(1-x)\right]$,
   b) $(x^2+1)^{\operatorname{arctg} x - 1}\left[2x\operatorname{arctg} x + \ln(x^2+1)\right]$,
   c) $x^{\sin x}(\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x})$.

10. a) $2\cos 2x$, b) $\frac{2\cos^2 x+6\sin^2 x}{\cos^4 x}$, c) $\frac{1}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$, d) $\frac{2-2x^2}{(x^2+1)^2}$.

11. a) $4\sin 2x$, b) $-\frac{1}{x^2}$, $x \in (0, \infty)$, c) $(12 + 8x)\mathrm{e}^{2x}$.

12. a) $\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$, $x \in (0, \infty)$, b) $n!$, c) $\frac{(-1)^n k(k+1)\cdot \dots \cdot (k+n-1)}{x^{k+n}}$.

13. a) $t\colon x + 2y - 4 = 0,\ n\colon 2x - y - 3 = 0,$
    b) $t\colon -\sqrt{2}\,x + 2y + \frac{4-\pi}{2} = 0,\ n\colon 2x + \sqrt{2}\,y - \frac{(8+\pi)\sqrt{2}}{4} = 0,$
    c) $t\colon 4x + y - 8 = 0,\ n\colon x - 4y - 2 = 0,$
    d) $t\colon x - \mathrm{e}y = 0,\ n\colon \mathrm{e}x + y - 1 - \mathrm{e}^2 = 0.$

14. $t_1\colon\ y = -16, \quad t_2\colon\ y = 16.$

15. $t_1\colon\ y = 2x - \frac{5}{3}, \quad t_2\colon\ y = 2x + \frac{11}{3}.$

16. $t_1 = 2$ s, $t_2 = 3$ s.

17. 1,90 V.

18. 500 m.

19. $v_2(t) = \frac{y\cdot v_1}{\sqrt{x^2-y^2}}.$

20. $v(t) = \frac{340t-100}{\sqrt{34t^2-20t+4}}, \quad d = 10,29.$

Autotest ke kapitole 7

1. je,
2. je,
3. může být,
4. nemusí existovat,

5. $y = |x - 2|,$
6. $(f \pm g)' = f' \pm g',\ (fg)' = f'g + fg',\ \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g-fg'}{g^2},$
7. a) $12x^3 - \frac{5}{2\sqrt{x}} - \frac{2}{3\sqrt[3]{x^5}},$ b) $-\frac{\ln x}{x^2},$ c) $\frac{2}{x(1-x^2)}$, $x \in (-1, 0) \cup (0, 1),$
   d) $\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}},$ e) $\frac{4\mathrm{e}^{2x}}{1-\mathrm{e}^{8x}}$, $x \in (0, \infty).$
8. $f'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2},\ f'(1) = 0,\ f'(-2) = \frac{-3}{25},\ -f'(3) = \frac{2}{25},$
9. $f''(2) = \frac{1}{2},\ f'''(1) = -1,$
10. $t\colon x + 2y = 0,\ n\colon 2x - y = 0.$

Kapitola 8

1. a) $\frac{1}{2}$, b) 1, c) $\frac{1}{2}$, d) $-\frac{1}{2}$, e) $\frac{1}{6}$, f) $\frac{2}{9}$, g) $+\infty$, h) 0, i) ∞.

2. a) 0, b) $\frac{1}{6}$, c) 0, d) 0, e) 1, f) 0.

3. a) 1, b) 0, c) e^3, d) 0, e) $\mathrm{e}^{-\frac{9}{2}}$, f) e.

4. Není spojitá, $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} f(x) = \frac{1}{2}$.

5. a) $\begin{array}{ccccccc} - & & + & & - & & + \\ \hline & -3 & & 0 & & 2 & \end{array}$ b) $\begin{array}{ccccccc} + & & - & & - & & + \\ \hline & -2 & & 0 & & 1 & \end{array}$

c) $\begin{array}{ccccccccccc} - & & + & & - & & - & & - & & + \\ \hline & -2 & & -1 & & 0 & & 1 & & 5 & \end{array}$

Autotest ke kapitole 8

1. a) -1, b) $1/\mathrm{e}$, c) $2/3$, d) -1.

2. sgn f : $\begin{array}{ccccc} + & & - & & + \\ \hline & -2 & & 0 & \end{array}$,

3. není spojitá, $\lim\limits_{x \to \pi} f(x) = -\frac{3}{2}$

Kapitola 9

1. Všechny uvedené extrémy jsou ostré.
   a) klesá na $(-\infty, 5/4\rangle$, roste na $\langle 5/4, +\infty)$, min: $f(5/4) = -17/8$,
   b) klesá na $(0, 1\rangle$ a $\langle \mathrm{e}^2, +\infty)$, roste na $\langle 1, \mathrm{e}^2\rangle$,
   min: $f(1) = 0$, max: $f(\mathrm{e}^2) = 4/\mathrm{e}^2$,
   c) roste na $(-\infty 0)$ a $(0, +\infty)$, extrémy nejsou,
   d) klesá na $(-\infty, -1\rangle$ a $\langle 0, 1\rangle$, roste na $\langle -1, 0\rangle$ a $\langle 1, +\infty)$,
   max: $f(0) = 1$, min: $f(-1) = 0$, $f(1) = 0$,
   e) roste na $(-\infty, 0\rangle$, klesá na $\langle 0, +\infty)$, max: $f(0) = 3$,
   f) roste na $(-\infty, 0)$ a $\langle 1, +\infty)$, klesá na $(0, 1\rangle$, min: $f(1) = \mathrm{e}$,
   g) roste na $\langle 0, 4)$, klesá na $(4, 8\rangle$, max: $f(4) = 4$,
   h) roste na $(-\infty, -2\rangle$ a na $\langle 2, \infty)$, klesá na $\langle -2, 2\rangle$,
   max: $f(-2) = \mathrm{e}^{16}$, min: $f(2) = \mathrm{e}^{-16}$,
   i) roste na $(-\infty, -26\rangle$ a na $\langle 1, \infty)$, klesá na $\langle -26, 1\rangle$,
   max: $f(-26) = 29$, min: $f(1) = 2$.

2. a) konkávní na $(-\infty, 0)$, konvexní na $(0, +\infty)$, infl. bod $x = 0$,
   b) konkávní na $(-2, +\infty)$,
   c) konvexní na $(-\infty, -\sqrt[3]{2})$ a $(1, +\infty)$, konkávní na $(-\sqrt[3]{2}, 1)$,
   infl. bod $x = -\sqrt[3]{2}$,
   d) konvexní na $(-\infty, -1/3\sqrt{3})$ a $(1/3\sqrt{3}, +\infty)$, konkávní na $(-1/3\sqrt{3}, 0)$ a $(0, 1/3\sqrt{3})$, infl. body $x = -1/3\sqrt{3}$ a $x = 1/3\sqrt{3}$,
   e) konvexní na $(-\sqrt{3}, 0)$ a $(\sqrt{3}, +\infty)$, konkávní na $(-\infty, -\sqrt{3})$ a $(0, \sqrt{3})$,
   infl. body $x = -\sqrt{3}$, $x = 0$ a $x = \sqrt{3}$,
   f) konvexní na $(\pi/2 + 2k\pi, 3\pi/2 + 2k\pi)$, konkávní na $(0 + 2k\pi, \pi/2 + 2k\pi)$ a $(3\pi/2 + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi)$, kde $k \in \mathbb{Z}$
   infl. body $x = \pi/2 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$,

g) konvexní na $(-\infty, -3)$ a $(3, \infty)$, nemá infl. body,
h) konvexní na $(-\infty, 1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}\rangle$ a na $\langle 1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}, \infty)$,
konkávní na $\langle 1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}, 1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}\rangle$, infl. body $x = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}$ a $x = 1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}$,
i) konkávní na $(-\infty, -4)$, konvexní na $(-4, 1)$ a $(1, \infty)$, infl. bod $x = -4$.

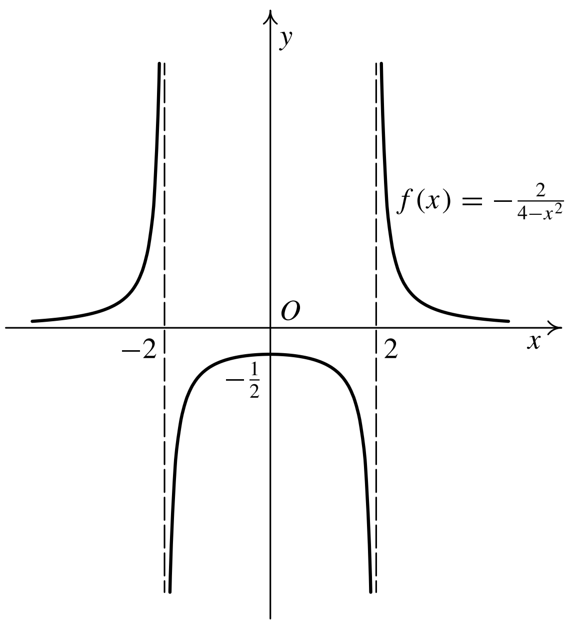
3. a) $x = -3,\ x = 3,\ y = 0$, b) $x = 0,\ y = 0$, c) $x = 0,\ y = x$,
d) $x = 1,\ y = 1$, e) $x = 2,\ y = 3x$, f) $x = -1,\ x = 1,\ y = x$,
g) $x = 0,\ y = x$, h) $y = x + 4/3$, i) $x = -1/\mathrm{e},\ y = x + 1/\mathrm{e}$.

4. a) $D(f) = \mathbb{R}$, sgn f: $\begin{array}{ccccc} - & & + & & + \\ \hline & -2 & & 1 & \end{array}$, sgn f': $\begin{array}{ccccc} + & & + & & - \\ \hline & -1 & & 1 & \end{array}$, max: $f(-1) =$ $= 4$, min: $f(1) = 0$, sgn f'': $\begin{array}{ccc} - & & + \\ \hline & 0 & \end{array}$, infl. bod $x = 0$.
b) $D(f) = \mathbb{R} \smallsetminus \{0\}$, lichá, sgn f: $\begin{array}{ccc} - & & + \\ \hline & \overset{\circ}{0} & \end{array}$, sgn f': $\begin{array}{ccccccc} + & & - & & - & & + \\ \hline & -1 & & \overset{\circ}{0} & & 1 & \end{array}$,
max: $f(-1) = -2$, min: $f(1) = 2$, sgn f'': $\begin{array}{ccc} - & & + \\ \hline & \overset{\circ}{0} & \end{array}$, asymptoty $x = 0$, $y = x$.
c) $D(f) = \mathbb{R} \smallsetminus \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$, lichá, sgn f: $\begin{array}{ccccccc} + & & - & & + & & - \\ \hline & \overset{\circ}{-\sqrt{3}} & & 0 & & \overset{\circ}{\sqrt{3}} & \end{array}$,
sgn f': $\begin{array}{ccccc} + & & + & & + \\ \hline & \overset{\circ}{-\sqrt{3}} & & \overset{\circ}{\sqrt{3}} & \end{array}$, sgn f'': $\begin{array}{ccccccc} + & & - & & + & & - \\ \hline & \overset{\circ}{-\sqrt{3}} & & 0 & & \overset{\circ}{\sqrt{3}} & \end{array}$, infl. bod $x = 0$,
asymptoty $x = -\sqrt{3}$, $x = \sqrt{3}$, $y = 0$.
d) $D(f) = (-2, 2)$, sudá, sgn f: $\begin{array}{ccccccc} & - & & + & & - & \\ \hline \overset{\circ}{-2} & & -\sqrt{3} & & \sqrt{3} & & \overset{\circ}{2} \end{array}$, sgn f': $\begin{array}{ccccc} & + & & - & \\ \hline \overset{\circ}{-2} & & 0 & & \overset{\circ}{2} \end{array}$,
max: $f(0) = \ln 4$, sgn f'': $\begin{array}{ccc} & - & \\ \hline \overset{\circ}{-2} & & \overset{\circ}{2} \end{array}$, asymptoty $x = -2$, $x = 2$.
e) $D(f) = (-1, 1)$, lichá, sgn f: $\begin{array}{ccccc} & - & & + & \\ \hline \overset{\circ}{-1} & & 0 & & \overset{\circ}{1} \end{array}$, sgn f': $\begin{array}{ccc} & + & \\ \hline \overset{\circ}{-1} & & \overset{\circ}{1} \end{array}$,
sgn f'': $\begin{array}{ccccc} & - & & + & \\ \hline \overset{\circ}{-1} & & 0 & & \overset{\circ}{1} \end{array}$, infl.bod $x = 0$, asymptoty $x = -1$, $x = 1$.
f) $D(f) = \mathbb{R}$, sgn f: $\begin{array}{ccccc} + & & + & & - \\ \hline & 0 & & 2 & \end{array}$, sgn f': $\begin{array}{ccccccc} - & & + & & - & & - \\ \hline & \overset{\circ}{0} & & 4/3 & & \overset{\circ}{2} & \end{array}$,
max: $f(4/3) = (2/3)\sqrt[3]{4}$, min: $f(0) = 0$, sgn f'': $\begin{array}{ccccc} - & & - & & + \\ \hline & \overset{\circ}{0} & & \overset{\circ}{2} & \end{array}$,
infl. bod $x = 2$, asymptota $y = -x + 2/3$.
g) $D(f) = \mathbb{R} \smallsetminus \{0\}$, sgn f: $\begin{array}{ccc} - & & + \\ \hline & \overset{\circ}{0} & \end{array}$, sgn f': $\begin{array}{ccccc} + & & - & & + \\ \hline & \overset{\circ}{0} & & 1 & \end{array}$, min: $f(1) = \mathrm{e}$,
sgn f'': $\begin{array}{ccc} - & & + \\ \hline & \overset{\circ}{0} & \end{array}$, asymptoty $x = 0$, $y = x + 1$.
h) $D(f) = \mathbb{R}$, lichá, sgn f: $\begin{array}{ccc} - & & + \\ \hline & 0 & \end{array}$, sgn f': $\begin{array}{ccccc} - & & + & & - \\ \hline & -1 & & 1 & \end{array}$,
min: $f(-1) = -\mathrm{e}^{-1/2}$, max: $f(1) = \mathrm{e}^{-1/2}$, sgn f'': $\begin{array}{ccccccc} - & & + & & - & & + \\ \hline & -\sqrt{3} & & 0 & & \sqrt{3} & \end{array}$,
infl. bod $x = 0$, $x = -\sqrt{3}$, $x = \sqrt{3}$, asymptota $y = 0$.
i) $D(f) = \mathbb{R}$, lichá, sgn f: $\begin{array}{ccc} - & & + \\ \hline & 0 & \end{array}$, sgn f': $\begin{array}{ccccc} - & & + & & - \\ \hline & \overset{\circ}{-1} & & \overset{\circ}{1} & \end{array}$,
min: $f(-1) = -\pi/2$, max: $f(1) = \pi/2$, sgn f'': $\begin{array}{ccccccc} - & & + & & - & & + \\ \hline & \overset{\circ}{-1} & & 0 & & \overset{\circ}{1} & \end{array}$,
infl. bod $x = 0$, asymptota $y = 0$.

5. a) ne, b) ne, c) ne, d) ano, e) ne,
   f) ano, g) ano, h) ano, i) ne, j) ano.

Autotest ke kapitole 9

1. Může nastat.
2. $f\colon y = x^3$, $x_0 = 0$.
3. Rostoucí.
4. Konkávní.
5. $f\colon y = \sqrt[3]{x^2}$, $x_0 = 0$.
6. $f\colon y = x^4$, $x_0 = 0$.
7. $f\colon y = \frac{\sin x}{x}$, $x_0 = 0$.
8. Roste na $(-\infty, -1\rangle$ a $\langle 1, +\infty)$, klesá na $\langle -1, 1\rangle$,
   max: $f(-1) = 2$, min: $f(1) = 0$.
9. Konvexní na $\langle 0, 1)$, konkávní na $(-1, 0\rangle$, infl. bod $(0, 0)$.
10. $x = \pm 2$, $y = x$.
11. $D(f) = \mathbb{R} \smallsetminus \{-2, 2\}$, sgn f: $+\ \underset{-2}{\circ}\ -\ \underset{2}{\circ}\ +$, sgn f': $+\ \underset{-2}{\circ}\ +\ \underset{0}{|}\ -\ \underset{2}{\circ}\ -$,
    max: $f(0) = -1/2$, sgn f'': $+\ \underset{-2}{\circ}\ -\ \underset{2}{\circ}\ +$, asymptoty $x = \pm 2$, $y = 0$.



Kapitola 10

1. a) max: $f(-1) = 17$, min: $f(3) = 1$, b) max: $f(\mathrm{e}) = \mathrm{e}^2$, min: $f(1) = 0$,
   c) max: $f(\mathrm{e}^2) = \mathrm{e}^2 - 6$, min: $f(3) = 3 - \ln 27$,
   d) max: $f(0) = \sqrt[3]{4}$, min: $f(2) = 0$, e) max: $f(0) = \frac{\pi}{4}$, min: $f(2) = 0$,
   f) max: neexistuje, min: $f\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{\mathrm{e}}}$.

2. 1.

3. Čtverec o straně $\sqrt{P}$.

4. Obdélník má rozměry $\frac{2a}{4+\pi}$ a $\frac{a}{4+\pi}$, půlkruh je nad větší stranou.

5. Poloměr válce $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$, výška válce $v = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$.

6. Čtverce o straně 10 cm.

7. Bod $[-1, -2]$.

8. Strany obdélníka jsou $a\sqrt{2}$, $b\sqrt{2}$.

9. $a = 2(1 + \sqrt[3]{4})$, $b = 2(2 + \sqrt[3]{2})$, vzdálenost je přibližně 8,32.

10. Na krychli o hraně $\sqrt[3]{\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{6}+\sqrt{\pi}}}$ m $\doteq$ 0,75 m je třeba postavit kouli o průměru $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt[3]{\pi(\sqrt{6}+\sqrt{\pi})}}$ m $\doteq$ 1,03 m.

Kapitola 11

1. a) $\frac{-2x_0}{(x_0{}^2-1)^2} \cdot h$, b) $3 \sin^2 x_0 \cos x_0 \cdot h$, c) $\frac{-1}{|x_0|\sqrt{x_0{}^2-1}} \cdot h$.

2. a) $f(x_0 + h) - f(x + 0) = 0{,}63$, $\mathrm{d}f_{x_0}(h) = 0{,}6$,
   b) $f(x_0 + h) - f(x + 0) = -2{,}152$, $\mathrm{d}f_{x_0}(h) = -2$.

3. a) $\frac{5}{3}$, b) $-0{,}2$, c) $0{,}01$, d) $0{,}1$.

4. a) $4{,}043$, b) $1{,}2$, c) $0{,}835398$.

5. a) $0{,}4$, $0{,}2$, b) $-0{,}01$, nelze.

6. $\pm 0{,}75$ m, $\pm 0{,}006$.

7. $0{,}0033r$.

8. a) $(x-1)^3 + 3(x-1)^2 + (x-1) + 4$,
   b) $(x-2)^4 + 8(x-2)^3 + 21(x-2)^2 + 10(x-2) - 5$.

9. a) $(x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3}$, b) $\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 - \frac{(x-\frac{\pi}{2})}{1!\,2} - \frac{(x-\frac{\pi}{2})^2}{2!\,2^2} + \frac{(x-\frac{\pi}{2})^3}{3!\,2^3}\right)$.

10. a) $1 + 2x + 2x^2 + \dfrac{4}{3}x^3$, b) $1 + 2x + 2x^2 + 2x^3$.

11. a) $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$, b) $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n$.

12. a) 3,107, b) 0,674.

13. a) 2,71828, b) 2,2361.

Autotest ke kapitole 11

1. $-0{,}15$,
2. a) $-0{,}06$, b) 2,08,
3. $1 + \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{n!}$,
4. 0,970,
5. $2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{24} + \frac{1}{160} + \frac{1}{896}\right) = 0{,}5490$,
6. $f(x) = -4 + (x+1) + 4(x+1)^2 - 4(x+1)^3 + (x+1)^4$.

Literatura

[1] BARROW, J. D.: *Pí na nebesích. O počítání, myšlení a bytí*. Praha: Mladá fronta, edice Kolumbus, 2000.

[2] BEČVÁŘ, J.: *Seznamujeme se s množinami*. 2. vydání. Praha: SNTL, 1982.

[3] BIRKHOFF, G. – MAC LANE, S.: *Prehľad modernej algebry*. Bratislava: Alfa, 1979.

[4] BOUCHALA, J.: *Matematická analýza 1*. Ostrava: VŠB-TU, 1998. Skriptum.

[5] BUDINSKÝ, B., CHARVÁT, J.: *Matematika I*. Praha: SNTL, Bratislava: Alfa, 1987.

[6] DEVLIN, K.: *Jazyk matematiky*. Praha: Nakl. Dokořán, s. r. o., nakl. Argo, 2003.

[7] DOŠLÁ, Z., KUBEN, J.: *Diferenciální počet funkcí jedné proměnné*. Brno: MU v Brně, 2003. Skriptum.

[8] CHARVÁT, J., HÁLA, M., ŠIBRAVA, Z.: *Příklady k matematice I*. Praha: Vydavatelství ČVUT, 1993. Skriptum.

[9] JARNÍK, V.: *Diferenciální počet (I)*. Praha: Academia, 1974.

[10] KUBEN, J.: *Diferenciální počet funkcí jedné proměnné*. 2. vydání. Brno: Vojenská akademie, 1999. Skriptum.

[11] KUBEN, J.: *Reálné funkce jedné proměnné*. 2. vydání. Brno: Vojenská akademie, 1999. Skriptum.

[12] KUROŠ, A. G.: *Kurs vysšej algebry*. 10. vydání. Moskva: Nauka, 1971.

[13] NOVÁK, V.: *Diferenciální počet v R*. 2. přepracované vydání. Brno: MU v Brně, 1997. Skriptum.

[14] POLÁK, J.: *Středoškolská matematika v úlohách I*. Praha: Prometheus, 1996.

[15] POLÁK, J.: *Přehled středoškolské matematiky*. Praha: Prometheus, 1997.

[16] POTŮČEK, R.: *Vybrané partie ze středoškolské matematiky I*. 1. vydání. Brno: Vojenská akademie, 2003. Skriptum.

[17] POTŮČEK, R.: *Vybrané partie ze středoškolské matematiky II*. 1. vydání. Brno: Univerzita obrany, 2004. Skriptum.

[18] POTŮČEK, R.: *Sbírka řešených úloh ze středoškolské matematiky I*. 1. vydání. Brno: Univerzita obrany, 2005. Skriptum.

[19] REKTORYS, K. a kol.: *Přehled užité matematiky*. 5. vydání. Praha: SNTL, 1988.

[20] REKTORYS, K.: *Co je a k čemu je vyšší matematika*. Praha: Academia, 2001.

[21] SCHWARZ, Š.: *Základy náuky o riešení rovníc*. 2. vydanie. Bratislava: Vydavateľstvo SAV, 1968.

[22] SINGH, S.: *Velká Fermatova věta*. Praha: Academia, 2000.

[23] VESELÝ, J.: *Matematická analýza pro učitele 1+2*. 1. vydání. Praha: MATFYZPRESS, 2001.

[24] VILENKIN, N. J.: *Neznámý svět nekonečných množin*. Praha: SNTL – Práce, 1971.

Rejstřík

Název:	Diferenciální počet funkcí jedné proměnné
Autoři:	Doc. RNDr. Jaromír Kuben, CSc., RNDr. Petra Šarmanová, Ph.D.
Rok vydání:	2006
Počet stran:	351
Počet obrázků:	233

ISBN 80-248-1192-8

9 788024 811925