Z rovnosti (12.128.2) dostaneme, že

$$V(x, y, z) = x^2y + \varphi(y, z), \tag{12.128.5}$$

kde φ je nějaká funkce dvou proměnných y, z. Dosadíme-li z (12.128.5) do (12.128.3), dostaneme

$$x^2 + \frac{\partial\varphi}{\partial y}(y, z) = x^2 - z, \quad \text{čili} \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}(y, z) = -z,$$

čili

$$\varphi(y, z) = -yz + \psi(z), \tag{12.128.6}$$

kde ψ je nějaká funkce jedné proměnné z. Dosadíme-li z (12.128.6) do (12.128.5) a odtud pak do (12.128.4), dostaneme

$$-y + \psi'(z) = 1 - y, \quad \text{čili} \quad \psi'(z) = 1.$$

Zvolíme-li např. $\psi(z) = z$ (stačí, najdeme-li jeden z nekonečně mnoha potenciálů vektorového pole $\boldsymbol{f}$), dostaneme po dosazení do (12.128.6) a odtud pak do (12.128.5), že

$$V(x, y, z) = x^2y - yz + z, \quad (x, y, z) \in \mathbf{R}^3.$$

Integrál (12.128.1) je tedy podle věty 12.125 roven číslu

$$V(2, -1, 3) - V(1, 0, 0) = 2 - 0 = 2. \ \square$$

Cvičení k článku 12Q

1. Rozhodněte, zda pro libovolnou uzavřenou cestu (k) v $\mathbf{R}^2$ platí:

a) $\int_{(k)} 2xy^2\,dx + (2x^2y + 3y^2)\,dy = 0$;

b) $\int_{(k)} 2xy^2\,dx + (3x^2y + 2y^2)\,dy = 0$.

2. Dokažte, že křivkový integrál druhého druhu vektorového pole

$$\boldsymbol{f}(x, y) = \left(\frac{1}{y}, \frac{y^2 - x}{y^2}\right)$$

nezávisí v oblasti $G = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y > 0\}$ na cestě, a vypočtěte

$$\int_{(1,1)}^{(-6,3)} \frac{1}{y}\,dx + \frac{y^2 - x}{y^2}\,dy.$$

3. Dokažte, že křivkový integrál druhého druhu vektorového pole

$$\boldsymbol{f}(x, y, z) = (2xy, x^2 - 2z^2, 3 - 4yz)$$

nezávisí v $\mathbf{R}^3$ na cestě, a vypočtěte

$$\int_{(1,2,3)}^{(-2,0,1)} 2xy\,dx + (x^2 - 2z^2)\,dy + (3 - 4yz)\,dz.$$

Výsledky cvičení:

1. a) Ano; b) ne.

2. -1.

3. 28.

12 IV PLOŠNÝ INTEGRÁL

V této části kapitoly se budeme zabývat tzv. plošnými integrály prvního a druhého druhu v $\mathbf{R}^3$, které jsou analogií křivkových integrálů prvního a druhého druhu.

Při jejich zavedení budeme postupovat podobně jako u křivkových integrálů. Budeme je definovat pomocí dvojného integrálu. V případě plošného integrálu prvního druhu budeme integrovat nejprve přes tzv. hladký list (analogie hladkého oblouku) a potom přes tzv. po částech hladkou plochu (analogie po částech hladké křivky) a v případě plošného integrálu druhého druhu nejprve přes tzv. orientovaný hladký list (analogie orientovaného hladkého oblouku) a posléze přes tzv. orientovanou po částech hladkou plochu (analogie orientované cesty). Pomocí plošného integrálu prvního druhu vypočteme např. hmotnost hmotné plochy, známe-li její (plošnou) hustotu, pomocí plošného integrálu druhého druhu např. „objem" nestlačitelné stacionárně proudící kapaliny, která proteče danou plochou za jednotku času, známe-li vektorové pole popisující proudění kapaliny.

Vyslovíme větu Gaussovu-Otrogradského, která ukazuje zajímavou souvislost mezi plošným integrálem druhého druhu a trojným integrálem, a větu Stokesovu, která uvádí do jisté souvislosti plošný integrál druhého druhu a křivkový integrál druhého druhu. Obě tyto věty patří do tzv. vektorové analýzy. V závěru stručně naznačíme několik dalších vztahů z vektorové analýzy.

Teorie plošných integrálů je z matematického hlediska velmi náročná. Vzhledem ke koncepci a rozsahu této učebnice máme možnost zmínit se jen o těch nejzákladnějších pojmech, přičemž mnohé z nich pouze intuitivně naznačíme. Vynechat plošné integrály jsme nemohli a ani nechtěli, protože se s nimi i s pojmy z vektorové analýzy setkáte ve fyzice, mechanice i v některých teoretických inženýrských předmětech.

12R. PLOŠNÝ INTEGRÁL PRVNÍHO DRUHU

12.129. Nejjednodušší obor, přes který budeme nyní integrovat, je tzv. *hladký list* v $\mathbf{R}^3$. Představte si jej jako regulární plochu (viz kap. 11, def. 11.59), která je omezená a která je navíc doplněná o tzv. svůj *kraj* (tj. o obrazy všech hraničních bodů oblasti $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ z def. 11.59). Při prvním čtení této kapitoly se můžete s touto názornou představou hladkého listu spokojit a pokračovat až poznámkou 12.133.

Přesné zavedení pojmu hladký list je náročnější a bude obsahem definic 12.130, 12.131 a 12.132.

12.130. Definice. Omezenou oblast $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ nazveme *regulární oblastí* v $\mathbf{R}^2$, jestliže její hranice hr Ω je tvořena jedinou po částech hladkou křivkou. Je-li Ω regulární oblast v $\mathbf{R}^2$, potom $\overline{\Omega}$ je tzv. *uzavřená regulární oblast* v $\mathbf{R}^2$.

12.131. Definice. Nechť $\overline{\Omega}$ je uzavřená regulární oblast v $\mathbf{R}^2$. Prostou vektorovou funkci $\boldsymbol{g} = (g_1, g_2, g_3) : \overline{\Omega} \to \mathbf{R}^3$ nazveme *difeomorfismem*, jestliže existuje otevřená množina $G \subset \mathbf{R}^2$ obsahující množinu $\overline{\Omega}$ a vektorová funkce $\boldsymbol{h} = (h_1, h_2, h_3) : G \to \mathbf{R}^3$, která je na G třídy C^1 tak, že $\boldsymbol{g} = \boldsymbol{h}|_{\overline{\Omega}}$.

Jestliže $\boldsymbol{g} : \overline{\Omega} \to \mathbf{R}^3$ je difeomorfismus a $\boldsymbol{h}$ nějaké jeho rozšíření uvedených vlastností, potom v každém bodě $(u, v) \in$ hr $\overline{\Omega}$ definujeme

$$\frac{\partial g_i}{\partial u}(u, v) = \frac{\partial h_i}{\partial u}(u, v), \quad \frac{\partial g_i}{\partial v}(u, v) = \frac{\partial h_i}{\partial v}(u, v), \tag{12.131.1}$$

kde $i \in \{1, 2, 3\}$.[26])

12.132. Definice. Množinu $L \subset \mathbf{R}^3$ nazýváme *hladkým listem* (stručně *listem*) v $\mathbf{R}^3$, jestliže existuje uzavřená regulární oblast $\overline{\Omega}$ v $\mathbf{R}^2$ a difeomorfismus $\boldsymbol{g} : \overline{\Omega} \to \mathbf{R}^3$ takový, že

$$L = \boldsymbol{g}(\overline{\Omega}).$$

Množinu $\boldsymbol{g}(\text{hr}\,\overline{\Omega})$ označujeme ∂L a nazýváme *krajem* (*hladkého*) *listu* L. Množina $L - \partial L$ je tzv. *vnitřek* (*hladkého*) *listu* L.

12.133. Poznámka. Konkrétní list určíme (podobně jako v diferenciální geometrii) např. pomocí jeho vektorové rovnice nebo pomocí jeho parametrických rovnic. Ve stejném smyslu jako v diferenciální geometrii hovoříme o regulární transformaci parametrů, o koeficientech g_{ij} první základní formy listu apod. Pojmy kraj listu a vnitřek listu nezávisí, jak lze ukázat, na parametrizaci listu.

12.134. Příklad. Množina $L \subset \mathbf{R}^3$ z obr. 93 ($R, h > 0$), tj. čtvrtina pláště rotačního válce, je hladký list. Lze jej popsat např. parametrickými rovnicemi

$$x = R\cos u, \quad y = R\sin u, \quad z = v, \tag{12.134.1}$$

$$(u, v) \in \overline{\Omega} = \langle 0, \pi/2 \rangle \times \langle 0, h \rangle.$$

Rozmyslete si sami, že vektorová funkce

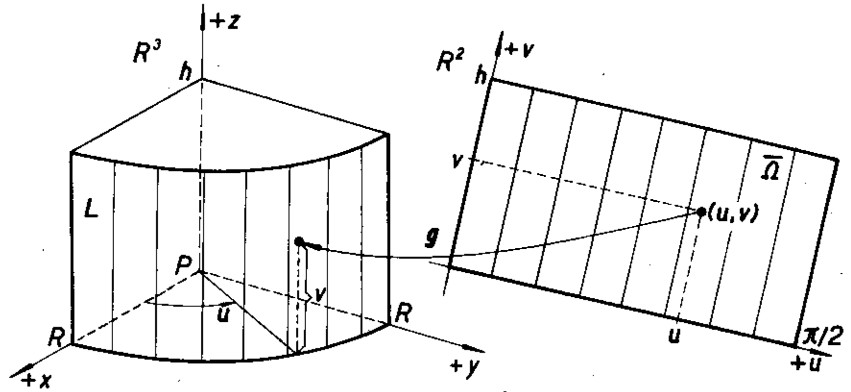
$$\boldsymbol{g}(u, v) = (R\cos u, R\sin u, v), \quad (u, v) \in \overline{\Omega},$$

je vskutku difeomorfismus.

Kraj ∂L uvažovaného listu L je po částech hladká křivka tvořená dvěma úsečkami a dvěma čtvrtkružnicemi.

---

[26]) Tato definice nezávisí na volbě rozšíření $\boldsymbol{h}$ difeomorfismu $\boldsymbol{g}$, což plyne ze spojitosti parciálních derivací funkcí h_i na množině G.

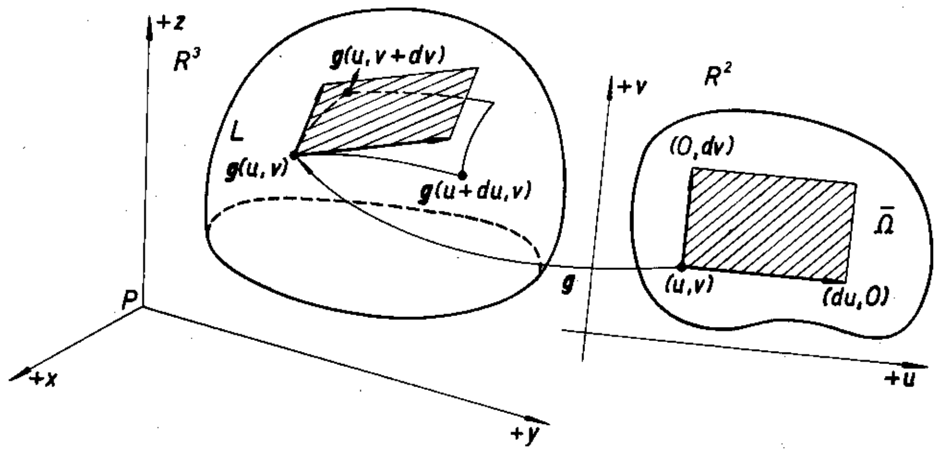


Obr. 93. K příkladu 12.134

12.135. Motivace. Nechť L je hladký list v $\mathbf{R}^3$ popsaný parametrickými rovnicemi

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad z = \xi(u, v), \quad (u, v) \in \overline{\Omega}, \tag{12.135.1}$$

kde $\overline{\Omega}$ je uzavřená regulární oblast v $\mathbf{R}^2$ a $\boldsymbol{g} = (\varphi, \psi, \xi) : \overline{\Omega} \to \mathbf{R}^3$ difeomorfismus, viz obr. 94. Mysleme si, že na listu L je spojitě rozložená hmota, jejíž rozložení je charakterizováno (plošnou) hustotou, tj. nezápornou spojitou funkcí h (třech proměnných x, y, z) definovanou na množině L.[27]) Při výpočtu hmotnosti listu L bychom mohli postupovat takto:



Obr. 94. K výpočtu hmotnosti hladkého listu L

---

[27]) Plošnou hustotu bychom zde mohli zavést analogicky jako délkovou, resp. plošnou, resp. objemovou hustotu u křivkového integrálu prvního druhu, resp. u dvojného integrálu, resp. u trojného integrálu.

„Nekonečně malému" obdélníku $\langle u, u + \mathrm{d}u\rangle \times \langle v, v + \mathrm{d}v\rangle$ v $\overline{\Omega}$ o obsahu $\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$ odpovídá na listu L přibližně „nekonečně malý" rovnoběžník o obsahu

$$\sqrt{[g_{11}(u, v)\, g_{22}(u, v) - g_{12}^2(u, v)]}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v,$$

kde $g_{ij}(u, v)$ jsou koeficienty první základní formy listu L v jeho bodě o vnitřních souřadnicích u, v (viz kap. 11, heslo 11.86.7).[28]) Vynásobíme-li tento výraz hustotou $h(\varphi(u, v), \psi(u, v), \xi(u, v))$, obdržíme přibližně hmotnost uvažovaného rovnoběžníka. Tato úvaha nás obvyklým způsobem dovede k tomuto vzorci pro výpočet (nebo, chcete-li, definici) hmotnosti $m(L)$ listu L:

$$m(L) = \iint_{\overline{\Omega}} h(\varphi(u, v), \psi(u, v), \xi(u, v))\,.\sqrt{[g_{11}(u, v)\, g_{22}(u, v) - g_{12}^2(u, v)]}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v. \tag{12.135.2}$$

Předcházející úvahy nás vedou k následující definici, v níž ovšem upustíme od předpokladu nezápornosti uvažované funkce.

12.136. Definice. Nechť L je hladký list v $\mathbf{R}^3$ popsaný parametrickými rovnicemi (12.135.1) a nechť f je spojitá funkce (třech proměnných x, y, z) definovaná na množině L. Potom dvojný integrál

$$\iint_{\overline{\Omega}} f(\varphi(u, v), \psi(u, v), \xi(u, v))\,.\sqrt{[g_{11}(u, v)\, g_{22}(u, v) - g_{12}^2(u, v)]}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \tag{12.136.1}$$

nazýváme *plošným integrálem prvního druhu funkce f přes list L* a označujeme jej symbolem

$$\iint_L f(x, y, z)\,\mathrm{d}\sigma. \tag{12.136.2}$$

12.137. Poznámky.

12.137.1. Plošný integrál v def. 12.136 podle věty 12.19 vždy existuje, neboť z předpokladů této definice vyplývá, že $\overline{\Omega}$ je (uzavřená) měřitelná množina (to plyne z věty 12.14; podle def. 12.130 je totiž množina $\overline{\Omega}$ omezená a její hranice je tvořena po částech hladkou křivkou, která má v $\mathbf{R}^2$ míru nula) a že integrovaná funkce v (12.136.1) je spojitá na $\overline{\Omega}$.

12.137.2. Plošný integrál (12.136.2), jak lze ukázat, závisí pouze na funkci f a na hladkém listu L, nikoliv na parametrizaci tohoto listu.

---

[28]) Z diferenciální geometrie [viz (11.84.3)] připomeňme, že koeficienty g_{ij} první základní formy listu L se při označení (12.135.1) vypočtou pomocí vzorců

$$g_{11} = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial\xi}{\partial u}\right)^2,$$

$$g_{22} = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial\xi}{\partial v}\right)^2,$$

$$g_{12} = \frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v} + \frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v} + \frac{\partial\xi}{\partial u}\frac{\partial\xi}{\partial v}$$

(jde o rovnosti funkcí s definičním oborem $\overline{\Omega}$).

12.137.3. Pro plošný integrál prvního druhu (12.136.2) se používají různá stručná označení, jako např.

$$\iint_L f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\sigma, \quad \iint_L f\,\mathrm{d}\sigma, \quad \iint_L f \quad \text{apod.}$$

12.137.4. Vlastnosti plošného integrálu prvního druhu přes hladký list, jako jeho linearita, aditivita apod., vyplývají prostřednictvím jeho definice z vlastností dvojného integrálu.

12.138. Příklad. Vypočtěme plošný integrál prvního druhu

$$\iint_L (x^2 + y^2 + z^2)\,\mathrm{d}\sigma,$$

kde L je hladký list z příkl. 12.134.

Řešení. Daný plošný integrál vypočteme na základě def. 12.136, tj. nahradíme jej příslušným dvojným integrálem (12.136.1) (všechny předpoklady def. 12.136 jsou zřejmě splněny). Vyjděme z parametrických rovnic (12.134.1) listu L. Při označení z (12.136.1) tedy máme

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2,$$

$$\varphi(u, v) = R\cos u, \quad \psi(u, v) = R\sin u, \quad \xi(u, v) = v.$$

Pomocí vzorců z pozn. pod čarou[28]) snadno vypočteme, že pro každé $(u, v) \in \overline{\Omega}$ je

$$g_{11}(u, v) = R^2, \quad g_{22}(u, v) = 1, \quad g_{12}(u, v) = 0.$$

Podle def. 12.136 tedy platí:

$$\iint_L (x^2 + y^2 + z^2)\,\mathrm{d}\sigma = \iint_{\overline{\Omega}} (R^2\cos^2 u + R^2\sin^2 u + v^2).\sqrt{[R^2.1 - 0^2]}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v =$$
$$= \int_0^{\pi/2} [\int_0^h (R^2 + v^2)\,R\,\mathrm{d}v]\,\mathrm{d}u = \tfrac{1}{6}\pi Rh(3R^2 + h^2).$$

Dodejme, že podle hesla 12.135 jsme vypočetli hmotnost hmótného listu L, jehož hustota je popsána funkcí $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. □

12.139. Po částech hladká plocha. Nechť L_1 je hladký list (v $\mathbf{R}^3$). „Přilepme" k němu hladký list L_2 tak, aby průnik $L_1 \cap L_2$ byl po částech hladká křivka, která je částí krajů ∂L_1, ∂L_2 obou uvažovaných listů. V takovém případě budeme říkat, že L_1 a L_2 jsou dva přilehlé listy. „Přilepíme-li" k jednomu z těchto dvou hladkých listů další hladký list L_3 atd., získáme tzv. po částech hladkou plochu. Její definice je tato:

Množinu $L \subset \mathbf{R}^3$ (viz obr. 95) nazveme *po částech hladkou plochou* (stručně *plochou*), jestliže existuje konečná posloupnost hladkých listů

$$(L_1, L_2, \ldots, L_m) \tag{12.139.1}$$

v $\mathbf{R}^3$ taková, že platí:

1. Každé dva listy L_i, L_j, kde $i \neq j$, mají za svůj průnik buď po částech hladkou křivku, nebo jednobodovou množinu, nebo prázdnou množinu, přičemž tento průnik je částí krajů ∂L_i, ∂L_j obou listů.

2. Každé tři listy L_i, L_j, L_k, kde $i \neq j$, $i \neq k$, $j \neq k$, mají za svůj průnik buď jednobodovou množinu, nebo prázdnou množinu.

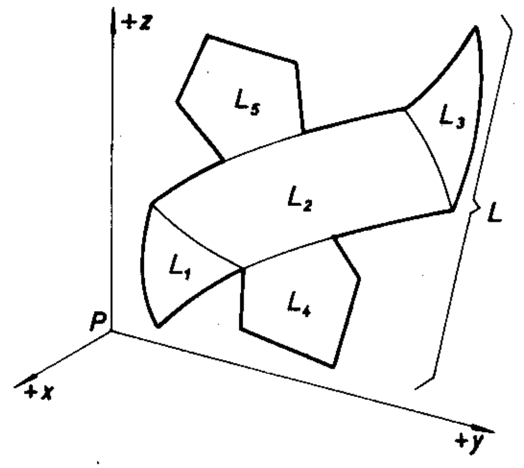
3. Pro každé $i \in \{2, \ldots, m\}$ je list L_i přilehlý (tj. „přilepený") k některému listu L_j, kde $j \in \{1, \ldots, i-1\}$.

4. $L = \bigcup_{i=1}^{m} L_i$.

Intuitivně jistě tušíte, co to je *kraj* ∂L po částech hladké plochy L.

Po částech hladkou plochu L sestavenou z hladkých listů (12.139.1) nazveme *uzavřenou*, jestliže každý bod kraje libovolného z listů L_i je bodem kraje ještě alespoň jednoho z těchto listů (tj. jestliže kraj ∂L plochy L je prázdná množina).

Příkladem po částech hladké plochy je např. povrch krychle (je tvořen šesti listy, stěnami krychle) nebo povrch šestibokého jehlanu [tvořený sedmi listy, šesti trojúhelníky (stěnami) a jedním šestiúhelníkem (podstavou)]. Rovněž kulová plocha je příkladem po částech hladké plochy. Můžeme ji sestavit např. ze dvou listů (její „severní" a „jižní" části). Tyto tři příklady jsou příklady uzavřených po částech hladkých ploch, zatímco po částech hladká plocha z obr. 95 není uzavřená.



Obr. 95. Po částech hladká plocha L jako sjednocení hladkých listů L_1, L_2, L_3, L_4, L_5 (silně je vyznačen kraj ∂L plochy L)

12.140. Definice. Nechť L je po částech hladká plocha v $\mathbf{R}^3$ a f spojitá funkce (třech proměnných x, y, z) definovaná na množině L. Nechť (12.139.1) je rozklad plochy L na hladké listy (mající vlastnosti z hesla 12.139). Potom *plošný integrál prvního druhu funkce f přes plochu L* definujeme předpisem

$$\iint_L f(x, y, z)\,\mathrm{d}\sigma = \sum_{i=1}^{m} \iint_{L_i} f(x, y, z)\,\mathrm{d}\sigma. \tag{12.140.1}$$

12.141. Poznámky.

12.141.1. Integrál (12.140.1) nezávisí na rozkladu plochy L na hladké listy. Důkaz tohoto tvrzení je obtížný.

12.141.2. Pro plošný integrál prvního druhu přes po částech hladkou plochu platí obdoba pozn. 12.137.4.

12.142. Některé aplikace plošného integrálu prvního druhu. Nechť L je po částech hladká hmotná plochy v $\mathbf{R}^3$, jejíž (plošná) hustota je popsána spojitou nezápornou funkcí h definovanou na L. Potom hmotnost $m(L)$ plochy L je dána vzorcem

$$m(L) = \iint_L h(x, y, z)\,\mathrm{d}\sigma.$$

Pro výpočet statických momentů S_{yz}, S_{zx}, S_{xy} vzhledem k souřadnicovým rovinám, těžiště $T = (x_T, y_T, z_T)$ a momentů setrvačnosti I_x, I_y, I_z vzhledem k souřadnicovým osám hmotné plochy L platí vzorce analogické odpovídajícím vzorcům pro hmotné těleso, resp. hmotnou křivku, např.

$$S_{yz} = \iint_L xh(x, y, z)\,\mathrm{d}\sigma,$$

$$S_{zx} = \iint_L yh(x, y, z)\,\mathrm{d}\sigma,$$

$$S_{xy} = \iint_L zh(x, y, z)\,\mathrm{d}\sigma$$

apod. Obsah σ plochy L je dán vzorcem

$$\sigma = \iint_L \mathrm{d}\sigma.$$

Cvičení k článku 12R

1. Vypočtěte plošný integrál prvního druhu

$$\iint_L z\,\mathrm{d}\sigma,$$

kde L je plocha daná parametrickými rovnicemi

$$x = u\cos v, \quad y = u\sin v, \quad z = v, \quad (u, v) \in \langle 0, 1\rangle \times \langle 0, 2\pi\rangle$$

(tj. L je část šroubové plochy).

2. Vypočtěte plošný integrál prvního druhu

$$\iint_L (x + y + z)\,\mathrm{d}\sigma,$$

kde L je povrch krychle $\langle 0, 1\rangle \times \langle 0, 1\rangle \times \langle 0, 1\rangle \subset \mathbf{R}^3$.

3. Určete obsah části rotačního paraboloidu

$$L = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : z = \tfrac{1}{2}(x^2 + y^2) \wedge x^2 + y^2 \leqq 1\}.$$

4. Určete souřadnice těžiště T „horní poloviny" kulové plochy

$$L = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \wedge z \geqq 0\},$$

kde $R > 0$, jestliže její hustota je popsaná funkcí $h(x, y, z) = \sqrt{(x^2 + y^2)}$.

Výsledky cvičení:

1. $\pi^2[\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})]$.
2. 9.
3. $\frac{2}{3}\pi(2\sqrt{2} - 1)$.
4. $T = (0, 0, 4R/3\pi)$.

12S. PLOŠNÝ INTEGRÁL DRUHÉHO DRUHU

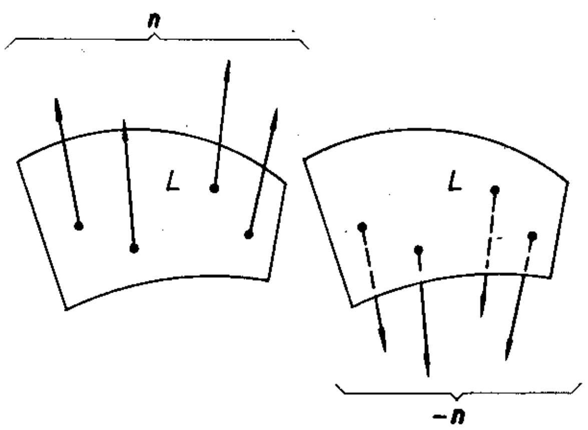
12.143. Orientace hladkého listu. Uvažujme hladký list L popsaný parametrickými rovnicemi (12.135.1). V každém bodě

$$(x, y, z) = \boldsymbol{g}(u, v) = (\varphi(u, v), \psi(u, v), \xi(u, v)), \quad (u, v) \in \overline{\Omega},$$

listu L sestrojme (jednotkový) vektor normály

$$\boldsymbol{n}(x, y, z) = \frac{\dfrac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial u}(u, v) \times \dfrac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial v}(u, v)}{\left|\dfrac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial u}(u, v) \times \dfrac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial v}(u, v)\right|} \qquad (12.143.1)$$

(viz např. heslo 11.78). Získáme tak spojité vektorové pole $\boldsymbol{n}$ vektorů normál na listě L, viz obr. 96. Kdybychom vyšli od jiné souhlasné, resp. nesouhlasné parametrizace listu L, dostali bychom uvedeným postupem totéž vektorové pole vektorů normál $\boldsymbol{n}$, resp. opačné vektorové pole vektorů normál $-\boldsymbol{n}$ (viz heslo 11.78).



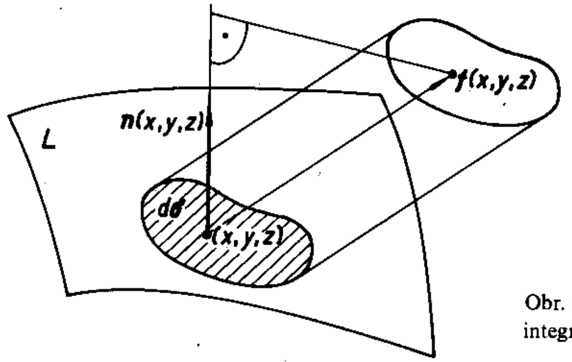
Obr. 96. Navzájem opačně orientované, orientované listy $(L, \boldsymbol{n})$, $(L, -\boldsymbol{n})$

Vektorová pole $\boldsymbol{n}$ a $-\boldsymbol{n}$ budeme nazývat (navzájem opačnými) *orientacemi* (*hladkého*) *listu* L. Uspořádané dvojice $(L, \boldsymbol{n})$ a $(L, -\boldsymbol{n})$ budeme nazývat (navzájem opačně) *orientovanými* (*hladkými*) *listy*. O orientaci listu L dané předpisem (12.143.1) říkáme, že *souhlasí s jeho parametrizací* $\boldsymbol{g}$ určenou rovnicemi (12.135.1), nebo, že (12.135.1) jsou *parametrické rovnice orientovaného listu* $(L, \boldsymbol{n})$.

Orientovaný list budeme stručně označovat např. (L). $(-L)$ bude orientovaný list opačně orientovaný než (L).

12.144. Motivace. Nechť $(L) = (L, \boldsymbol{n})$ je orientovaný hladký list v $\mathbf{R}^3$, jehož parametrické rovnice jsou (12.135.1). Představme si, že částí prostoru $\mathbf{R}^3$, v níž leží list L, protéká nestlačitelná kapalina. Nechť toto proudění je ustálené (čili stacionární), tj. nechť rychlost každé částice je určena pouze její polohou (nezávisle na čase). Rychlost uvažovaného proudění nechť je popsána spojitým vektorovým polem $\boldsymbol{f} = (f, g, h)$.

Ptejme se, kolik kapaliny proteče listem L za jednotku času. Na listě L zvolme „nekonečně malý" dílek o obsahu $d\sigma$, který obsahuje bod $(x, y, z) \in L$, viz obr. 97.



Obr. 97. K zavedení plošného integrálu druhého druhu

Tímto „nekonečně malým" dílkem proteče za jednotku času kapalina, která přibližně vyplní šikmý válec určený základnou o obsahu $d\sigma$ a výškou $|\boldsymbol{f}(x, y, z) \,.\, \boldsymbol{n}(x, y, z)|$, tedy válec o objemu

$$|\boldsymbol{f}(x, y, z) \,.\, \boldsymbol{n}(x, y, z) \, d\sigma|.$$

Pišme ale tento „objem" bez absolutní hodnoty, neboť v případě „záporného objemu" proteče příslušné množství kapaliny listem L na opačnou stranu. Obvyklá úvaha nás dovede k tomuto integrálu vyjadřujícímu množství kapaliny, která proteče celým listem L za jednotku času:

$$\iint_L \boldsymbol{f}(x, y, z) \,.\, \boldsymbol{n}(x, y, z) \, d\sigma. \qquad (12.144.1)$$

Předcházející úvahy nás vedou k této definici:

12.145. Definice. Nechť $(L) = (L, \boldsymbol{n})$ je orientovaný hladký list v $\mathbf{R}^3$ a $\boldsymbol{f} = (f, g, h): L \to \mathbf{R}^3$ spojité vektorové pole definované na listě L. Potom číslo (12.144.1) nazýváme *plošným integrálem druhého druhu vektorového pole* $\boldsymbol{f}$ *přes orientovaný list* (L) a označujeme je symbolem

$$\iint_{(L)} f(x, y, z) \, dy \wedge dz + g(x, y, z) \, dz \wedge dx + h(x, y, z) \, dx \wedge dy.^{29)} \qquad (12.145.1)$$

nebo stručně

$$\iint_{(L)} \boldsymbol{f}(x, y, z) \, d\boldsymbol{\sigma}.$$

[29]) Symboly $dy \wedge dz$, $dz \wedge dx$, $dx \wedge dy$ označují tzv. vnější součiny diferenciálů dx, dy, dz (chápaných jako tzv. lineární formy). O tom však blíže hovořit nebudeme. Dříve (a často i dnes) se v (12.145.1) místo těchto symbolů psalo $dy\,dz$, $dz\,dx$, $dx\,dy$.

12.146. Poznámky.

12.146.1. Plošný integrál v def. 12.145 vždy existuje, neboť z předpokladů této definice vyplývá, že (12.144.1) je plošný integrál prvního druhu spojité funkce přes hladký list.

12.146.2. Pro plošný integrál druhého druhu (12.145.1) se používají různá stručná označení, jako např.

$$\iint_{(L)} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}, \quad \iint_{(L)} f\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + g\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + h\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y,$$

$$\iint_{(L)} \boldsymbol{f}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}, \quad \iint_{(L)} \boldsymbol{f} \quad \text{apod.}$$

12.146.3. Vlastnosti plošného integrálu druhého druhu, jako jeho linearita, aditivita apod., vyplývají prostřednictvím jeho definice z vlastností plošného integrálu prvního druhu.

Dále platí, že

$$\iint_{(L)} \boldsymbol{f}(x, y, z)\,\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} = - \iint_{(-L)} \boldsymbol{f}(x, y, z)\,\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}.$$

12.146.4. Je-li $(L) = (L, \boldsymbol{n})$ orientovaný list popsaný parametrickými rovnicemi (12.135.1), potom z definic 12.145 a 12.136 vyplývá, že

$$\iint_{(L)} \boldsymbol{f}(x, y, z)\,\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} = \iint_{\Omega} \boldsymbol{f}(\varphi(u, v), \psi(u, v), \xi(u, v))\,.$$
$$.\,\boldsymbol{n}(\varphi(u, v), \psi(u, v), \xi(u, v)) \sqrt{[g_{11}(u, v)\,g_{22}(u, v) - g_{12}^2(u, v)]}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

Dosadíme-li do integrálu napravo ze vzorce (12.143.1) a ze vzorců pro výpočet koeficientů g_{ij} první základní formy listu L uvedených v pozn. pod čarou[28]), vypočteme (podrobný výpočet proveďte sami), že

$$\iint_{(L)} \boldsymbol{f}(x, y, z)\,\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} = \iint_{\Omega} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{g}(u, v))\,.\left[\frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial v}(u, v)\right]\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \tag{12.146.1}$$

$[\boldsymbol{g} = (\varphi, \psi, \xi)]$, čili podrobně rozepsáno

$$\iint_{(L)} f(x, y, z)\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + g(x, y, z)\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + h(x, y, z)\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y =$$

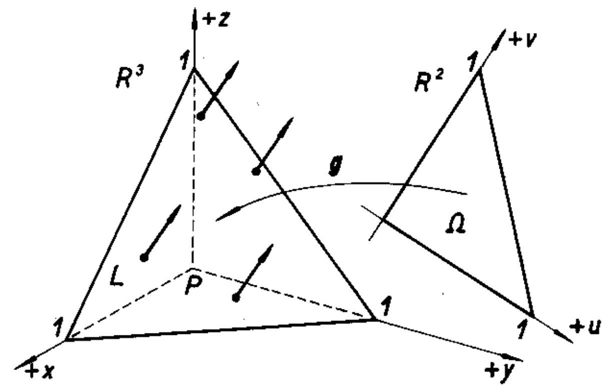
$$= \iint_{\Omega}\left[f(\varphi(u, v), \psi(u, v), \xi(u, v)) \begin{vmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial u}(u, v), & \frac{\partial \xi}{\partial u}(u, v) \\ \frac{\partial \psi}{\partial v}(u, v), & \frac{\partial \xi}{\partial v}(u, v) \end{vmatrix} + \right.$$

$$\left. + g(\ldots)\begin{vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial u}(u, v), & \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \\ \frac{\partial \xi}{\partial v}(u, v), & \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \end{vmatrix} + h(\ldots)\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v), & \frac{\partial \psi}{\partial u}(u, v) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v), & \frac{\partial \psi}{\partial v}(u, v) \end{vmatrix}\right]\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

12.147. Příklad. Vypočtěme plošný integrál druhého druhu

$$\iint_{(L)} yz\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + zx\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + xy\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y, \tag{12.147.1}$$

kde (L) je část roviny $x + y + z = 1$ ležící v prvním (uzavřeném) oktantu orientovaná jako v levé části obr. 98 (tj. „nahoru").



Obr. 98. K příkladu 12.147

Řešení. Daný list L můžeme parametricky popsat např. takto:

$$x = u, \quad y = v, \quad z = 1 - u - v, \quad (u, v) \in \overline{\Omega}, \tag{12.147.2}$$

kde $\overline{\Omega}$ je (uzavřený) trojúhelník z pravé části obr. 98. Při označení z hesla 12.143 pro každé $(u, v) \in \overline{\Omega}$ máme

$$\frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial u}(u, v) = (1, 0, -1), \quad \frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial v}(u, v) = (0, 1, -1),$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial v}(u, v) = (1, 1, 1). \tag{12.147.3}$$

Odtud je vidět, že orientace orientovaného listu (L) souhlasí s jeho uvažovanou parametrizací. Integrál (12.147.1) je podle vzorce (12.146.1) roven integrálu

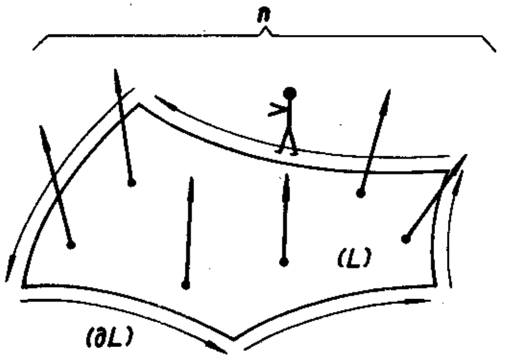
$$\iint_{\Omega} (v(1 - u - v), (1 - u - v)u, uv)\,.\,(1, 1, 1)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v =$$

$$= \int_0^1 \left[\int_0^{1-u} (-v^2 - u^2 - uv + u + v)\,\mathrm{d}v\right]\mathrm{d}u = \tfrac{1}{8}$$

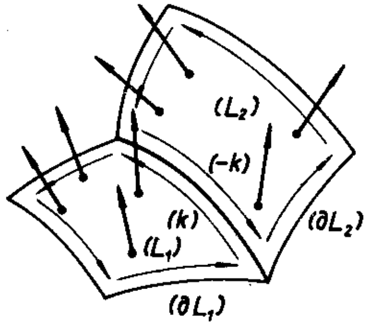
(příslušný dvojnásobný integrál vypočtěte sami). □

12.148. Souhlasná orientace přilehlých listů. Nechť $(L) = (L, \boldsymbol{n})$ je orientovaný list a nechť (∂L) je orientovaný kraj listu L. Řekneme, že orientovaný kraj (∂L) je *souhlasně orientován s orientovaným listem* (L), nebo že (∂L) je *orientovaný kraj orientovaného listu* (L), jestliže (názorně řečeno) při obíhání listu L po jeho orientovaném kraji (∂L) máme vektorové pole $\boldsymbol{n}$ po levé ruce, viz obr. 99.

Nechť L_1, L_2 jsou dva přilehlé listy o společné po částech hladké křivce k. Uvažujme orientované listy (L_1) a (L_2) a jejich orientované kraje (∂L_1) a (∂L_2). Nechť



Obr. 99. Orientovaný kraj (∂L) orientovaného listu (L)



Obr. 100. Souhlasně orientované orientované listy (L_1), (L_2) přilehlé

orientovaná cesta (k) je částí orientovaného kraje (∂L_1). Jestliže orientovaná cesta $(-k)$ je částí orientovaného kraje (∂L_2), řekneme, že orientované listy (L_1) a (L_2) jsou *souhlasně orientovány*, viz obr. 100.

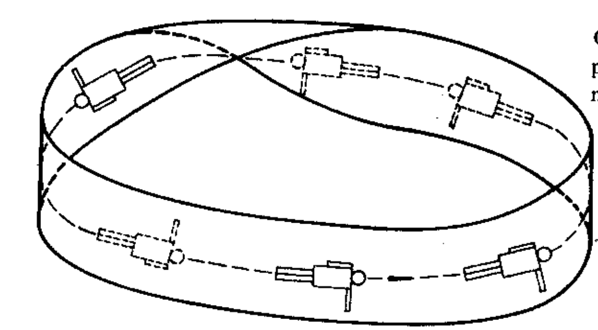
12.149. Orientovaná (po částech hladká) plocha. Buďme struční. Nechť (L_1), (L_2) jsou dva souhlasně orientované přilehlé listy a nechť S je po částech hladká plocha sestavená z listů L_1, L_2. Souhlasná orientace orientovaných listů (L_1), (L_2) umožňuje zavést orientaci plochy S „souhlasnou" s orientací obou těchto orientovaných listů. Takto orientovanou plochu označme (S). Intuitivně jistě tušíte, co to je kraj ∂S a orientovaný kraj (∂S) orientované plochy (S).

Stručně dodejme, že dalším vhodným „přilepením" souhlasně orientovaných listů (L_3), ..., (L_m) bychom dospěli k obecnému pojmu *orientované* (po částech hladké) *plochy* (L) skládající se z orientovaných listů (L_1), ..., (L_m). Definovali bychom její kraj ∂L (mohl by se rozpadnout na několik navzájem disjunktních křivek) a orientovaný kraj (∂L). Nebudeme se tím podrobně zabývat.

12.150. Poznámky.

12.150.1. Ne každou po částech hladkou plochu lze orientovat. Příklad takové „neorientovatelné" po částech hladké plochy je tzv. *Möbiův list*, jehož vektory normál přecházejí spojitě z jedné strany plochy na druhou, viz obr. 101. Möbiův list je tzv. *jednostranná plocha.* Jeho model můžete zhotovit z tenkého proužku papíru, jehož jeden konec přetočíte o 180° a slepíte s druhým koncem.

12.150.2. Každou uzavřenou po částech hladkou plochu L lze orientovat. Taková plocha L rozděluje prostor $\mathbf{R}^3$ na dvě oblasti: omezenou oblast Int L a neomezenou oblast Ext L, přičemž L je hranicí obou těchto oblastí (obdoba Jordanovy věty pro jednoduchou uzavřenou po částech hladkou křivku v $\mathbf{R}^2$, viz heslo 12.109). Stručně řečeno, „vnější" normálové vektory (v bodech, v nichž existují) určují jednu z orientací plochy L. Tuto orientaci budeme nazývat kladnou orientací plochy L.



Obr. 101. Möbiův list jako příklad po částech hladké plochy, kterou nelze orientovat

12.150.3. Jestliže (L) je orientovaná plocha z hesla 12.149 a $\boldsymbol{f}$ spojité vektorové pole definované na množině L, potom *plošný integrál druhého druhu vektorového pole* $\boldsymbol{f}$ *přes orientovanou plochu* (L) definujeme předpisem

$$\iint_{(L)} \boldsymbol{f}(x, y, z)\,\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} = \sum_{i=1}^{m} \iint_{(L_i)} \boldsymbol{f}(x, y, z)\,\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}.$$

Tato definice, jak lze dokázat, nezávisí na rozkladu orientované plochy (L) na orientované listy (L_i).

12.150.4. Plošný integrál druhého druhu přes orientovanou po částech hladkou plochu má opět obvyklé vlastnosti. Do podrobností nebudeme zabíhat.

12.151. Příklad. Vypočtěme plošný integrál druhého druhu

$$\iint_{(L)} x\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y, \tag{12.151.1}$$

kde (L) je kladně orientovaná (tj. vnějšími normálovými vektory) kulová plocha se středem v počátku a poloměrem jedna.

Řešení. Kulovou plochu L můžeme popsat např. vektorovou funkcí $\boldsymbol{g}$, jejíž souřadnicové funkce jsou dány (v tomto pořadí) rovnicemi (viz heslo 11.64):

$$x = \cos u \cos v, \quad y = \sin u \cos v, \quad z = \sin v,$$
$$(u, v) \in \overline{\Omega} = \langle -\pi, \pi \rangle \times \langle -\pi/2, \pi/2 \rangle. \tag{12.151.2}$$

Důsledně vzato, měli bychom danou orientovanou kulovou plochu sestavit např. ze dvou orientovaných listů (třeba její „severní" a „jižní" orientované části), atd. Avšak podobně jako u křivkového integrálu i zde můžeme z parametrických rovnic (12.151.2) kulové plochy L přímo dosadit do vzorce (12.146.1) a přesto, že vektorová funkce $\boldsymbol{g}$ v některých bodech množiny $\overline{\Omega}$ „zlobí", dojdeme ke správnému výsledku.

Snadno vypočteme, že pro každé $(x, y) \in \overline{\Omega}$ je

$$\frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial v}(u, v) = (\cos u \cos^2 v, \sin u \cos^2 v, \sin v \cos v).$$

Jelikož např. pro $(u, v) = (0, 0)$ máme

$$\frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial u}(0, 0) \times \frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial v}(0, 0) = (1, 0, 0),$$

což je zřejmě vnější normálový vektor kulové plochy L v jejím bodě $\boldsymbol{g}(0, 0) = (1, 0, 0)$, vidíme, že daná orientace orientované kulové plochy (L) souhlasí s její parametrizací (12.151.2). Integrál (12.151.1) je podle vzorce (12.146.1) roven integrálu

$$\iint_{\Omega} (\cos u \cos v,\ \sin u \cos v, \sin v) \,.\, (\cos u \cos^2 v, \sin u \cos^2 v, \sin v \cos v)\, du\, dv =$$
$$= \int_{-\pi}^{\pi} \Big[\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos v\, dv \Big] du = 4\pi$$

(příslušný skalární součin a dvojnásobný integrál vypočtěte sami). □

Cvičení k článku 12S

1. Vypočtěte plošný integrál druhého druhu

$$\iint_{(L)} \boldsymbol{f}(x, y, z)\, d\boldsymbol{\sigma},$$

jestliže:

a) $\boldsymbol{f}(x, y, z) = (0, 0, x^2 + y^2)$, (L) je kruh $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 \leqq 4 \wedge z = 0\}$ orientovaný normálovým vektorem směřujícím „dolů";

b) $\boldsymbol{f}(x, y, z) = (-x^2 z, y, 2xy)$, (L) je část elipsoidu $4x^2 + y^2 + 4z^2 = 4$ ležící v prvním oktantu orientovaná „vnějšími" normálovými vektory;

c) $\boldsymbol{f}(x, y, z) = (y, 0, 0)$, (L) je kladně orientovaný povrch čtyřstěnu ohraničeného rovinami $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 1$.

2. Vypočtěte tok vektorového pole

$$\boldsymbol{f}(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2)$$

kladně orientovanou kulovou plochou se středem $(1, 1, 1)$ a poloměrem $R = 1$.

Výsledky cvičení:

1. a) -8π; b) $(11 + 5\pi)/15$; c) 0.

2. 8π.

12T. GAUSSOVA – OSTROGRADSKÉHO VĚTA

12.152. Věta, která je náplní tohoto článku, uvede do souvislosti trojný integrál na prostorové oblasti s plošným integrálem druhého druhu přes její hranici.

12.153. Definice. Nechť $\boldsymbol{f} = (f, g, h)$ je vektorové pole definované na oblasti $G \subset \mathbf{R}^3$, které je na G třídy C^1. *Divergencí vektorového pole* $\boldsymbol{f}$ *v bodě* $(x_0, y_0, z_0) \in G$ nazýváme číslo, které označujeme $\operatorname{div} \boldsymbol{f}(x_0, y_0, z_0)$ a definujeme rovností

$$\operatorname{div} \boldsymbol{f}(x_0, y_0, z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) + \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) + \frac{\partial h}{\partial z}(x_0, y_0, z_0).$$

Funkci

$$\operatorname{div} \boldsymbol{f}: (x, y, z) \mapsto \operatorname{div} \boldsymbol{f}(x, y, z), \quad (x, y, z) \in G,$$

nazýváme *divergencí vektorového pole* $\boldsymbol{f}$ *na oblasti* G.

12.154. Poznámka. Lze dokázat, že funkce $\operatorname{div} \boldsymbol{f}$ z def. 12.153 je invariantní vzhledem ke každé ortonormální transformaci v prostoru $\mathbf{R}^3$ a samozřejmě též vzhledem k libovolné translaci v $\mathbf{E}_3 \equiv \mathbf{R}^3$. Tedy funkce $\operatorname{div} \boldsymbol{f}$ závisí pouze na vektorovém poli $\boldsymbol{f}$ a nikoliv na volbě kartézské soustavy souřadnic v $\mathbf{E}_3 \equiv \mathbf{R}^3$.

12.155. Gaussova – Ostrogradského věta. *Nechť $\bar{\Omega} \subset \mathbf{R}^3$ je omezená uzavřená oblast, jejíž hranicí je jediná uzavřená po částech hladká plocha (odtud vyplývá, že $\bar{\Omega}$ je uzávěr jednoduše souvislé oblasti).*[30] *Nechť $(\operatorname{hr} \bar{\Omega})$ je kladně orientovaná plocha $\operatorname{hr} \bar{\Omega}$ (tj. orientovaná pomocí „vnějších" normálových vektorů). Nechť $\boldsymbol{f} = (f, g, h)$ je vektorové pole, které je třídy C^1 na (otevřené) oblasti $G \subset \mathbf{R}^3$, přičemž $\bar{\Omega} \subset G$. Potom platí tzv. Gaussův – Ostrogradského vzorec:*

$$\iint_{(\operatorname{hr} \bar{\Omega})} \boldsymbol{f}(x, y, z)\, d\boldsymbol{\sigma} = \iiint_{\bar{\Omega}} \operatorname{div} \boldsymbol{f}(x, y, z)\, dx\, dy\, dz. \tag{12.155.1}$$

Důkaz je obtížný a nebudeme jej provádět. □

12.156. Příklad. Vypočtěme pomocí Gaussovy – Ostrogradského věty ještě jednou plošný integrál druhého druhu z příkl. 12.151.

Řešení. Při označení z příkl. 12.151 a věty 12.155 je $\bar{\Omega}$ uzavřená koule se středem v počátku a poloměrem jedna, $(\operatorname{hr} \bar{\Omega}) = (L)$ její kladně orientovaný povrch, $\boldsymbol{f}(x, y, z) = (x, y, z)$. Zvolíme-li za G libovolnou oblast obsahující kouli $\bar{\Omega}$, jsou všechny předpoklady věty 12.155 zřejmě splněny. Snadno vypočteme, že pro každé $(x, y, z) \in \bar{\Omega}$ je

$$\operatorname{div} \boldsymbol{f}(x, y, z) = 1 + 1 + 1 = 3.$$

Pomocí vzorce (12.155.1) tedy dostaneme:

$$\iint_{(L)} \boldsymbol{f}(x, y, z)\, d\boldsymbol{\sigma} = \iiint_{\bar{\Omega}} 3\, dx\, dy\, dz = 3 \iiint_{\bar{\Omega}} dx\, dy\, dz = 3 \,.\, \tfrac{4}{3}\pi = 4\pi$$

(poslední trojný integrál je roven objemu koule $\bar{\Omega}$, tedy číslu $\frac{4}{3}\pi$). □

12.157. Fyzikální interpretace. Interpretujme vektorové pole $\boldsymbol{f}$ z věty 12.155 jako rychlostní pole stacionárně proudící nestlačitelné kapaliny (viz heslo 12.144). Je-li levá strana L rovnosti (12.155.1) rovna nule, potom množství vteklé a vyteklé kapaliny do $\bar{\Omega}$ (za jednotku času) je stejné. Při $L > 0$ vtéká do $\bar{\Omega}$ více kapaliny než vytéká, při $L < 0$ vtéká do $\bar{\Omega}$ méně kapaliny než vytéká. Tyto poslední dva případy si lze vysvětlit pouze tak, že některé body v $\bar{\Omega}$ mají zřídlový charakter. Jsou to buď *body zdroje* (kapalina v nich vzniká) nebo *body noru* (též *propadu*) (kapalina v nich zaniká).

---

[30]) Podobně jako u Greenovy věty (viz pozn. 12.111) bychom i zde mohli připustit, že hranice $\operatorname{hr} \bar{\Omega}$ je tvořena několika (konečně mnoha) uzavřenými po částech hladkými plochami. V rovnosti (12.155.1) nalevo by pak byly součty, resp. rozdíly plošných integrálů druhého druhu přes tyto (orientované) uzavřené plochy.

Uvažujme („malé") okolí O bodu $(x, y, z) \in \Omega (= \bar{\Omega} - \mathrm{hr}\, \bar{\Omega})$. Číslo

$$\frac{\iint\limits_{(\mathrm{hr}\, O)} \boldsymbol{f}(x, y, z)\, \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}}{\mu(O)}, \tag{12.157.1}$$

kde $(\mathrm{hr}\, O)$ je kladně orientovaná hranice okolí O a $\mu(O)$ objem okolí O, nazýváme *průměrnou vydatností zřídel v okolí O*. „Stahujeme-li" okolí O k bodu (x, y, z), tj. $\mu(O) \to 0$, lze ukázat, že za uvedených předpokladů je limitou výrazu (12.157.1) číslo $\mathrm{div}\, \boldsymbol{f}(x, y, z)$. Toto číslo nazýváme *vydatností zřídla kapaliny v bodě* (x, y, z). Gaussova – Ostrogradského věta tedy zhruba říká, že přírůstek, resp. úbytek kapaliny v $\bar{\Omega}$ (za jednotku času) je roven „souhrnu" vydatností všech zřídel v $\bar{\Omega}$.

Cvičení k článku 12T

1. Pomocí Gaussovy – Ostrogradského věty vypočtěte plošný integrál druhého druhu

$$\iint\limits_{(L)} xy\, \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + yz\, \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + xz\, \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y,$$

kde (L) je kladně orientovaný povrch čtyřstěnu ohraničeného rovinami $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 1$.

2. Pomocí Gaussovy – Ostrogradského věty vyřešte znovu cvič. 2 k čl. 12S.

Výsledky cvičení:

1. $\frac{1}{8}$.

12U. STOKESOVA VĚTA

12.158. Věta, která je náplní tohoto článku, uvede do souvislosti plošný integrál druhého druhu přes orientovanou po částech hladkou plochu (s krajem) s křivkovým integrálem druhého druhu podél jejího orientovaného kraje.

12.159. Definice. Nechť $\boldsymbol{f} = (f, g, h)$ je vektorové pole definované na oblasti $G \subset \mathbf{R}^3$, které je na G třídy C^1. *Rotací vektorového pole* $\boldsymbol{f}$ *v bodě* $(x_0, y_0, z_0) \in G$ nazýváme vektor, který označujeme symbolem $\mathrm{rot}\, \boldsymbol{f}(x_0, y_0, z_0)$ a definujeme rovností

$$\mathrm{rot}\, \boldsymbol{f}(x_0, y_0, z_0) = \left(\frac{\partial h}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) - \frac{\partial g}{\partial z}(x_0, y_0, z_0), \frac{\partial f}{\partial z}(\ldots) - \frac{\partial h}{\partial x}(\ldots), \frac{\partial g}{\partial x}(\ldots) - \frac{\partial f}{\partial y}(\ldots)\right).$$

Vektorové pole

$$\mathrm{rot}\, \boldsymbol{f}: (x, y, z) \mapsto \mathrm{rot}\, \boldsymbol{f}(x, y, z), \quad (x, y, z) \in G,$$

nazýváme *rotací vektorového pole* $\boldsymbol{f}$ *na oblasti G*.

12.160. Poznámka. Lze dokázat, že vektorové pole $\mathrm{rot}\, \boldsymbol{f}$ z def. 12.159 závisí pouze na vektorovém poli $\boldsymbol{f}$ a nikoliv na volbě kartézské soustavy souřadnic v $\mathbf{E}_3 \equiv \mathbf{R}^3$, ovšem s tou výhradou, že ve dvou souhlasně, resp. nesouhlasně orientovaných kartézských soustavách souřadnic vyjde $\mathrm{rot}\, \boldsymbol{f}$ stejně, resp. liší se orientací.

12.161. Stokesova věta. *Nechť (L) je orientovaná po částech hladká plocha, pro jejíž orientovaný kraj (∂L) platí, že ∂L je jediná po částech hladká křivka.*[31]*). Nechť $\boldsymbol{f} = (f, g, h)$ je vektorové pole, které je třídy C^1 na oblasti $G \subset \mathbf{R}^3$, přičemž $L \subset G$. Potom platí tzv. Stokesův vzorec:*

$$\int\limits_{(\partial L)} \boldsymbol{f}(x, y, z)\, \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \iint\limits_{(L)} \mathrm{rot}\, \boldsymbol{f}(x, y, z)\, \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}. \tag{12.161.1}$$

Důkaz je obtížný a nebudeme jej provádět. Dodejme pouze, že ze Stokesovy věty lze odvodit Greenovu větu. □

12.162. Příklad. Pomocí Stokesovy věty vypočtěme křivkový integrál druhého druhu

$$\int\limits_{(k)} (y - z)\, \mathrm{d}x + (z - x)\, \mathrm{d}y + (x - y)\, \mathrm{d}z, \tag{12.162.1}$$

kde (k) je orientovaný obvod trojúhelníka o vrcholech $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$, jehož orientace je dána uvedeným pořadím vrcholů.

Řešení. Zvolíme-li za (L) uzavřený trojúhelník s uvedenými vrcholy orientovaný pomocí normálových vektorů směřujících „nahoru" (viz příkl. 12.147 a obr. 98), je (k) jeho orientovaný kraj. Vypočteme-li podle def. 12.159 rotaci vektorového pole

$$\boldsymbol{f}(x, y, z) = (y - z, z - x, x - y),$$

vyjde pro každé $(x, y, z) \in L$, že

$$\mathrm{rot}\, \boldsymbol{f}(x, y, z) = (-2, -2, -2).$$

Podle vzorce (12.161.1) ze Stokesovy věty (všechny její předpoklady jsou zřejmě splněny; za G můžeme vzít libovolnou oblast v $\mathbf{R}^3$ obsahující uzavřený trojúhelník L) je integrál (12.162.1) roven plošnému integrálu druhého druhu

$$\iint\limits_{(L)} (-2, -2, -2)\, \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}.$$

Tento integrál vypočteme podobně jako integrál z příkl. 12.147. Vyjdeme-li opět z parametrických rovnic (12.147.2) orientovaného listu (L) a použijeme-li výsledek (12.147.3), můžeme na základě vzorce (12.146.1) psát, že

$$\iint\limits_{(L)} (-2, -2, -2)\, \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} = \iint\limits_{\Omega} (-2, -2, -2) \cdot (1, 1, 1)\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v = \int_0^1 \left[\int_0^{1-u} -6\, \mathrm{d}v\right] \mathrm{d}u = -3. \quad \square$$

12.163. Fyzikální interpretace. Interpretujme opět vektorové pole $\boldsymbol{f}$ jako rychlostní pole stacionárně proudící nestlačitelné kapaliny. Lze ukázat

[31]) Opět bychom mohli připustit, že ∂L se skládá z několika (konečně mnoha) po částech hladkých křivek. Na levé straně rovnosti (12.161.1) by ovšem v tom případě byly součty, resp. rozdíly křivkových integrálů druhého druhu podél těchto (orientovaných) křivek.

(zhruba řečeno), že rot $\boldsymbol{f}(x, y, z)$ je směrový vektor přímky, která prochází bodem (x, y, z) a kolem které se kapalina v „malém" okolí bodu (x, y, z) otáčí. Velikost vektoru rot $\boldsymbol{f}(x, y, z)$ vyjadřuje (v jistém smyslu) úhlovou rychlost tohoto otáčení. Podrobněji viz učebnice fyziky, případně hydromechaniky.

Cvičení k článku 12U

1. Pomocí Stokesovy věty vypočtěte křivkový integrál druhého druhu

$$\int_{(k)} y^2\,dx + z^2\,dy + x^2\,dz,$$

kde (k) je orientovaný obvod trojúhelníka o vrcholech $(3, 0, 0)$, $(0, 0, 3)$, $(0, 3, 0)$, jehož orientace je dána uvedeným pořadím vrcholů.

2. Pomocí Stokesovy věty vypočtěte křivkový integrál druhého druhu

$$\int_{(k)} -y\,dx + x\,dy + 0\,dz,$$

kde (k) je kladně orientovaná kružnice se středem v počátku a poloměrem jedna ležící v souřadnicové rovině Pxy. Za orientovanou plochu (L), pro niž platí $(\partial L) = (k)$ zvolte:

a) orientovaný uzavřený kruh;

b) orientovanou horní polovinu kulové plochy.

Výsledky cvičení:

1. 27.

2. 2π.

12V. NĚKTERÉ POJMY VEKTOROVÉ ANALÝZY

12.164. Vektorová analýza se zabývá, zhruba řečeno, diferenciálními a integrálními operátory. Jsou to jistá zobrazení, která nějakým funkcím („skalárním" nebo vektorovým) přiřazují pomocí operací derivování a integrování jiné funkce („skalární" nebo vektorové).

V tomto článku budeme pro jednoduchost uvažovat (skalární) funkce z $\mathbf{R}^3$ do $\mathbf{R}$ (a z $\mathbf{R}$ do $\mathbf{R}$) a vektorové funkce z $\mathbf{R}^3$ do $\mathbf{R}^3$ (a z $\mathbf{R}$ do $\mathbf{R}^3$). Pokud však naše úvahy budou mít smysl i pro obecné n, můžete si na místě prostoru $\mathbf{R}^3$ představit prostor $\mathbf{R}^n$. V zájmu přehlednosti zde budeme (skalární) funkce označovat malými písmeny (f, g apod.) a vektorové funkce velkými písmeny [$\boldsymbol{F} = (F_1, F_2, F_3)$, $\boldsymbol{G} = (G_1, G_2, G_3)$ apod.].

12.165. Základní diferenciální operátory prvního řádu. Jsou to gradient, divergence a rotace.

Gradient jsme definovali v kap. 9 (def. 9.54). Je to operátor, který (skalární) funkci f, jejímž definičním oborem je oblast $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ a která je na Ω třídy C^1, přiřazuje vektorovou funkci

$$\operatorname{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right).$$

Divergenci jsme definovali v def. 12.153. Je to operátor, který vektorové funkci $\boldsymbol{F} = (F_1, F_2, F_3)$, jejímž definičním oborem je oblast $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ a která je na Ω třídy C^1, přiřazuje (skalární) funkci

$$\operatorname{div} \boldsymbol{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}.$$

Rotaci jsme definovali v def. 12.159. Je to operátor, který vektorové funkci $\boldsymbol{F} = (F_1, F_2, F_3)$, jejímž definičním oborem je oblast $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ a která je na Ω třídy C^1, přiřazuje vektorovou funkci

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{F} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right).$$

Mnemotechnicky si tento vzorec snadno zapamatujeme pomocí formálního zápisu

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1, & \mathbf{e}_2, & \mathbf{e}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial x}, & \dfrac{\partial}{\partial y}, & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_1, & F_2, & F_3 \end{vmatrix}. \tag{12.165.1}$$

Rozvineme-li formálně uvedený determinant podle prvního řádku, bude koeficientem u vektoru $\mathbf{e}_1$ první souřadnicová funkce vektorové funkce rot $\boldsymbol{F}$ atd. Přitom ovšem součinem $\dfrac{\partial}{\partial y}$. F_3 rozumíme parciální derivaci $\dfrac{\partial F_3}{\partial y}$ apod.

Ve druhém řádku (formální) matice, jejíž determinant počítáme v (12.165.1), je formální vektor

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right).$$

Označujeme jej symbolem ∇ a nazýváme *nabla*. Samozřejmě, že užíváme tuto konvenci:

$$\nabla f = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = \operatorname{grad} f.$$

12.166. Přehled základních vzorců. Nechť f, g jsou funkce z $\mathbf{R}^3$ do $\mathbf{R}$ a $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{G}$ vektorové funkce z $\mathbf{R}^3$ do $\mathbf{R}^3$. Nechť $Df = Dg = D\boldsymbol{F} = D\boldsymbol{G} = \Omega \subset \mathbf{R}^3$, Ω je oblast, $f, g, \boldsymbol{F}, \boldsymbol{G}$ jsou na Ω třídy C^1. Nechť φ je funkce z $\mathbf{R}$ do $\mathbf{R}$ a $\boldsymbol{\Phi}$ vektorová funkce z $\mathbf{R}$ do $\mathbf{R}^3$. Nechť $D\varphi = D\boldsymbol{\Phi} = J \subset \mathbf{R}$, J je interval, $f(\Omega) \subset J$, φ, $\boldsymbol{\Phi}$ jsou na J třídy C^1. Nechť $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$. Potom platí:

$$\begin{aligned}
\operatorname{grad}(\alpha f + \beta g) &= \alpha \operatorname{grad} f + \beta \operatorname{grad} g,\\
\operatorname{div}(\alpha \boldsymbol{F} + \beta \boldsymbol{G}) &= \alpha \operatorname{div} \boldsymbol{F} + \beta \operatorname{div} \boldsymbol{G},\\
\operatorname{rot}(\alpha \boldsymbol{F} + \beta \boldsymbol{G}) &= \alpha \operatorname{rot} \boldsymbol{F} + \beta \operatorname{rot} \boldsymbol{G},\\
\operatorname{grad}(fg) &= f \operatorname{grad} g + g \operatorname{grad} f,\\
\operatorname{grad}(\varphi \circ f) &= (\varphi' \circ f) \operatorname{grad} f,\\
\operatorname{div}(f\boldsymbol{F}) &= f \operatorname{div} \boldsymbol{F} + \boldsymbol{F} \operatorname{grad} f,\\
\operatorname{div}(\boldsymbol{\Phi} \circ f) &= (\boldsymbol{\Phi}' \circ f) \operatorname{grad} f,
\end{aligned}$$

$$\operatorname{div}(\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{G} \, . \operatorname{rot} \mathbf{F} - \mathbf{F} \, . \operatorname{rot} \mathbf{G},$$
$$\operatorname{rot}(f\mathbf{F}) = f \operatorname{rot} \mathbf{F} + (\operatorname{grad} f \times \mathbf{F}),$$
$$\operatorname{rot}(\boldsymbol{\Phi} \circ f) = \operatorname{grad} f \times (\boldsymbol{\Phi}' \circ f).$$

Ty z uvedených operací, které jsme v předcházejícím textu nedefinovali (např. vektorový součin dvou vektorových funkcí z $\mathbf{R}^3$ do $\mathbf{R}^3$, resp. z $\mathbf{R}$ do $\mathbf{R}^3$), se definují přirozeným způsobem. V každém bodě (společného) definičního oboru obou funkcí „vcházejících" v takovou operaci se příslušná operace „aplikuje" na funkční hodnoty.

12.167. Diferenciální operátory druhého řádu. Diferenciální operátory prvního řádu (jakožto zobrazení) můžeme skládat (pokud ovšem příslušný složený operátor má smysl). Složíme-li dva diferenciální operátory prvního řádu, dostaneme tzv. *diferenciální operátor druhého řádu.*

Například operátor rot grad (přesně bychom měli psát rot ∘ grad, ale není to zvykem) přiřazuje (skalární) funkci f, jejímž definičním oborem je oblast $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ a která je na Ω třídy C^2, vektorovou funkci

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z \, \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \, \partial z}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \, \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \, \partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \, \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \, \partial y} \right) = (O, O, O),$$

kde O je funkce, která má ve všech bodech oblasti Ω hodnotu nula. Operátor rot grad je tedy „nulový".

Rozmyslete si sami smysl těchto dalších diferenciálních operátorů druhého řádu:

div grad, div rot, rot rot, grad div.

Důležitý je obzvlášť operátor div grad, pro který se používá označení Δ a který se nazývá *Laplaceův operátor*. Tento operátor přiřazuje (skalární) funkci f, jejímž definičním oborem je oblast $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ a která je na Ω třídy C^2, (skalární) funkci

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

Každá funkce f, která je řešením (operátorové) rovnice

$$\Delta f = O$$

(O je opět funkce, která má ve všech bodech oblasti Ω hodnotu nula), se nazývá *harmonická* na Ω. V kapitole 13 věnované komplexním funkcím komplexní proměnné uvidíme, že reálná i imaginární část tzv. holomorfní funkce komplexní proměnné jsou nutně harmonické funkce (ovšem z $\mathbf{R}^2$ do $\mathbf{R}$). S Laplaceovým operátorem (pro funkce z $\mathbf{R}^2$ do $\mathbf{R}$) jsme se již setkali v kap. 9 (heslo 9.131), kde jsme jej transformovali do polárních souřadnic.

Podobně jako o diferenciálních operátorech druhého řádu bychom mohli mluvit o diferenciálních operátorech vyšších řádů.

Cvičení k článku 12V

1. Dokažte, že operátor div rot je „nulový".

13. kapitola
Funkce komplexní proměnné

13A. ÚVODNÍ POZNÁMKY

V prvním dílu této knihy jsme studovali reálné funkce jedné reálné proměnné. Nyní přistupujeme ke studiu komplexních funkcí jedné komplexní proměnné (stručně funkcí komplexní proměnné).[1] Tato kapitola bude skromným uvedením do rozsáhlé problematiky, jíž jsou věnovány celé velmi obsáhlé knihy. O funkcích komplexní proměnné toho tedy řekneme poměrně málo, ale pokud možno přesně, abyste případně mohli pokračovat studiem další literatury. Důkazy většinou vynecháme, teorii však budeme vyvíjet v podstatě tak, že by bylo možné příslušné důkazy doplnit a logická výstavba by přitom zůstala zachována.

Základy teorie funkcí komplexní proměnné vybudoval v polovině 18. století L. Euler (1707 – 1783) a její další klasický rozvoj se váže ke jménům A. L. Cauchy (1789 – 1857), K. Weierstrass (1815 – 1897) a zvláště G. F. B. Riemann (1826 – 1866). O tom však podrobněji v historických poznámkách.

V některých úvahách vykazují funkce komplexní proměnné značnou podobnost s funkcemi reálné proměnné. Například pojmy spojitosti, limity a derivace funkcí a pojmy konvergence a divergence posloupností a řad (číselných i funkčních, speciálně mocninných) se v obou případech zavádí formálně úplně stejně a mají řadu shodných vlastností. Na druhé straně však mnohé pojmy u funkcí komplexní proměnné mají některé nové překvapující vlastnosti a hrají v celé teorii úplně jinou roli než obdobné pojmy u funkcí reálné proměnné. Například uvidíme, že exponenciální funkce $w = e^z$ je v komplexním případě periodická, že z diferencovatelnosti funkce komplexní proměnné na (komplexní) oblasti vyplývá, že tato funkce má na zmíněné oblasti všechny derivace, apod.

Řekli jsme, že na půdu funkcí komplexní proměnné vstoupíme skromně. Zavedeme pojem funkce komplexní proměnné, její spojitosti, limity, derivace a integrálu. V celé teorii nebývá zvykem studovat všechny funkce komplexní proměnné, nýbrž pouze ty, které jsou na nějaké (komplexní) oblasti diferencovatelné, čili pouze tzv. *holomorfní funkce.* Pomocí nekonečných mocninných řad zavedeme řadu konkrétních (holomorfních) tzv. elementárních funkcí, které jsou analogií (základních) elementárních (reálných) funkcí jedné reálné proměnné. Studium dalších elementárních funkcí nás pak přivede k tzv. *analytickým mnoho-*

[1]) O tzv. komplexních funkcích více komplexních proměnných nebudeme v této knize hovořit vůbec.