

12 III KŘIVKOVÝ INTEGRÁL

V této části kapitoly se budeme zabývat tzv. křivkovými integrály prvního a druhého druhu v prostorech \mathbf{R}^2 a \mathbf{R}^3 . Problematika těchto integrálů vznikla z potřeb fyziky. Křivkový integrál prvního druhu je vlastně zobecněním pojmu jednorozměrného Riemannova integrálu. Pomocí něj vypočteme hmotnost hmotné křivky, známe-li její (délkovou) hustotu. Křivkový integrál druhého druhu zavedeme rovněž pomocí jednorozměrného Riemannova integrálu. Můžeme jim počítat práci daného silového pole podél orientované křivky.

Teorie křivkových integrálů studovaná ve vší obecnosti není jednoduchá. My si zjednodušíme situaci tím, že podrobně probereme pouze případ, kdy daná (orientovaná) křivka je tzv. (orientovaný) hladký oblouk, a další možnosti jenom naznačíme.

12N. KŘIVKOVÝ INTEGRÁL PRVNÍHO DRUHU

12.75. Nejdříve zavedeme křivku, podél které budeme integrovat. Touto křivkou bude zpočátku (v podstatě) regulární křivka třídy C^1 z kap. 11 (viz def. 11.10 a heslo 11.15), u níž však budeme oproti kap. 11 uvažovat také krajní body [nebo chcete-li, jednoduší hladká křivka z kap. 5 (viz heslo 5.125)]. Takovou křivku budeme nazývat hladkým obloukem. Přesná definice hladkého oblouku v \mathbf{R}^2 (v \mathbf{R}^n by byla situace podobná) je tato:

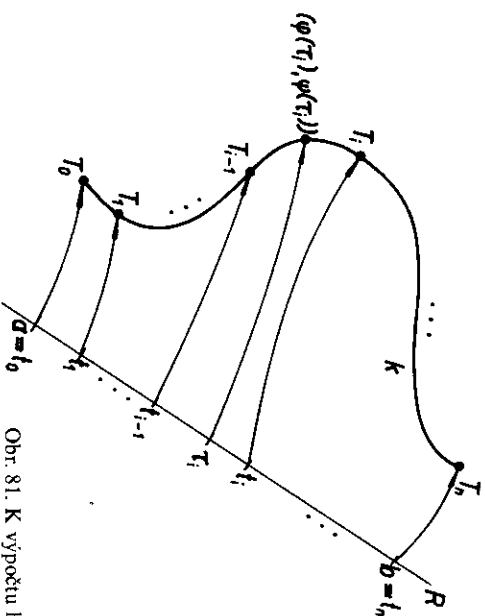
12.76. Definice. Necht $\mathbf{g} = (\varphi, \psi)$ je vektorová funkce z \mathbf{R} do \mathbf{R}^2 , jejímž definičním oborem je uzavřený interval $\langle a, b \rangle$. Předpokládejme, že vektorová funkce \mathbf{g} je na intervalu $\langle a, b \rangle$ prostá, třídy C^1 a že pro každé $t \in \langle a, b \rangle$ je $\mathbf{g}'(t) \neq \mathbf{0}$.²⁰⁾ Potom množinu $k = \mathbf{g}(\langle a, b \rangle) \subset \mathbf{R}^2$ nazýváme *hladkým obloukem (stručně obloukem)* v \mathbf{R}^2 a body $\mathbf{g}(a)$, $\mathbf{g}(b)$ jeho *krajními body*.

Rovnice

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad t \in \langle a, b \rangle, \quad (12.76.1)$$

jsou *parametrické rovnice* hladkého oblouku k .

²⁰⁾ Podobně jako v hesle 5.125 by stažilo, kdybychom požadovali, aby $\mathbf{g}'(t) \neq \mathbf{0}$ pro $t \in (a, b)$. Vedlo by to však ke komplikacím při transformaci parametru.



Obr. 81. K výpočtu hmotnosti hladkého oblouku k

12.77. Motivace. Necht k je hladký oblouk v \mathbf{R}^2 popsaný parametrickými rovnicemi (12.76.1). Mysleme si, že na oblouku k je spojitě rozložená hmota, jejíž rozložení je charakterizováno (délkovou) hustotou, tj. nezápornou spojitou funkcí h (dvou proměnných x, y) definovanou na množině k .²¹⁾ Při výpočtu hmotnosti oblouku k bychom mohli postupovat takto:

Nechť

$$D = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$$

je nějaké dělení intervalu $\langle a, b \rangle$ a necht pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ je $t_i \in (t_{i-1}, t_i)$. Označme $T_i = (\varphi(t_i), \psi(t_i))$, viz obr. 81. Hmotnost oblouku k aproximujeme tzv. integrálním součtem funkce h na oblouku k příslušným dělení D a dané volbě bodů t_i :

$$S(h, D) = \sum_{i=1}^n h(\varphi(t_i), \psi(t_i)) s(T_{i-1}, T_i), \quad (12.77.1)$$

kde $s(T_{i-1}, T_i)$ je délka oblouku k mezi body T_{i-1}, T_i , anebo raději přímo vzdálenost bodů T_{i-1}, T_i . Analogicky jako v kap. 6 u vzorce pro výpočet délky parametrické křivky (viz heslo 6.129) bychom dospěli k závěru, že každá normální posloupnost (normy příslušných dělení konvergují k nule) integrálních součtů (12.77.1) má za limitu jednorozměrný Riemannův integrál

$$\int_a^b h(\varphi(t), \psi(t)) \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt. \quad (12.77.2)$$

²¹⁾ Délkovou hustotu bychom mohli zavést podobně jako plošnou, resp. objemovou hustotu u dvojnásobného, resp. trojnásobného integrálu. Mohli bychom ji např. (zhruba řečeno) definovat takto:

$$h(x, y) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} m(k_\epsilon) / s(k_\epsilon)$$

kde $k_1 \supset k_2 \supset \dots \supset k_i \supset \dots$ je posloupnost oblouků „stahujících se“ k bodu $(x, y) \in k$ a kde $m(k_\epsilon)$, resp. $s(k_\epsilon)$ je hmotnost, resp. délka oblouku k_ϵ .

Přitom z konstrukce integrálních součtů (12.77.1) je intuitivně jasné, že limity zmíněných normálních posloupností jsou rovny hmotnosti oblouku k . Integrál (12.77.2) tedy vyjadřuje tuto hmotnost.²²⁾

Tyto úvahy nás vedou k následující definici, v níž ovšem upustíme od předpokladu nezápornosti uvažované funkce.

12.78. Definice. Necht' k je hladký oblouk v \mathbf{R}^2 popsany parametrickými rovnicemi (12.76.1) a necht' f je spojitá funkce (dvou proměnných x, y) definovaná na množině k . Potom integrál

$$\int_a^b f(\varphi(t), \psi(t)) \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt \quad (12.78.1)$$

nazýváme *krivkovým integrálem prvního druhu funkce f podél oblouku k* a označujeme jej symbolem

$$\int_k f(x, y) ds.$$

Píšeme tedy

$$\int_k f(x, y) ds = \int_a^b f(\varphi(t), \psi(t)) \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt. \quad (12.78.2)$$

12.79. Poznámky.

12.79.1. Krivkový integrál v def. 12.78 vždy existuje, neboť z předpokladů této definice vyplývá, že integrovaná funkce v (12.78.1) je spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$.

12.79.2. Krivkový integrál (12.78.2) závisí pouze na funkci f a na hladkém oblouku k , nikoliv na parametrizaci tohoto oblouku. O tom bychom se snadno přesvědčili, kdybychom na oblouku k provedli regulární transformaci parametru třídy C^1 (viz kap. 11, hesla 11.16 a 11.19.1).

12.79.3. Pro krivkový integrál prvního druhu (12.78.2) se používají různá stručná označení, jako např.

$$\int_k f(x) ds, \quad \int_k f ds, \quad \int_k f \quad \text{apod.}$$

12.79.4. Zapišeme-li hladký oblouk k pomocí parametrických rovnic

$$x = \eta(s), \quad y = \zeta(s), \quad s \in \langle s_1, s_2 \rangle,$$

v nichž parametr s je obloukem (viz čl. 11F v kap. 11), má vzorec (12.78.2) tento jednoduchý tvar:

$$\int_k f(x, y) ds = \int_{s_1}^{s_2} f(\eta(s), \zeta(s)) ds.$$

12.79.5. Vlastnosti krivkového integrálu prvního druhu podél hladkého oblouku vyplývají prostřednictvím jeho definice z vlastností jednorozměrného

²²⁾ V matematice 18. století byl tento výsledek „samozřejmostí“. Délka „nekonečně malého“ dílku (krivky k) $\sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt$ vynásobená hustotou $h(\varphi(t), \psi(t))$ dává hmotnost tohoto dílku, atd.

Riemannova integrálu. Zdůrazněme alespoň jeho linearitu a aditivitu, které jsou vyjádřeny vzorci

$$\int_k (\alpha f(x, y) + \beta g(x, y)) ds = \alpha \int_k f(x, y) ds + \beta \int_k g(x, y) ds, \\ \int_k f(x, y) ds = \int_{k_1} f(x, y) ds + \int_{k_2} f(x, y) ds,$$

v nichž f, g jsou spojitě funkce definované na oblouku k , $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ a k_1, k_2 dva hladké oblouky takové, že $k_1 \subset k, k_2 \subset k, k = k_1 \cup k_2$, přičemž k_1, k_2 mají společný pouze jeden krajní bod.

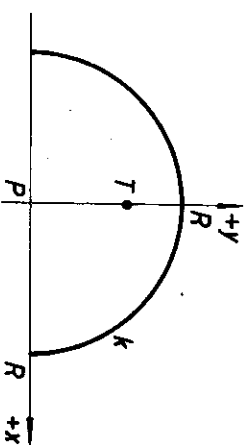
12.80. Příklad. Vypočteme krivkový integrál prvního druhu

$$\int_k y ds, \quad (12.80.1)$$

kde k je půlkružnice v \mathbf{R}^2 daná parametrickými rovnicemi

$$x = R \cos t, \quad y = R \sin t, \quad t \in \langle 0, \pi \rangle, \quad (12.80.2)$$

kde $R > 0$ (viz obr. 82).



Obr. 82. K příkladům 12.80 a 12.92

Řešení. Zřejmě k je hladký oblouk a funkce $(x, y) \mapsto y$ je na k spojitá. Integrál (12.80.1) vypočteme podle vzorce (12.78.2):

$$\int_k y ds = \int_0^\pi R \sin t \sqrt{[-R \sin t]^2 + (R \cos t)^2} dt = \int_0^\pi R^2 \sin t dt = 2R^2. \quad \square$$

12.81. Poznámka. Dříve než rozšíříme krivkový integrál prvního druhu z hladkého oblouku na obecnější křivku, zavedeme v následujících dvou heslech několik pojmů týkajících se křivek. Cílem těchto dvou hesel je definovat přesně pojem po částech hladké křivky (jak její budeme používat v této kapitole), podél které budeme v dalším textu integrovat.

12.82. Orientace hladkého oblouku. Uvažujme hladký oblouk k z def. 12.76. Množinu $\partial k = \{g(a), g(b)\}$ nazýváme *krajem oblouku k* . Prohlásíme-li jeden z krajních bodů oblouku k za *počáteční* a druhý za *koncový*, řekneme, že jsme oblouk k *orientovali*. *Orientovaný oblouk k* budeme označovat např. (k) .

Nechť tedy např. $g(a)$, resp. $g(b)$ je počáteční, resp. koncový bod orientovaného oblouku (k) . V tom případě píšeme $g(a) = p(k)$, $g(b) = k(k)$. Uspořádanou dvojici $(\partial k) = (g(a), g(b))$ pak nazveme *orientovaným krajem orientovaného oblouku (k)* .

V uvažovaném případě říkáme, že orientace (orientovaného) oblouku (k) souhlasí s jeho parametrizací \mathbf{g} určenou rovnicemi (12.76.1), nebo, že (12.76.1) jsou parametrické rovnice orientovaného oblouku (k) . Tutež orientaci oblouku k určují právě všechny jeho parametrizace, které jsou s parametrizací \mathbf{g} souhlasné.

Vycházíme stále z označení z předcházejícího odstavce. Kdybychom oblouk k orientovali tak, že bychom za jeho počátek, resp. koncový bod prohlásili bod $\mathbf{g}(b)$, resp. $\mathbf{g}(a)$, obdrželi bychom orientovaný oblouk, který označujeme $(-k)$. Orientovaný kraj $(\mathbf{g}(b))$, $(\mathbf{g}(a))$ orientovaného oblouku $(-k)$ označujeme $(-\partial k)$.

12.83. Definice. Množinu $k \subset \mathbf{R}^2$ nazveme po částech hladkou křivkou (stručně křivkou), jestliže existuje konečná posloupnost hladkých oblouků

$$(k_1, k_2, \dots, k_m) \quad (12.83.1)$$

v \mathbf{R}^2 taková, že platí:

1. Každé dva oblouky k_i, k_j , kde $i \neq j$, mají společně nejvýše krajní body.

2. Jednotlivé oblouky k_i lze orientovat tak, že

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, m-1\}: kb(k_i) = pb(k_{i+1}).$$

$$3. k = \bigcup_{i=1}^m k_i.$$

Jestliže $kb(k_m) = pb(k_1)$, pak říkáme, že k je uzavřená křivka. Jestliže každý bod prostoru \mathbf{R}^2 je krajním bodem nejvýše dvou oblouků k_i , nazýváme k jednoduchou (tj. „neprotínající se“) křivkou

12.84. Poznámka. V obr. 83 jsou znázorněny: a) křivka (rozumí se zde i v dalším „po částech hladká“), b) křivka, c) uzavřená křivka, d) jednoduchá křivka, e) jednoduchá uzavřená křivka. Množiny v obrázcích f), g), h) nejsou křivky.

12.85. Definice. Necht k je po částech hladká křivka v \mathbf{R}^2 a f spojitá funkce (dvou proměnných x, y) definovaná na množině k . Necht (12.83.1) je rozklad křivky k na hladké oblouky (mající vlastnosti z def. 12.83). Potom křivkový integrál prvního druhu funkce f podél křivky k definujeme předpisem

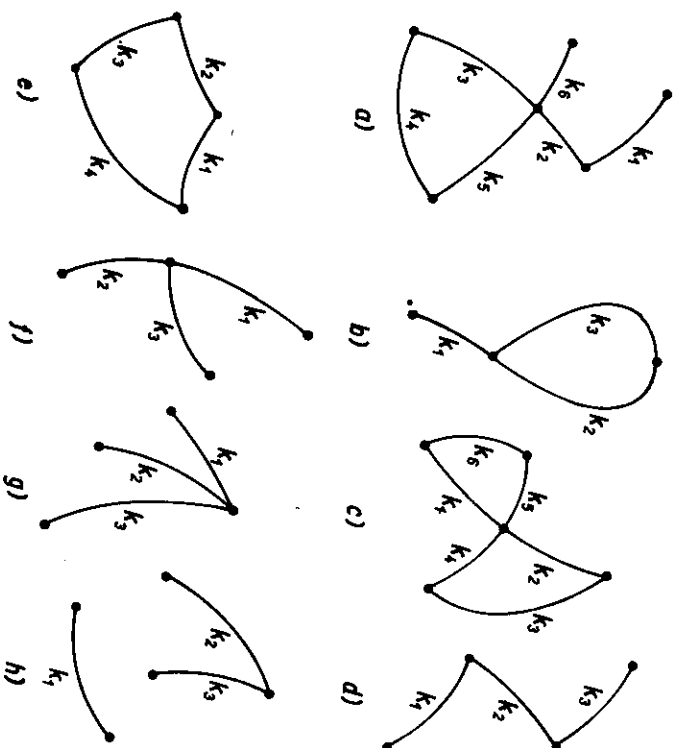
$$\int_k f(x, y) ds = \sum_{i=1}^m \int_{k_i} f(x, y) ds. \quad (12.85.1)$$

12.86. Poznámky.

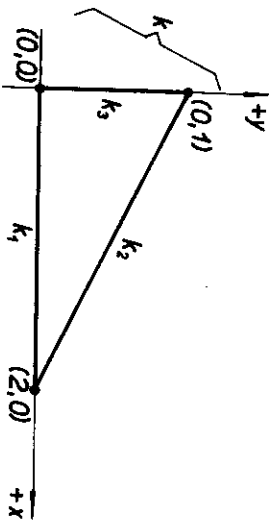
12.86.1. Integrál (12.85.1) nezávisí na rozkladu křivky k na hladké oblouky (od dvou rozkladů lze přejít k jejich společnému „zjemnění“, atd.).

12.86.2. Pro křivkový integrál prvního druhu podél po částech hladké křivky platí obdoba pozn. 12.79.5.

12.86.3. Kružnice, elipsa, nebo třeba tzv. Bernoulliova lemniskáta (viz kap. 11, heslo 11.54; má tvar číslce osm) nejsou hladké oblouky, jsou to však po částech hladké křivky. Známe-li vyjádření takové křivky pomocí parametrických rovnic tvaru (12.76.1), přičemž oproti def. 12.76 nezádáme, aby příslušná vektorová funkce byla prostá, vypočteme křivkový integrál prvního druhu podél této křivky opět pomocí vzorce (12.78.2). To plyne z aditivivity jedno rozměrného Riemannova integrálu.



Obr. 83. K definici po částech hladké křivky



Obr. 84. K příkladu 12.87

12.87. Příklad. Vypočteme křivkový integrál prvního druhu

$$\int_k (2x - y^2 + 1) ds, \quad (12.87.1)$$

kde k je obvod trojúhelníka v \mathbf{R}^2 s vrcholy $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(0, 1)$.
Řešení. Po částech hladkou křivku k rozložíme (ve smyslu def. 12.83) na hladké oblouky (strany trojúhelníka k) k_1, k_2, k_3 jako v obr. 84 a ve shodě s (12.85.1) píšme

$$\int_k (2x - y^2 + 1) ds = \int_{k_1} (2x - y^2 + 1) ds + \int_{k_2} (2x - y^2 + 1) ds + \int_{k_3} (2x - y^2 + 1) ds. \quad (12.87.2)$$

Úsečku k_1 můžeme popsat např. pomocí parametrických rovnic

$$x = t, \quad y = 0, \quad t \in \langle 0, 2 \rangle,$$

a podle (12.78.2) vypočítat, že

$$\int_{k_1} (2x - y^2 + 1) ds = \int_0^2 (2t - 0^2 + 1) \sqrt{(1^2 + 0^2)} dt = \int_0^2 (2t + 1) dt = 6.$$

Podobným způsobem vypočítete sami, že druhý, resp. třetí integrál na pravé straně rovnosti (12.87.2) je roven číslu $\frac{8}{3}\sqrt{5}$, resp. $\frac{4}{3}$. Přitom parametrické rovnice úsečky k_2 , resp. k_3 pište např. ve tvaru

$$x = t, \quad y = -\frac{1}{2}t + 1, \quad t \in \langle 0, 2 \rangle,$$

resp.

$$x = 0, \quad y = t, \quad t \in \langle 0, 1 \rangle.$$

Dosaďme-li vypočtené výsledky do (12.87.2), dostaneme:

$$\int (2x - y^2 + 1) ds = 6 + \frac{8}{3}\sqrt{5} + \frac{4}{3} = \frac{4}{3}(5 + 2\sqrt{5}). \quad \square$$

12.88. Příklad. Vypočítáme křivkový integrál prvního druhu

$$\int_k \sqrt{(16x^2 + y^2)} ds, \quad (12.88.1)$$

kde k je elipsa popsaná parametrickými rovnicemi

$$x = \cos t, \quad y = 2 \sin t, \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$

Řešení. Podle pozn. 12.86.3 můžeme integrál (12.88.1) vypočítat pomocí vzorce (12.78.2):

$$\begin{aligned} \int_k \sqrt{(16x^2 + y^2)} ds &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(16 \cos^2 t + 4 \sin^2 t)} \sqrt{(\sin^2 t + 4 \cos^2 t)} dt = \\ &= \int_0^{2\pi} 2(\sin^2 t + 4 \cos^2 t) dt = 2 \int_0^{2\pi} \left(1 + 3 \frac{1 + \cos 2t}{2}\right) dt = \\ &= 2 \left[t + \frac{3}{2} \left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right) \right]_0^{2\pi} = 10\pi. \quad \square \end{aligned}$$

12.89. Délka rovinné křivky. Nechť k je po částech hladká křivka v \mathbf{R}^2 . Ze způsobu, jakým jsme definovali křivkový integrál prvního druhu, je jasné, že délku s křivky k vypočítáme (nebo, chcete-li, definojeme) pomocí vzorce

$$s = \int_k 1 ds. \quad (12.89.1)$$

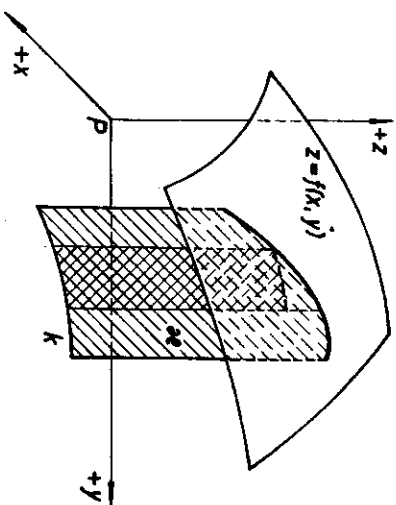
12.90. Obsah pláště válcové plochy. Nechť k je po částech hladká křivka v \mathbf{R}^2 a f spojitá nezáporná funkce definovaná na k . Uvažujme válcovou plochu

$$\kappa = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : (x, y) \in k \wedge 0 \leq z \leq f(x, y)\}$$

v \mathbf{R}^3 , viz obr. 85. Obsah σ plochy κ se vypočte pomocí vzorce

$$\sigma = \int_k f(x, y) ds. \quad (12.90.1)$$

(Tento vzorec bychom dokázali, kdybychom nad „nekonečně malými“ podobloutky křivky k plochu κ nahradili „zprohýbanými obdélníky“, viz obr. 85, atd.)



Obr. 85. Ke vzorci pro výpočet obsahu pláště válcové plochy

12.91. Fyzikální aplikace křivkového integrálu prvního druhu v \mathbf{R}^2 . Nechť k je po částech hladká hmotná křivka v \mathbf{R}^2 , jejíž (délková) hustota je popsána spojitou nezápornou funkcí h definovanou na k . Z hesel 12.77, 12.78 a 12.85 vyplývá, že hmotnost $m(k)$ křivky k je dána vzorcem

$$m(k) = \int_k h(x, y) ds. \quad (12.91.1)$$

Pro výpočet statických momentů S_x, S_y vzhledem k souřadnicovým osám, těžiště $T = (x_T, y_T)$ a momentů setrvačnosti I_x, I_y vzhledem k souřadnicovým osám hmotné křivky k (definovaných na základě hustoty podobně jako u hmotné tenké desky) platí tyto vzorce:

$$S_x = \int_k y h(x, y) ds, \quad (12.91.2)$$

$$S_y = \int_k x h(x, y) ds, \quad (12.91.3)$$

$$T = \left(\frac{S_y}{m(k)}, \frac{S_x}{m(k)} \right), \quad (12.91.4)$$

$$I_x = \int_k y^2 h(x, y) ds, \quad (12.91.5)$$

$$I_y = \int_k x^2 h(x, y) ds. \quad (12.91.6)$$

Všimněte si analogie uvedených vzorců s odpovídajícími vzorci pro hmotnou tenkou desku (jejich důkazy by byly velmi podobné).

12.92. Příklad. Určeme souřadnice těžiště homogenní hmotné půlkružnice k dané parametrickými rovnicemi (12.80.2), viz obr. 82.

Řešení. Ze souměrnosti homogenní půlkružnice k podle osy y vyplývá, že její těžiště $T = (x_T, y_T)$ leží na ose y , tj. $x_T = 0$. Předpokládejme, že hustota

půlkružnice k je dána konstantní funkcí $h(x, y) = c$, kde $c \in \mathbf{R}$, $c > 0$. Pomocí vzorce (12.91.2) s využitím výsledku příkl. 12.80 vypočteme:

$$S_x = \int_k y c \, ds = 2cR^2.$$

Hmotnost $m(k)$ je rovna c -násobku délky půlkružnice k , tj. číslu $c\pi R$. Tedy

$$T = (0, S_x/m(k)) = (0, 2cR^2/(c\pi R)) = (0, 2R/\pi). \quad \square$$

12.93. Křivkový integrál prvního druhu v \mathbf{R}^3 . Téměř doslova bychom mohli opsat hesla 12.75 až 12.89 s tím, že bychom všude přidali jednu nezávisle proměnnou z , a sepsat tak teorii křivkového integrálu prvního druhu v \mathbf{R}^3 (příklady bychom samozřejmě nahradili jinými).²³⁾ Nebudeme to však dělat. Konstatujeme pouze naprosto stručně, že parametrické rovnice hladkého oblouku $k \subset \mathbf{R}^3$ bychom nyní psali ve tvaru

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \xi(t), \quad t \in \langle a, b \rangle,$$

a že křivkový integrál prvního druhu funkce f podél oblouku k bychom definovali a počítali pomocí vzorce

$$\int_k f(x, y, z) \, ds = \int_a^b f(\varphi(t), \psi(t), \xi(t)) \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 + [\xi'(t)]^2} \, dt.$$

Hladký oblouk $k \subset \mathbf{R}^3$ bychom pak zobecnili na po částech hladkou křivku v \mathbf{R}^3 , atd.

12.94. Fyzikální aplikace křivkového integrálu prvního druhu v \mathbf{R}^3 . Nechť k je po částech hladká hmotná křivka v \mathbf{R}^3 , jejíž (détková) hustota je popsána spojitou nezápornou funkcí h definovanou na k . Potom hmotnost $m(k)$ křivky k je dána vzorcem

$$m(k) = \int_k h(x, y, z) \, ds. \quad (12.94.1)$$

Pro výpočet statických momentů S_{yz} , S_{xz} , S_{xy} vzhledem k souřadnicovým rovinám, těžiště $T = (x_T, y_T, z_T)$ a momentů setrvačnosti I_x , I_y , I_z vzhledem k souřadnicovým osám hmotné křivky k platí tyto vzorce:

$$S_{yz} = \int_k xh(x, y, z) \, ds, \quad (12.94.2)$$

$$S_{xz} = \int_k yh(x, y, z) \, ds, \quad (12.94.3)$$

$$S_{xy} = \int_k zh(x, y, z) \, ds, \quad (12.94.4)$$

$$T = \left(\frac{S_{yz}}{m(k)}, \frac{S_{xz}}{m(k)}, \frac{S_{xy}}{m(k)} \right), \quad (12.94.5)$$

$$I_x = \int_k (y^2 + z^2) h(x, y, z) \, ds, \quad (12.94.6)$$

²³⁾ Podobně bychom mohli postupovat i v prostoru \mathbf{R}^n .

$$I_y = \int_k (z^2 + x^2) h(x, y, z) \, ds, \quad (12.94.7)$$

$$I_z = \int_k (x^2 + y^2) h(x, y, z) \, ds. \quad (12.94.8)$$

Všimněte si analogie uvedených vzorců s odpovídajícími vzorci pro hmotné těleso.

Cvičení k článku 12N

1. Vypočítejte křivkové integrály prvního druhu v \mathbf{R}^2 :

a) $\int_k y^2 \, ds$, kde k je křivka daná parametrickými rovnicemi

$$x = 2(1 - \sin t), \quad y = 2(1 - \cos t), \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle$$

[Ú: k je část (jedna „oblouk“) tzv. cykloidy].

b) $\int_k x^2 y \, ds$, kde k je obvod kruhové výšece ohraničené kružnicí $x^2 + y^2 = R^2$,

kladnou částí osy x a polopřímkou $y = x$, $x \geq 0$ ($R > 0$).

2. Určete délku křivky k ze cvič. 1a.

3. Dokažte, že ze vzorce (12.89.1) vyplývají vzorce (6.129.5) a (6.132.1) pro výpočet délky rovinné křivky pomocí jednorozměrného Riemannova integrálu.

4. Vypočítejte obsah válcové plochy

$$x = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : y^2 = 2x \wedge 0 \leq z \leq \sqrt{(2x - 4x^2)}\}.$$

5. Určete souřadnice těžiště T křivky k ze cvič. 1a za předpokladu, že křivka k je homogenní.

6. Vypočítejte moment setrvačnosti homogenní kružnice o poloměru R s jednotkovou délkovou hustotou vzhledem k přímce určené jejím průměrem.

7. Vypočítejte křivkový integrál prvního druhu v \mathbf{R}^3

$$\int_k \frac{z^2}{x^2 + y^2} \, ds,$$

kde k je křivka daná parametrickými rovnicemi

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = t, \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle$$

[Ú: k je část (jedna závit) tzv. šroubovice].

8. Určete délku křivky k ze cvič. 7.

9. Vypočítejte hmotnost hmotné křivky k popsané parametrickými rovnicemi

$$x = t \cos t, \quad y = t \sin t, \quad z = t, \quad t \in \langle 0, \sqrt{2} \rangle,$$

jestliže její hustota je popsána funkcí $h(x, y, z) = z$.

10. Určete souřadnice těžiště T obvodu homogenního sférického trojúhelníka

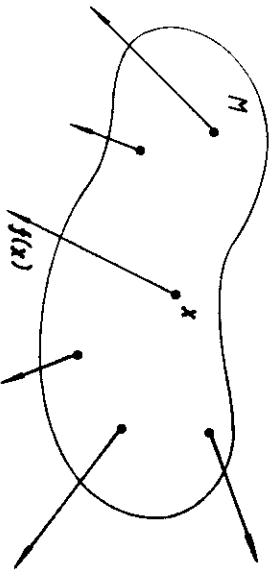
$$\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge z \geq 0\}.$$

Výsledky cvičení:

1. a) $2048/15$; b) $R^4(16 - \sqrt{2})/48$.
2. 16.
3. -1 .
5. $I = (2\pi, 8/3)$.
6. πR^3 .
7. $8\pi^3 \sqrt{2/3}$.
8. $2\sqrt{2}\pi$.
9. $(8 - 2\sqrt{2})/3$.
10. $T = \left(\frac{4d}{3\pi}, \frac{4d}{3\pi}, \frac{4d}{3\pi} \right)$.

120. KŘIVKOVÝ INTEGRÁL DRUHÉHO DRUHU

12.95. Vektorové pole. Necht $M \subset \mathbb{R}^n$ a necht $f: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ je vektorová funkce. Tuto vektorovou funkci f někdy (zvláště v souvislosti s nějakou situací z aplikací matematiky, např. z fyziky) nazýváme *vektorovým polem na množině M*. Vektorové pole f názorně zobrazujeme tak, že do každého bodu $x \in M$ umístíme vektor $f(x)$, viz obr. 86. Vektorovým polem je např. rychlostní pole proudění kapaliny nebo plynu, pole gravitačních sil, pole elektrických sil, pole tepelného proudění apod. Je-li vektorové pole proměnné s časem, hovoříme o nestacionárním vektorovém poli. My budeme uvažovat pouze tzv. *stacionární (ustálená) vektorová pole* nezávislá na čase.

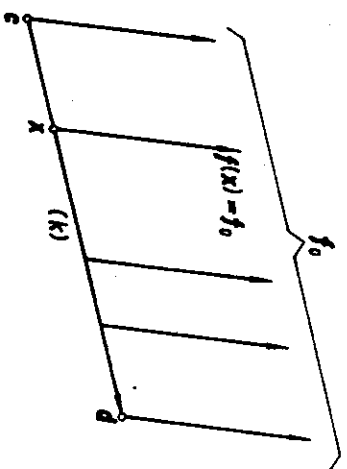


Obr. 86. Vektorové pole na množině $M \subset \mathbb{R}^n$

12.96. Práce konstantního vektorového pole podél orientované úsečky. Necht (k) je orientovaná úsečka v \mathbb{R}^2 s počátečním bodem c a koncovým bodem d . Necht na množině k je definováno konstantní vektorové pole $f(x) = f_0$, kde $f_0 \in \mathbb{R}^2$ je konstantní vektor. Z fyziky víme, že práce L vektorového pole f (interpretovaného jako sílové pole) podél orientované úsečky (k) (viz obr. 87) je dána vzorcem

$$L = f_0 \cdot (d - c). \quad (12.96.1)$$

V dalších heslech ukážeme, jak lze tento vzorec zobecnit pro orientovaný hladký oblouk v \mathbb{R}^2 a libovolně spojitě vektorové pole.



Obr. 87. Ke vzorci (12.96.1)

12.97. Motivace. Necht (k) je orientovaný hladký oblouk v \mathbb{R}^2 , jehož parametrické rovnice jsou

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad t \in \langle a, b \rangle. \quad (12.97.1)$$

Na oblouku k necht je definováno spojitě vektorové pole $f = (f, \theta)$.

Vyděme z označení z hesla 12.77, viz obr. 81. Orientovaný podoblouk orientovaného oblouku (k) mezi body T_{i-1}, T_i nahradíme orientovanou úsečkou $\overline{T_{i-1}T_i}$ a vektorové pole f na tomto podoblouku čili na této orientované úsečce nahradíme konstantním vektorovým polem $x \mapsto f(\varphi(\tau_i), \psi(\tau_i))$. Ve shodě s tím a s heslem 12.96 aproximujeme práci vektorového pole f podél orientovaného oblouku (k) součtem

$$\sum_{i=1}^n f(\varphi(\tau_i), \psi(\tau_i)) \cdot (T_i - T_{i-1}).$$

Kdybychom vektor $T_i - T_{i-1}$ dále aproximovali vektorem $(\varphi'(\tau_i), \psi'(\tau_i))(t_i - t_{i-1})$, obdrželi bychom součet

$$\sum_{i=1}^n f(\varphi(\tau_i), \psi(\tau_i)) \cdot (\varphi'(\tau_i), \psi'(\tau_i))(t_i - t_{i-1}), \quad (12.97.2)$$

což je integrální součet funkce $\{[f \circ (\varphi, \psi)] \cdot (\varphi', \psi')\}$

[čili funkce $t \mapsto f(\varphi(t), \psi(t)) \varphi'(t) + g(\varphi(t), \psi(t)) \psi'(t)$] na intervalu $\langle a, b \rangle$ při dělení D a příslušné volbě bodů τ_i . Každá normální posloupnost těchto integrálních součtů (normy příslušných dělení konvergují k nule) konverguje podle věty 6.80 k Riemannovu integrálu

$$\int_a^b f(\varphi(t), \psi(t)) \cdot (\varphi'(t), \psi'(t)) dt$$

čili

$$\int_a^b [f(\varphi(t), \psi(t)) \varphi'(t) + g(\varphi(t), \psi(t)) \psi'(t)] dt. \quad (12.97.3)$$

Přitom z konstrukce integrálních součtů (12.97.2) je intuitivně jasné, že limity zmíněných normálních posloupností jsou rovny práci vektorového pole \mathbf{f} podél orientovaného hladkého oblouku (k) .²⁴⁾

Tyto úvahy nás vedou k následující definici.

12.98. Definice. Necht (k) je orientovaný hladký oblouk v \mathbf{R}^2 popsaný parametrickými rovnicemi (12.97.1) a necht $\mathbf{f} = (f, g)$ je spojitě vektorové pole definované na množině k . Potom integrál (12.97.3) nazýváme *krivkovým integrálem druhého druhu vektorového pole \mathbf{f} podél orientovaného oblouku (k)* a označujeme jej symbolem $\int_{(k)} f(x, y) dx + g(x, y) dy$ nebo stručně $\int_{(k)} \mathbf{f}(x, y) ds$. Pišeme tedy např.

$$\int_{(k)} f(x, y) dx + g(x, y) dy = \int_a^b [f(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + g(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t)] dt. \quad (12.98.1)$$

12.99. Poznámky.

12.99.1. Krivkový integrál v def. 12.98 vždy existuje, neboť z předpokladů této definice vyplývá, že integrovaná funkce v (12.97.3) je spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$.

12.99.2. Krivkový integrál (12.98.1) závisí pouze na vektorové funkci \mathbf{f} a na orientovaném hladkém oblouku (k) , nikoliv na parametrizaci (soulasné) tohoto orientovaného oblouku. O tom bychom se snadno přesvědčili, kdybychom na oblouku k provedli souhlasnou (viz pozn. 11.19.2) regulární transformaci parametru třídy C^1 .

Podobně bychom ukázali, že

$$\int_{(-k)} \mathbf{f}(x, y) ds = - \int_{(k)} \mathbf{f}(x, y) ds. \quad (12.99.1)$$

12.99.3. Pro krivkový integrál druhého druhu (12.98.1) se používají různá stručná označení, jako např.

$$\int_{(k)} \mathbf{f}(x) ds, \quad \int_{(k)} f dx + g dy, \quad \int_{(k)} \mathbf{f} ds, \quad \int_{(k)} \mathbf{f} \text{ apod.}$$

12.99.4. Vlastnosti krivkového integrálu druhého druhu podél orientovaného hladkého oblouku, zvláště jeho linearita a aditivita, vyplývají z vlastností jedno-rozměrného Riemannova integrálu. Platí tedy např.

$$\int_{(k)} \mathbf{f}(x, y) ds = \int_{(k_1)} \mathbf{f}(x, y) ds + \int_{(k_2)} \mathbf{f}(x, y) ds,$$

kde (k_1) , (k_2) jsou dva orientované hladké oblouky takové, že $k_1 \subset k$, $k_2 \subset k$, $k = k_1 \cup k_2$, přičemž k_1 , k_2 mají společný pouze jeden krajní bod, a sice $kb(k_1) = pb(k_2)$.

²⁴⁾ Matematici 18. století počítali práci silového pole $\mathbf{f} = (f, g)$ podél orientovaného hladkého oblouku (k) (zhruba řečeno) takto: Orientovaný oblouk (k) rozdělili na nekonečně mnoho „nekonečně malých“ orientovaných úseček $(x, y)(x + dx, y + dy)$, vypočetli práci podél každé takové orientované úsečky

$$\mathbf{f}(x, y) \cdot (dx, dy) = (f(x, y), g(x, y)) \cdot (dx, dy) = f(x, y) dx + g(x, y) dy$$

a všech nekonečně mnoho těchto „nekonečně malých“ úseček sečetli. Tento součet přirozeně označovali symbolem

$$\int_{(k)} f(x, y) dx + g(x, y) dy.$$

12.100. Příklad. Vypočteme krivkový integrál druhého druhu

$$\int_{(k)} (x - y) dx + (x + y) dy, \quad (12.100.1)$$

kde (k) je orientovaná půlkružnice v \mathbf{R}^2 , jejíž parametrické rovnice jsou

$$x = R \cos t, \quad y = R \sin t, \quad t \in \langle 0, \pi \rangle,$$

kde $R > 0$ [čili $pb(k) = (R, 0)$, $kb(k) = (0, R)$].

Řešení. Zřejmě (k) je orientovaný hladký oblouk a vektorová funkce $(x, y) \mapsto (x - y, x + y)$ je na k spojitá. Integrál (12.100.1) vypočteme podle vzorce (12.98.1):

$$\begin{aligned} \int_{(k)} (x - y) dx + (x + y) dy &= \\ &= \int_0^\pi [(R \cos t - R \sin t)(-R \sin t) + (R \cos t + R \sin t) R \cos t] dt = \\ &= R^2 \int_0^\pi dt = \pi R^2. \quad \square \end{aligned}$$

12.101. Poznámka. V aplikacích matematiky bychom nevystáli s krivkovými integrály druhého druhu počítanými pouze podél orientovaných hladkých oblouků. Může se např. stát, že bod pohybující se v daném vektorovém poli se po téměž oblouku vrací, apod. Pojem orientovaného hladkého oblouku proto zobecníme na tzv. *orientovanou cestu*, podél níž budeme v dalším textu integrovat.

12.102. Definice. Necht (k) je konečná posloupnost orientovaných hladkých oblouků

$$((k_1), (k_2), \dots, (k_m))$$

v \mathbf{R}^2 taková, že

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, m-1\}: kb(k_i) = pb(k_{i+1}).$$

Potom pišeme

$$(k) = (k_1) + (k_2) + \dots + (k_m)$$

a (k) nazýváme (*orientovanou cestou* v \mathbf{R}^2 , viz obr. 88. Orientované oblouky (k_i) jsou tzv. *úseky cesty* (k) . Jestliže $kb(k_m) = pb(k_1)$, nazýváme cestu (k) *uzavřenou množinu*

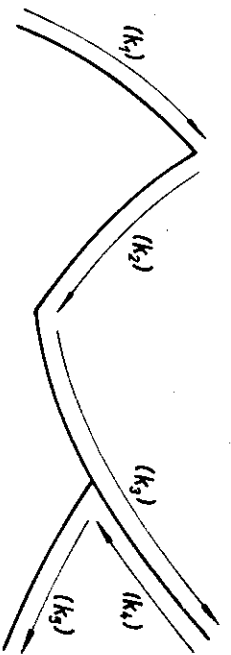
$$\bigcup_{i=1}^m k_i$$

nazýváme *trajektorii cesty* (k) . Cestu

$$(-k) = (-k_m) + (-k_{m-1}) + \dots + (-k_1)$$

nazýváme *opačnou cestou k cestě* (k) .

Stejně bychom definovali (*orientovanou cestu* atd. v \mathbf{R}^n).



Obr. 88. Orientovaná cesta $(k) = (k_1) + (k_2) + (k_3) + (k_4) + (k_5)$

12.103. Definice. Necht (k) je orientovaná cesta z def. 12.102 a f spojitě vektorové pole definované na trajektorii cesty (k) . Potom křivkový integrál druhého druhu vektorového pole f podél cesty (k) definujeme předpisem

$$\int_{(k)} f(x, y) ds = \sum_{i=1}^m \int_{(k_i)} f(x, y) ds. \quad (12.103.1)$$

12.104. Poznámky.

12.104.1. Integrál (12.103.1) nezávisí na rozkladu dané cesty (k) na úseky (k_i) . Kdybychom uvažovali dva různé takové rozklady, přičemž v obou případech bychom body dané cesty probíhali v tomtéž pořadí, vyšel by integrál (12.103.1) vždy stejně.

12.104.2. Jestliže cesta (k) z def. 12.102 je uzavřená a jestliže

$$(k)^* = (k_2) + (k_3) + \dots + (k_m) + (k_1),$$

potom platí, že

$$\int_{(k)} f(x, y) ds = \int_{(k)^*} f(x, y) ds.$$

12.104.3. Pro křivkový integrál druhého druhu podél orientované cesty platí obdoby poznámek 12.99.2, 12.99.4 a zejména 12.86.3.

12.104.4. Jestliže orientovaná cesta (k) je uzavřená, značíme někdy integrál (12.103.1) symbolem

$$\oint_{(k)} f(x, y) dx + g(x, y) dy$$

a nazýváme jej *cirkulací vektorového pole* $f = (f, g)$ *podél uzavřené (orientované) cesty* (k) .

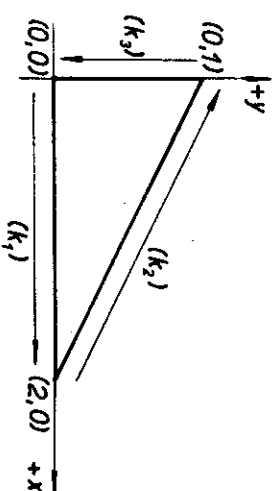
12.105. Práce spojitěho vektorového pole podél orientované cesty. Necht (k) je orientovaná cesta v \mathbb{R}^2 a $f = (f, g)$ spojitě vektorové pole definované na trajektorii cesty (k) . Ze způsobu, jakým jsme definovali křivkový integrál druhého druhu, je jasné, že práci L vektorového pole f podél cesty (k) vypočítáme (nebo, chcete-li, definojeme) pomocí vzorce

$$L = \int_{(k)} f(x, y) dx + g(x, y) dy. \quad (12.105.1)$$

12.106. Příklad. V rovině \mathbb{R}^2 je dáno vektorové pole

$$f(x, y) = (x + y^2, 2x), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Vypočítáme práci L tohoto pole podél orientovaného obvodu (k) trojúhelníka o vrcholech $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(0, 1)$, jehož orientace je dána uvedeným pořadím vrcholů.



Obr. 89. K příkladu 12.106

Řešení. Podle vzorce (12.105.1) platí

$$L = \int_{(k)} (x + y^2) dx + 2x dy.$$

Danou orientovanou cestu (k) rozložíme (ve smyslu def. 12.102) na tři úseky:

$$(k) = (k_1) + (k_2) + (k_3),$$

viz obr. 89. Ve shodě s (12.103.1) píšme

$$L = \int_{(k)} \dots = \int_{(k_1)} \dots + \int_{(k_2)} \dots + \int_{(k_3)} \dots \quad (12.106.1)$$

Orientovanou úsečku (k_1) můžeme popsat např. pomocí parametrických

rovnic

$$x = t, \quad y = 0, \quad t \in \langle 0, 2 \rangle,$$

a podle (12.98) vypočítat, že [orientace oblouku (k_1) souhlasí s jeho uvažovanou parametrizací]

$$\int_{(k_1)} (x + y^2) dx + 2x dy = \int_0^2 [(t + 0^2) \cdot 1 + (2t) \cdot 0] dt = \int_0^2 t dt = 2.$$

Podobným způsobem vypočítáte sami, že druhý, resp. třetí integrál na pravé straně rovnosti (12.106.1) je roven číslu $-\frac{2}{3}$, resp. 0. Přitom vycházejte např. z parametrických rovnic (12.87.3) oblouků k_2 , k_3 , mějte však na paměti, že orientace ani jednoho z oblouků (k_2) , (k_3) nesouhlasí s jeho parametrizací z (12.87.3) [použijte tedy vzorec (12.99.1)].

Dosadíme-li vypočtené výsledky do (12.106.1), dostaneme:

$$L = 2 - \frac{2}{3} + 0 = \frac{4}{3}. \quad \square$$

12.107. Křivkový integrál druhého druhu v \mathbf{R}^3 . Téměř doslova bychom mohli opsat hesla 12.95 až 12.105 s tím, že bychom všude přidali jednu nezávisle proměnnou z , a sepsat tak teorii křivkového integrálu v \mathbf{R}^3 .²⁵⁾ Konstatujeme pouze naprosto stručně, že parametrické rovnice orientovaného hladkého oblouku (k) v \mathbf{R}^3 by měly tvar

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \xi(t), \quad t \in \langle a, b \rangle,$$

a že křivkový integrál vektorového pole $\mathbf{F} = (f, g, h)$ podél orientovaného oblouku (k) bychom definovali a počítali pomocí vzorce

$$\int_{(k)} f(x, y, z) dx + g(x, y, z) dy + h(x, y, z) dz = \int_a^b [f(\varphi(t), \psi(t), \xi(t)) \varphi'(t) + g(\dots) \psi'(t) + h(\dots) \xi'(t)] dt.$$

Orientovaný hladký oblouk (k) v \mathbf{R}^3 bychom pak zobecnili na orientovanou cestu v \mathbf{R}^3 , atd.

Cvičení k článku 120

1. Vypočítejte křivkové integrály druhého druhu:

$$a) \int_{(k)} (y-1) dx + x dy, \text{ kde } k \text{ je „čtvrtejlpa“ daná parametrickými rovnicemi}$$

$$x = 3 \cos t, \quad y = 2 \sin t, \quad t \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle,$$

orientovaná tak, že $pb(k) = (0, 2)$, $kb(k) = (3, 0)$;

$$b) \int_{(k)} xy dx + y^2 dy, \text{ kde } (k) \text{ je orientovaný obvod čtverce o vrcholech } (0, 0) \\ (0, 1), (1, 1), (1, 0), \text{ jehož orientace je dána uvedeným pořadím vrcholů.}$$

2. V rovině \mathbf{R}^2 je dáno vektorové pole

$$\mathbf{f}(x, y) = (x + y, 2x), \quad (x, y) \in \mathbf{R}^2.$$

Vypočítejte práci tohoto vektorového pole podél kladně orientované (tj. proti směru pohybu hodinových ručiček, podrobněji viz heslo 12.109) kružnice se středem v počátku a poloměrem $R > 0$.

3. Vypočítejte křivkový integrál druhého druhu v \mathbf{R}^3

$$\int_{(k)} x dx + y dy + (xz - y) dz,$$

kde (k) je orientovaný oblouk daný parametrickými rovnicemi

$$x = t^2, \quad y = 2t, \quad z = 4t^3, \quad t \in \langle 0, 1 \rangle.$$

²⁵⁾ Podobně bychom mohli postupovat i v prostoru \mathbf{R}^n .

4. V prostoru \mathbf{R}^3 ($\equiv \mathbf{E}_3$) je dáno vektorové pole, které každému bodu $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$, $(x, y, z) \neq P$ přiřazuje vektor směřující do počátku P a mající velikost rovnou vzdálenosti bodu (x, y, z) od souřadnicové roviny Pxy . Vypočítejte práci tohoto vektorového pole podél orientované úsečky (k) , jestliže $pb(k) = (0, 2, 4)$, $kb(k) = (0, 1, 2)$.

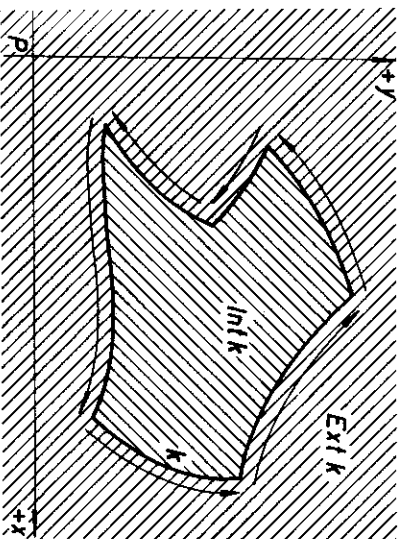
Výsledky cvičení:

1. a) -3 ; b) $1/2$.
2. πR^2 .
3. $5/2$.
4. $3\sqrt{5}$.

12P. GREENOVA VĚTA

12.108. Věta, která je náplní tohoto článku, uvede do souvislosti dvojný integrál na rovině oblasti s křivkovým druhého druhu podél její hranice.

12.109. Orientace uzavřené křivky. Necht k je jednoduchá (tj. neprotínající se) uzavřená po částech hladká křivka v \mathbf{R}^2 . Pro takovou křivku platí tzv. Jordanova věta, která je velmi názorná, jejíž obtížný důkaz však přesahuje rámec této knihy. Jordanova věta říká, že křivka k dělí rovinu \mathbf{R}^2 na dvě oblasti: omezenou oblast $Int k$ a neomezenou oblast $Ext k$, přičemž k je hranicí obou těchto oblastí. viz obr. 90.



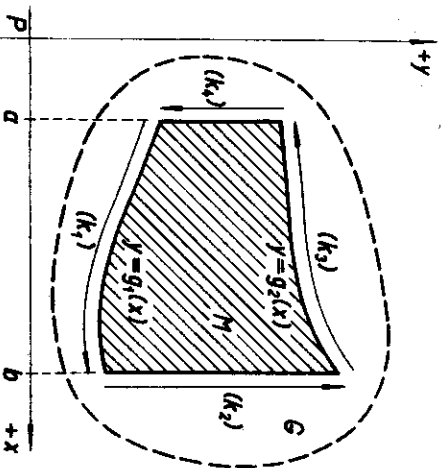
Obr. 90. Kladná orientace křivky k

Jestliže na kterémkoliv hladkém (pod)oblouku křivky k zvolíme orientaci, určíme tím jednoznačně orientaci křivky k . Tímto způsobem můžeme z křivky k „vytvořit“ dvě různé orientované cesty. Obě tyto orientované cesty lze pojmenovat, avšak jejich přesné vymezení je náročné. Proto při něm budeme vycházet z názorné představy. Představme si křivku k zakreslenou v rovině $\mathbf{E}_2 \equiv \mathbf{R}^2$, v níž je zvolena pravotočivá kartézská soustava souřadnic (viz kap. 3, heslo 3.47). *Kladnou orientaci* (viz obr. 90) nazveme tu z obou možných orientací křivky k , při níž křivku k „probíháme“ tak, že oblast $Int k$ přitom máme „po levé ruce“. Opačnou orientaci křivky k nazveme *zápornou orientaci*.

12.110. Greenova věta. Nechť $M \subset \mathbb{R}^2$ je omezená uzavřená oblast, jejíž hranici je jediná jednoduchá uzavřená po částech hladká křivka (odtud vyplývá, že M je uzávěr jednoduché souvislé oblasti). Necht' (hr M) je kladně orientovaná křivka hr M . Necht' $\mathbf{f} = (f, g)$ je vektorové pole, které je třídy C^1 na (otevřené) oblasti $G \subset \mathbb{R}^2$, přičemž $M \subset G$. Potom platí tzv. Greenův vzorec:

$$\iint_M \left(\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) dx dy = \int_{(hr M)} f(x, y) dx + g(x, y) dy. \quad (12.110.1)$$

Důkaz. Z uvedených předpokladů vyplývá, že integrály na obou stranách rovnosti (12.110.1) existují. Vzorec (12.110.1) dokážeme pro jistý speciální případ množiny M a spokojíme se konstatováním, že platí i v případě, o němž hovoří dokazovaná věta.



Obr. 91. K důkazu Greenovy věty

Předpokládáme, že M je křivočarý lichoběžník

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \langle a, b \rangle \wedge g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\},$$

kde g_1, g_2 jsou funkce jedné proměnné, které jsou na intervalu $\langle a, b \rangle$ třídy C^1 , přičemž pro každé $x \in \langle a, b \rangle$ je $g_1(x) < g_2(x)$, viz obr. 91.

Orientovanou cestu (hr M) rozložíme na čtyři úseky (ve smyslu def. 12.102) takto:

$$(hr M) = (k_1) + (k_2) + (k_3) + (k_4),$$

kde $(k_1), (k_2), (k_3), (k_4)$ jsou orientované hladké oblouky z obr. 91.

Nyní dokážeme, že

$$\iint_M \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) dx dy = - \int_{(hr M)} f(x, y) dx. \quad (12.110.2)$$

Integrál na levé straně rovnosti (12.110.2) vypočítáme pomocí Fubiniovy věty 12.22:

$$\begin{aligned} \iint_M \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) dx dy &= \int_a^b \left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) dy \right] dx = \\ &= \int_a^b [f(x, y)]_{y=g_1(x)}^{y=g_2(x)} dx = \\ &= \int_a^b f(x, g_2(x)) dx - \int_a^b f(x, g_1(x)) dx. \end{aligned}$$

Integrál na pravé straně rovnosti (12.110.2) napíšeme jako součet čtyř integrálů

$$\int_{(hr M)} f(x, y) dx = \int_{(k_1)} \dots + \int_{(k_2)} \dots + \int_{(k_3)} \dots + \int_{(k_4)} \dots \quad (12.110.3)$$

Pro výpočet prvního z těchto čtyř integrálů napíšeme parametrické rovnice orientovaného hladkého oblouku (k_1)

$$x = t, \quad y = g_1(t), \quad t \in \langle a, b \rangle,$$

a pomocí vzorce (12.98.1) vypočítáme, že

$$\int_{(k_1)} f(x, y) dx = \int_a^b [f(t, g_1(t)) \cdot 1 + 0] dt = \int_a^b f(x, g_1(x)) dx$$

(označení integrační proměnné můžeme volit libovolně). Vypočítáme-li podobným způsobem zbývající tři integrály na pravé straně rovnosti (12.110.3) [podrobné výpočty proveďte sami (pozor na orientaci!)], dostaneme po dosazení do (12.110.3)

$$\int_{(hr M)} f(x, y) dx = \int_a^b f(x, g_1(x)) dx + 0 - \int_a^b f(x, g_2(x)) dx + 0.$$

Levá a pravá strana rovnosti (12.110.2) jsou tedy rovny téměř číslu, tedy rovnost (12.110.2) platí.

Podobným způsobem dokážte sami, že platí také rovnost

$$\iint_M \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) dx dy = \int_{(hr M)} g(x, y) dy. \quad (12.110.4)$$

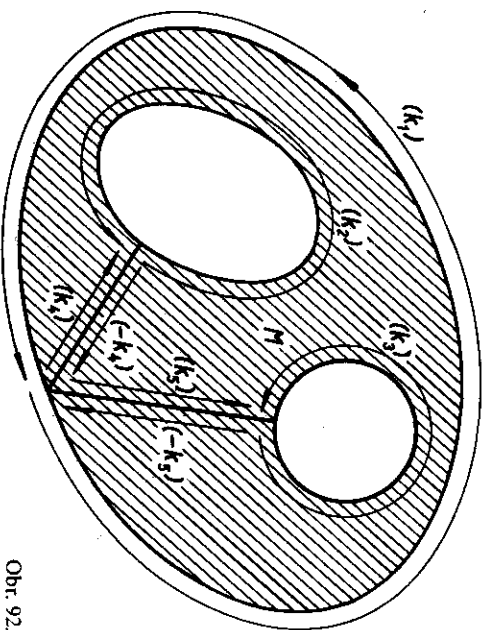
Odečteme-li od rovnosti (12.110.4) rovnost (12.110.2), získáme dokazovaný vzorec (12.110.1). \square

12.111. Poznámka. Greenova věta platí i pro složitější uzavřené oblasti, jejichž hranice jsou tvořeny několika (koněčné mnoha) jednoduchými uzavřenými po částech hladkými křivkami (pro uzávěry tzv. vícenásobné souvislých omezených oblastí). Například pro uzavřenou oblast z obr. 92 (při splnění všech ostatních předpokladů Greenovy věty 12.110) platí

$$\iint_M \dots = \int_{(k_1)} \dots + \int_{(k_2)} \dots + \int_{(-k_3)} \dots + \int_{(k_4)} \dots + \int_{(-k_5)} \dots + \int_{(k_6)} \dots + \int_{(-k_7)} \dots + \int_{(k_8)} \dots + \int_{(-k_9)} \dots$$

$$\iint_M \dots = \int_{(k_1)} \dots - \int_{(k_2)} \dots - \int_{(k_3)} \dots$$

[Výrazy za integracím znamení ve dvojných, resp. křivkových integrálech, které jsme z úsporných důvodů nevyplisovali, jsou zde stejné jako v (12.110.1)].



Obr. 92. K poznámce 12.111

12.112. Výpočet obsahu rovinné oblasti. Necht $M \subset \mathbf{R}^2$ je uzavřená oblast splňující předpoklady Greenovy věty 12.110. Položíme-li v (12.110.1)

$$g(x, y) = \frac{1}{2}x, \quad f(x, y) = -\frac{1}{2}y,$$

bude mít dvojný integrál na levé straně rovnosti (12.110.1) tvar $\iint_M dx dy$, a tedy vzhledem k (12.39.1) bude roven obsahu P uzavřené oblasti M . Vzhledem k rovnosti (12.110.1) bude tomuto obsahu roven i příslušný křivkový integrál na její pravé straně.

Pro obsah P uzavřené oblasti M tedy platí (za uvedených předpokladů) vzorec:

$$P = \frac{1}{2} \int_{(hrM)} x dy - y dx, \tag{12.112.1}$$

kde $(hr M)$ je kladně orientovaná hranice uzavřené oblasti M .

12.113. Příklad. Pomocí křivkového integrálu vypočítáme obsah P množiny

$$M = \left\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\},$$

kde $a, b > 0$.

Řešení. Množina M je „vnitřek“ elipsy. Kladně orientovanou hranici $(hr M)$ množiny M je kladně orientovaná elipsa daná parametrickými rovnicemi

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t, \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$

Podle vzorce (12.112.1) [s použitím vzorce (12.98.1)] vypočítáme, že

$$P = \frac{1}{2} \int_{(hrM)} x dy - y dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [a \cos t b \cos t - b \sin t (-a \sin t)] dt = \\ = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} ab dt = \pi ab. \quad \square$$

Cvičení k článku 12P

1. Pomocí Greenovy věty vypočítáte křivkový integrál druhého druhu

$$\int_{(k)} (x - y)^2 dx + (x^2 - y^2) dy,$$

kde (k) je kladně orientovaný obvod trojúhelníka o vrcholech $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(0, 2)$.

2. Pomocí Greenovy věty vypočítáte znovu křivkový integrál druhého druhu ze cvič. 1b k čl. 12O.

3. Pomocí křivkového integrálu vypočítáte obsah „vnitřku“ asteroidy dané parametrickými rovnicemi

$$x = a \cos^3 t, \quad y = a \sin^3 t, \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle,$$

kde $a > 0$.

4. Pomocí křivkového integrálu vypočítáte obsah rovinného obrazce ohraničeného jedním „obloukem“ cykloidy ze cvič. 1a k čl. 12N a osou x .

Výsledky cvičení:

- 1. $-2/3$.
- 2. $1/2$.
- 3. $3\pi a^2/8$.
- 4. 12π .

12Q. NEZÁVISLOST KŘIVKOVÉHO INTEGRÁLU DRUHÉHO DRUHU NA CESTĚ

12.114. Definice. Necht f je spojitě vektorové pole na oblasti $G \subset \mathbf{R}^n$. Řekneme, že vektorové pole f je *potenciální na G* , jestliže existuje (reálná) funkce V definovaná na G taková, že pro každé $x \in G$ platí

$$\text{grad } V(x) = f(x).$$

Každou takovou funkci V nazýváme *potenciálem vektorového pole f na oblasti G* .

12.115. Poznámka. V kapitole 10 (viz heslo 10.32) jsme definovali pojem exaktní diferenciální rovnice. Použijeme-li terminologii z def. 12.114, můžeme (při označení z hesla 10.32) říci, že diferenciální rovnice (10.32.1) je exaktní na oblasti $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ právě tehdy, když vektorové pole $f = (M, N)$ je potenciální na Ω , a že pojem potenciálu zmíněné diferenciální rovnice splyývá s pojmem potenciálu tohoto vektorového pole f .

12.116. Příklady.

12.116.1. Vektorové pole

$$f(x, y) = (1, x)$$

je potenciální na oblasti $G = \mathbf{R}^2$. Zvolíme-li totiž $V(x, y) = xy$, potom pro každé $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ platí

$$\text{grad } V(x, y) = \left(\frac{\partial V}{\partial x}(x, y), \frac{\partial V}{\partial y}(x, y) \right) = (y, x) = f(x, y).$$

Funkce V je potenciálem vektorového pole f na \mathbf{R}^2 .

12.116.2. Vektorové pole

$$f(x, y, z) = \left(\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}, \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}, \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} \right)$$

je potenciální na oblasti $G = \mathbf{R}^3 - \{(0, 0, 0)\}$. Přesvědčte se sami o tom, že funkce

$$V(x, y, z) = -\frac{1}{2(x^2 + y^2 + z^2)}$$

je jeho potenciálem na G .

12.117. Poznámka. Nyní vzniká otázka, jak poznat, že dané vektorové pole je potenciální. Odpovíme na ni pro $G \subset \mathbf{R}^2$ a $G \subset \mathbf{R}^3$ v následujících dvou heslech.

12.118. Potenciální vektorové pole v \mathbf{R}^2 . Tuto problematiku jsme vysvětlili již v kap. 10 ve větě 10.36. Vyslovme tuto větu znovu v naší nové terminologii a při označení, které se nám bude hodit v tomto článku:

Předpokládejme, že vektorové pole $f = (f, g)$ je třídy C^1 na jednoduše souvislé oblasti $G \subset \mathbf{R}^2$. Potom toto vektorové pole je potenciální na G právě tehdy, když pro každé $(x, y) \in G$ platí, že

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial g}{\partial x}(x, y). \quad (12.118.1)$$

12.119. Potenciální vektorové pole v \mathbf{R}^3 . Tento případ je do značné míry analogický s předcházejícím rovinným případem.

Uvažujme vektorové pole $f = (f, g, h)$, které je třídy C^1 na oblasti $G \subset \mathbf{R}^3$. Necht vektorové pole f je na G potenciální, tj. necht existuje funkce V definovaná na G taková, že pro každé $(x, y, z) \in G$ platí

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x, y, z) = f(x, y, z), \quad \frac{\partial V}{\partial y}(x, y, z) = g(x, y, z), \quad \frac{\partial V}{\partial z}(x, y, z) = h(x, y, z).$$

Odtud (stejně jako v důkazu věty 10.36) prostřednictvím věty 9.23 o „záměnosit“ smíšených vyšších parciálních derivací vyplývá, že potom pro každé $(x, y, z) \in G$ platí

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) &= \frac{\partial g}{\partial x}(x, y, z), & \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) &= \frac{\partial h}{\partial x}(x, y, z), \\ \frac{\partial g}{\partial z}(x, y, z) &= \frac{\partial h}{\partial y}(x, y, z). \end{aligned} \quad (12.119.1)$$

Získali jsme tak podmínky nutné pro existenci potenciálu vektorového pole f na oblasti $G \subset \mathbf{R}^3$ analogické podmínce (12.118.1). V rovinném případě byla podmínka (12.118.1) dokonce postačující, ovšem za předpokladu, že oblast $G \subset \mathbf{R}^2$ byla jednoduše souvislá. Také naše podmínky (12.119.1) jsou v případě jednoduše souvislé oblasti $G \subset \mathbf{R}^3$, jejíž definice následuje, postačující (což stejně jako v rovinném případě nebudeme dokazovat).

Pojem jednoduše souvislé oblasti v \mathbf{R}^3 zavedeme podobně jako v rovinném případě (viz heslo 10.35). Opět budeme vycházet z intuice. Necht tedy $G \subset \mathbf{R}^3$ je oblast (ta je nutně souvislá). Řekneme, že tato oblast je jednoduše souvislá, jestliže každou jednoduchou uzavřenou křivku ležící v G a také každou jednoduchou uzavřenou plochu ležící v G lze v G „spojitě stáhnout“ do bodu.

12.120. Poznámka. Potenciální vektorové pole má nekonečně mnoho potenciálů a všechny dostaneme, když k libovolnému z nich přičteme všechny možné konstanty.

12.121. Poznámka. V kapitole 10 (příkl. 10.37) jsme ukázali jeden z možných způsobů, jak lze k danému potenciálnímu vektorovému poli (v \mathbf{R}^2) najít příslušný potenciál.

12.122. Definice. Necht $f = (f, g)$ je spojitě vektorové pole definované na oblasti $G \subset \mathbf{R}^2$. Řekneme, že křivkový integrál druhého druhu vektorového pole f nezávisí v oblasti G na cestě, jestliže pro libovolné dvě orientované cesty $(k_1), (k_2)$ v oblasti G o stejném počátečním a koncovém bodě platí

$$\int_{(k_1)} f(x, y) dx + g(x, y) dy = \int_{(k_2)} f(x, y) dx + g(x, y) dy.$$

12.123. Věta. Křivkový integrál druhého druhu vektorového pole f nezávisí na cestě v oblasti $G \subset \mathbf{R}^2$ právě tehdy, když cirkulace vektorového pole f (viz pozn. 12.104.4) podél libovolné uzavřené cesty v G je rovna nule.

Důkaz vyplývá z def. 12.122 a ze skutečnosti, že z libovolných dvou cest $(k_1), (k_2)$ v oblasti G o společném počátečním a koncovém bodě lze vytvořit uzavřenou cestu $(k_1) + (-k_2)$ a obráceně každou uzavřenou cestu v oblasti G lze vyjádřit ve tvaru $(k_1) + (-k_2)$, kde $(k_1), (k_2)$ jsou dvě cesty mající společný počáteční a koncový bod. □

12.124. Úmluva. Jestliže křivkový integrál druhého druhu vektorového pole $f = (f, g)$ nezávisí v oblasti $G \subset \mathbf{R}^2$ na cestě, potom symbolem

$$\int_{w_1}^{w_2} f(x, y) dx + g(x, y) dy$$

označujeme integrál

$$\int_{(k)} f(x, y) dx + g(x, y) dy, \quad (k)$$

kde (k) je libovolná orientovaná cesta v oblasti G , pro níž platí $pk(k) = w_1$, $kb(k) = w_2$. Z předpokladu nezávislosti na cestě vyplývá korektnost tohoto označení.

12.125. Věta. Necht $f = (f, g)$ je spojitě vektorové pole definované na oblasti $G \subset \mathbf{R}^2$. Potom křivkový integrál druhého druhu vektorového pole f nezávisí v oblasti G na cestě právě tehdy, když vektorové pole f je na G potenciální. Je-li pole f na potenciální a je-li V jeho potenciál, potom pro libovolnou orientovanou cestu (k) v G platí

$$\int_{(k)} f(x, y) dx + g(x, y) dy = V(kb(k)) - V(pa(k)). \quad (12.125.1)$$

Důkaz.

1. $\square \Leftarrow$ Necht vektorové pole f je na G potenciální a necht V je jeho potenciál, tj. necht pro každé $(x, y) \in G$ platí

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x, y) = f(x, y), \quad \frac{\partial V}{\partial y}(x, y) = g(x, y). \quad (12.125.2)$$

Necht (k) je libovolný orientovaný hladký oblouk v G . Dokážeme, že potom platí (12.125.1). Odtud prostřednictvím def. 12.103 jednoduše vyplývá platnost rovnosti (12.125.1) pro libovolnou orientovanou cestu v G , a tedy také nezávislost křivkového integrálu druhého druhu vektorového pole f v oblasti G na cestě.

Necht

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad t \in \langle a, b \rangle,$$

jsou parametrické rovnice orientovaného oblouku (k) . Počítejme integrál na levé straně rovnosti (12.125.1):

$$\begin{aligned} \int_{(k)} f(x, y) dx + g(x, y) dy &= \int_a^b \frac{\partial V}{\partial x}(\varphi(t), \psi(t)) \varphi'(t) dt + \int_a^b \frac{\partial V}{\partial y}(\varphi(t), \psi(t)) \psi'(t) dt \\ &= \int_a^b \left[\frac{\partial V}{\partial x}(\varphi(t), \psi(t)) \varphi'(t) + \frac{\partial V}{\partial y}(\varphi(t), \psi(t)) \psi'(t) \right] dt \\ &= \int_a^b (V \circ (\varphi, \psi))'(t) dt = [V \circ (\varphi, \psi)](t) \Big|_a^b \\ &= V(\varphi(b), \psi(b)) - V(\varphi(a), \psi(a)) = V(kb(k)) - V(pa(k)). \end{aligned}$$

*: Pouchli jsme rovnosti (12.125.2).

** : Pouchli jsme vzorec (12.98.1).

***: Pouchli jsme větu 9.44 o derivaci složené funkce více proměnných.

2. \Rightarrow Necht křivkový integrál druhého druhu vektorového pole f nezávisí v oblasti G na cestě. Zvolme libovolně, ale pevně bod $(x_0, y_0) \in G$ a defínujme

$$V(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} f(\xi, \eta) d\xi + g(\xi, \eta) d\eta, \quad (x, y) \in G.$$

Lze dokázat (nebudeme to však dělat), že takto defínovaná funkce V je potenciálem vektorového pole f . \square

12.126. Poznámka. Vše, co jsme řekli v heslech 12.122 až 12.125, bychom mohli téměř doslova zopakovat pro křivkové integrály druhého druhu v \mathbf{R}^3 (a samozřejmě také v \mathbf{R}^n). Nebudeme tím zdržovat, vypočteme však v \mathbf{R}^3 jeden příklad.

12.127. Příklad. Dokážme, že platí

$$\int_{(k)} \cos x \cos y dx - \sin x \sin y dy = 0, \quad (12.127.1)$$

kde (k) je libovolná uzavřená orientovaná cesta v \mathbf{R}^2 .

Řešení. Označme

$$f(x, y) = (f(x, y), g(x, y)) = (\cos x \cos y, -\sin x \sin y).$$

Toto vektorové pole f je na jednoduše souvislé oblasti \mathbf{R}^2 třídy C^1 a poněvadž pro každé $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ platí

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = -\cos x \sin y,$$

je podle hesla 12.118 na \mathbf{R}^2 potenciální. Podle věty 12.125 tedy křivkový integrál druhého druhu vektorového pole f nezávisí v \mathbf{R}^2 na cestě. Odtud podle věty 12.123 vyplývá rovnost (12.127.1). \square

12.128. Příklad. Dokážme, že křivkový integrál druhého druhu vektorového pole

$$f(x, y, z) = (2xy, x^2 - z, 1 - y), \quad (x, y, z) \in \mathbf{R}^3,$$

nezávisí v \mathbf{R}^3 na cestě, a vypočteme

$$\int_{(2, -1, 3)}^{(1, 0, 0)} 2xy dx + (x^2 - z) dy + (1 - y) dz. \quad (12.128.1)$$

Řešení. Jelikož \mathbf{R}^3 je jednoduše souvislá oblast a vektorové pole f je na této oblasti třídy C^1 , stačí (podle hesla 12.119) k důkazu nezávislosti křivkového integrálu druhého druhu vektorového pole f v \mathbf{R}^3 na cestě ověřit splnění podmínek (12.119.1). Označíme-li $f = (f, g, h)$, potom pro každé $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ vskutku platí:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = \frac{\partial g}{\partial x}(x, y, z) = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = \frac{\partial h}{\partial x}(x, y, z) = 0, \\ \frac{\partial g}{\partial z}(x, y, z) = \frac{\partial h}{\partial y}(x, y, z) = -1. \end{aligned}$$

Hledejme potenciál vektorového pole f na \mathbf{R}^3 . Budeme postupovat podobně jako v kap. 10 v příkl. 10.37. Funkce V tří proměnných x, y, z je tímto potenciálem právě tehdy, když pro každé $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ platí

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x, y, z) = 2xy, \quad (12.128.2)$$

$$\frac{\partial V}{\partial y}(x, y, z) = x^2 - z, \quad (12.128.3)$$

$$\frac{\partial V}{\partial z}(x, y, z) = 1 - y. \quad (12.128.4)$$