Opakování: Věta o inverzní funkci: $F:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dif. v x_0

$F(x_0) = y_0$ a $|DF(x_0)| \neq 0$

$\Rightarrow \exists$ lok. F^{-1} v okolí (x_0, y_0)

a $DF^{-1}(y_0) = (DF(x_0))^{-1}$

Př: $$f(x,y) = \begin{pmatrix} xy\cos y \\ xy\sin x \end{pmatrix}$$

najděte $(Df^{-1})(0, \frac{\pi^2}{4})$

Řešení: Najdeme x_0: $f(x_0) = (0, \frac{\pi^2}{4})$

čili: $xy\cos y = 0 \Rightarrow \cos y = 0 \Rightarrow y = \frac{\pi}{2}$

$xy\sin x = \frac{\pi^2}{4} \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$

$$Df\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} y\cos y & x\cos y - xy\sin y \\ y\sin x + xy\cos x & x\sin x \end{pmatrix}_{\substack{x=\frac{\pi}{2} \\ y=\frac{\pi}{2}}} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\pi^2}{4} \\ \frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{2} \end{pmatrix}$$

$$\left| \;\text{—}\; \right| = \frac{\pi^3}{8} \neq 0 \Rightarrow \exists \text{ inverze}$$

$$\left(Df\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{\pi^2} & \frac{2}{\pi} \\ -\frac{4}{\pi^2} & 0 \end{pmatrix} = Df^{-1}\left(0, \frac{\pi^2}{4}\right)$$

Vztah mezi inverzní a implicitní větou:
implicit. $\Rightarrow$ inverzní.
počítat inverzi tj. řešit rovnici

$f(y) = x$ pro y.

$F(x,y) := f(y) - x = 0$

definuje $y(x) \Leftarrow |D_y F| \neq 0 \Rightarrow |D_y f| \neq 0$.

Derivace vyšších řádů

Úkol je $D^2 f := D(Df)$

$$D^{n+1} f := D(D^n f)$$

opakování – směrová derivace $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$D_{\vec u} f = u_1 \frac{\partial f}{\partial x} + u_2 \frac{\partial f}{\partial y} \qquad \vec u = (u_1, u_2)$$

diferenciál bylo něco tak, aby

$$(Df)\vec u = D_{\vec u} f \quad \forall \vec u \in \mathbb{R}^2$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) \underset{\text{sk.s.}}{\cdot} (u_1, u_2) = \underline{\qquad}$$

Analogicky $(D^2 f)\vec u \vec v = D_{\vec v} D_{\vec u} f$

$$D_{\vec u} f = u_1 f'_x + u_2 f'_y \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial z} = f'_z\right)$$

$$D_{\vec v} D_{\vec u} f = u_1 D_{\vec v} f'_x + u_2 D_{\vec v} f'_y$$

$$= u_1 (v_1 f''_{xx} + v_2 f''_{xy}) + u_2 (v_1 f''_{yx} + v_2 f''_{yy})$$

$$= (u_1, u_2) \begin{pmatrix} v_1 f''_{xx} + v_2 f''_{xy} \\ v_1 f''_{yx} + v_2 f''_{yy} \end{pmatrix}$$

$$= (u_1, u_2) \underbrace{\begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{pmatrix}}_{=: D^2 f} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

Hessova matice

Př: $f(x,y) = x^2 \sin y \quad D^2 f = ?$

Řešení: $D^2 f = \begin{pmatrix} 2\sin y & 2x\cos y \\ 2x\cos y & -x^2 \sin y \end{pmatrix}$

stejné

Věta o záměně 2. parciálních der.

Buď $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ $2\times$ diferenc.

a $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ jsou spojité v x_0

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right|_{x_0} = \left.\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\right|_{x_0}$$

Obecně: $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $D^2 f = ?$

$$D^2 f = \begin{pmatrix} f''_{11} & f''_{12} & \cdots & f''_{1n} \\ f''_{21} & f''_{22} & \cdots & f''_{2n} \\ \vdots & & & \\ f''_{n1} & f''_{n2} & \cdots & f''_{nn} \end{pmatrix}$$

Hessova matice

Př: $f(x,y,z) = e^x y^2 \sin z$, $D^2 f = ?$

Řešení:

$$D^2 f = \begin{array}{c} \\ x \\ y \\ z \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \begin{pmatrix} e^x y^2 \sin z & e^x 2y \sin z & e^x y^2 \cos z \\ e^x 2y \sin z & 2e^x \sin z & e^x 2y \cos z \\ e^x y^2 \cos z & e^x 2y \cos z & e^x y^2(-\sin z) \end{pmatrix} \end{array}$$

symetrická matice, důsledek věty. (z2pd)

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

Co to je $D^3 f = ?$

Analogicky $(D^3 f)(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = \underbrace{D_{\vec{u}} D_{\vec{v}} D_{\vec{w}} f}_{\text{umím spočítat}}$

$\forall \vec{u},\vec{v},\vec{w} \in \mathbb{R}^3$

Není to matice, ale „tenzor"

$$D_{\vec{u}} D_{\vec{v}} D_{\vec{w}} f = \sum_{i,j,k=1}^{n} \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} u_i v_j w_k$$

$$\Rightarrow D^3 f = \sum_{i,j,k=1} \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} dx_i dx_j dx_k$$

$$dx_i(\vec{u}) = u_i \quad \vec{u} = (u_1,\ldots,u_n)$$

<u>def:</u> $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, diferenciál řádu $m \in \mathbb{N}$ je tenzor

$$D^m f = \sum_{i_1,\dots,i_m=1}^{n} \frac{\partial^m f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_m}} dx_1 \dots dx_m$$

tato hrůza má n^m členů, ale pro m krát spojitě dif. funkce stačí díky symetrii počítat „jen" $\binom{m+n-1}{n-1}$ členů.

Př: $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ $\quad D^4 f = ?$

toto má $3^4 = 81$ členů, ale

díky symetrii $\binom{4+3-1}{3-1} = \binom{6}{2} = \frac{6\cdot 5}{2} = \underline{\underline{15}}$

$f(x,y,z) = xyz^4 \quad D^4 f = ?$

použijeme fakt $D^4 f = D(D(D(Df)))$

1) $Df = yz^4\,dx + xz^4\,dy + 4xyz^3\,dz$

2) $D^2 f = (D\,yz^4)\,dx + D\,xz^4\,dy + D\,4xyz^3\,dz$

$= (z^4\,dy + 4yz^3\,dz)\,dx + z^4\,dx\,dy + 4xz^3\,dz\,dy + 4yz^3\,dx\,dz + 4xz^3\,dy\,dz + 12\,xyz^2\,d^2z$

$= 2\,z^4\,dx\,dy + 8\,yz^3\,dx\,dz + 8\,xz^3\,dy\,dz + 12\,xyz^2\,d^2z$

3) $D^3 f = 2\cdot 8\,z^3\,dz\,dx\,dy + \overset{12\,+}{24}\,yz^2\,dx\,d^2z + \underset{+\,12}{24}\,xz^2\,dy\,d^2z + 24\,xyz\,d^3z$

$= 24\,z^3\,dx\,dy\,dz + 36\,yz^2\,dx\,d^2z + 36\,xz^2\,dy\,d^2z + 24\,xyz\,d^3z$

4) $D^4 f = \underset{+\,36+36}{72}\,z^2\,dx\,dy\,d^2z + \underset{+\,24}{72}\,yz\,dx\,d^3z + \underset{+\,24}{72}\,xz\,dy\,d^3z + 24\,xy\,d^4z$

Co když $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$?

$f = (f^1, f^2, \dots, f^m)$

definuji: $D^k f := (D^k f^1, D^k f^2, \dots, D^k f^m)$