Zopakování věty o implicitním zobrazení

Věta (o implicitním zobrazení – $\mathbb{R}^2$)

Nechť $M \subset \mathbb{R}^2$, $F: M \to \mathbb{R}^2$ – spoj. dif. na M $(x_0, y_0) \in M$

$F(x_0, y_0) = 0$ $\quad \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$

Potom $\exists$ okolí $O(x_0)$ bodu x_0 a $\exists\, O(y_0)$ okolí y_0 tak, že $\forall x \in O(x_0)$

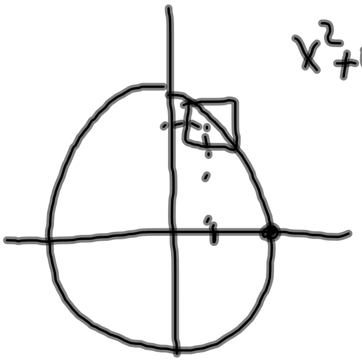
$\exists!\, y \in O(y_0)$ že $F(x, y) = 0$

Jinými slovy $\exists\, f: O(x_0) \to O(y_0)$ tak, že $F(x, y_0)$ je graf f.

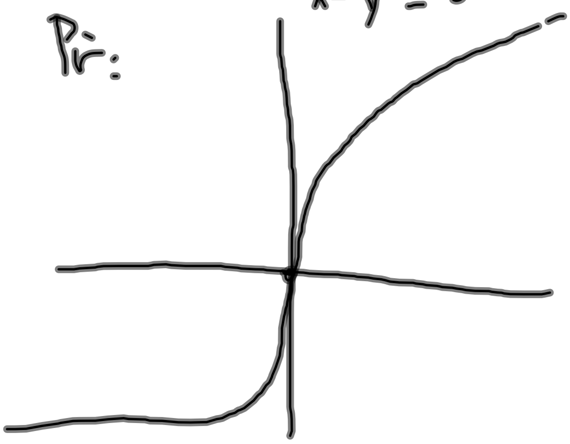
f - spoj. diferencovatelná a platí

$$f'(x_0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)}.$$

Př.: $x^2 + y^2 - 1 = 0$

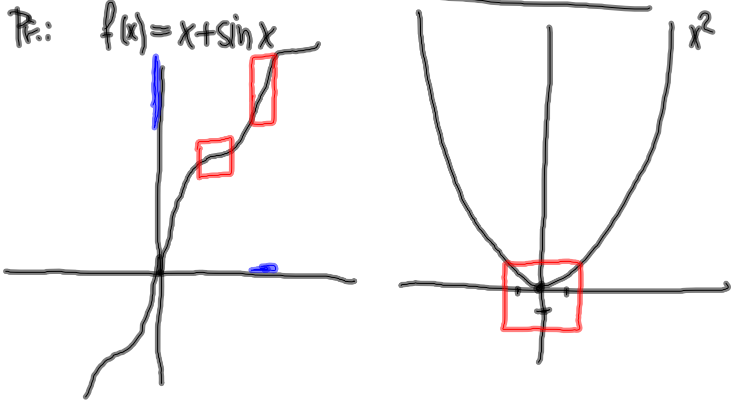


Př.: $x - y^3 = 0$



Věta o inverzním zobrazení

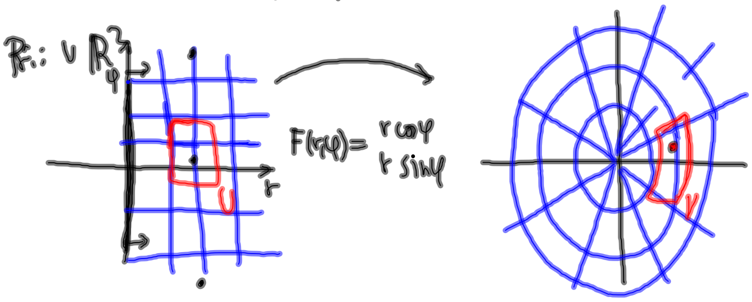
Př.: $f(x) = x + \sin x$ x^2



Věta (o inverzním zobrazení)
Nechť $f: G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ je spoj. diferencovatelná na $G \in Op$, $a \in G$, $\det f'(a) \neq 0$.
Potom $\exists U$ - okolí a $\exists V$ - okolí $f(a)$: $f|_U : U \to V$ je bijektivní spojitě diferencovatelné i $f|_U^{-1}$ a platí

$$\left(f|_U^{-1}\right)'(f(a)) = \left(f'(a)\right)^{-1}$$

Př.: v $\mathbb{R}^2$



Věta (o inverzním zobrazení $\mathbb{R}^1$)
Buď $f: J \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, J - interval, $f'(a) \neq 0$, $a \in J$, f - spoj. deriv.
Potom f má lokální inverzi na okolí a.

Důkaz:
Když f' - spojitou derivaci na J a $f'(a) \neq 0$, f' je nenulová na nějakém okolí a. (předp. $\neq 0$ na celém J).
$f' > 0$ nebo $f' < 0$
$f \nearrow$ na J $f \searrow$ na J
V obou případech je f injektivní $I = f(J)$ - interval
$f: J \to I$ - bijekce. $\exists f^{-1}: I \to J$.

$$\left(f^{-1}\right)'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)} \qquad f^{-1} \circ f = id$$

$$\left(f^{-1}\right)'(f(a)) \cdot f'(a) = 1$$

$$\left(f^{-1}\right)'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}.$$

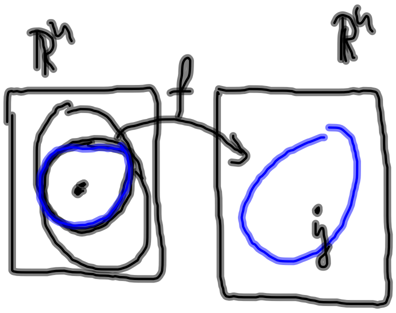
Důkaz (případ $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$)

1. f - spoj difer. a $\det f'(a) \neq 0 \Rightarrow \det f'(x) \neq 0$ na okolí $O(a)$.

2. $\exists$ okolí $\tilde{O}(a)$ $\forall x \in \tilde{O}(a)$ $x \neq a$ $\underline{f(x) \neq f(a)}$

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{\|f(a+h) - f(a) - f'(a)\cdot h\|}{\|h\|} = 0 \qquad f'(a) \in \text{Izomor.}$$

$$f(x) - f(a) \neq 0$$



3. na $\underline{O(a) \cap \tilde{O}(a)}$ g

k y def. $g_y(x) = \|y - f(x)\|^2$

hledáme minima g_y - lze ukázat, že g_y má <u>jediné</u> lokální minimum

$$g'(x) = 2\|y - f(x)\| \cdot \underbrace{f'(x)}_{\neq 0} = 0 \qquad f(x) = y. \leftarrow$$

Vztah
$$(f^{-1})'(f(a)) = (f'(a))^{-1}$$ plyne opět z toho, že

$$f^{-1}(f(x)) = id(x)$$ a z toho jak vypadá derivace složené funkce

neboli

$$(f^{-1})'(f(a)) \cdot f'(a) = E$$

$$(f^{-1})'(f(a)) = (f'(a))^{-1}.$$

Důkaz věty o implicitním zobrazení případ $\mathbb{R}^2$

$F: M\subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad F(x,y)=0$ – grafem $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$(x_0,y_0)\in M$ $\quad F(x_0,y_0)=0$ $\quad \frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)\neq 0$

Potom

$\exists\, O(x_0), U(y_0)$ .... $f: O(x_0)\to O(y_0)$

Definujeme $G(x,y)=(x,F(x,y))$ $\qquad G:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$

$$G=\begin{pmatrix} pr_1(x,y)\\ F(x,y)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g^1 \\ g^2\end{pmatrix}$$

$$G'(x_0,y_0)=\begin{pmatrix}1&0\\ \frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)\end{pmatrix} \qquad \det G'(x_0,y_0)\neq 0$$

Na G můžeme použít větu o inverzním zobrazení

$\exists\, U,V\subset\mathbb{R}^2$ $\quad G^{-1}:V\to U$ $\qquad G:U\to V$

$$G^{-1}=\begin{pmatrix} \\ g^{-1}\end{pmatrix} \quad G^{-1}(x,y)=\begin{pmatrix}x\\ g^{-1}(x,y)\end{pmatrix} \qquad (x_0,y_0)\mapsto (x_0,0)$$

Položíme $\underline{f(x)} := pr_2\circ G^{-1}(x,0)$ ..... $f(x)=g^{-1}(x,0)$

Pro libovolné x

$$(x, F(x,f(x))) = G(\underbrace{x}_{=pr_1(x,0)}, f(x)) = G(pr_1(x,0), pr_2(G^{-1}(x,0)))=$$

$$= G\circ G^{-1}(x,0) = (x,0) \ \dots \ F(x,\underbrace{f(x)}_{y})=0$$

$F(x,f(x))=0$ – to jsem chtěl