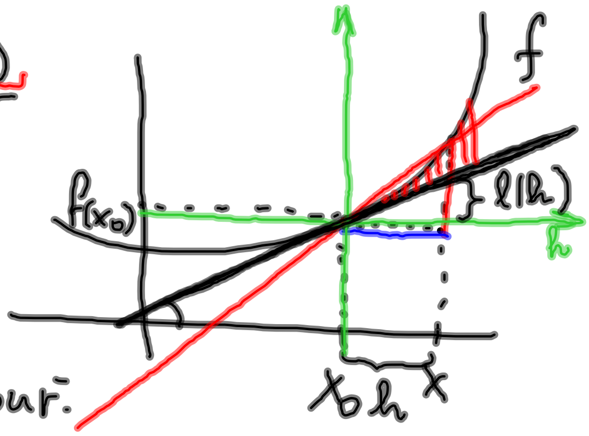
Derivace funkcí více proměnných

Zopakování derivace funkce $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$x_0\in\mathbb{R}$

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$



$l:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ v zelených souř.

$l(h)=\underbrace{f'(x_0)}_{\text{číslo}}\cdot h$ – diferenciál f v x_0 $df(x_0)$

Fréchetova derivace

$f: U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ $x \in U$ f diferencoval. v x

když existuje lineární zdorazení $l: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|f(x+h) - f(x) - l(h)\|}{\|h\|} = 0 \quad \exists\, \sigma(h) = f(x+h) - f(x) - l(h)$$

l – je určeno jednoznačně.

označ.: $f'(x) \equiv l$

Příklady $f \equiv 0$ $l \equiv 0$

f – lineární $l = f$

Věta:

Buď $f: U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ $x \in U$; f má derivaci v x

Potom f je spojité v x.

Důkaz:

Ukážeme, že potom $\lim_{h \to 0} f(x+h) = f(x)$.

$$\Longleftrightarrow \lim_{h \to 0} f(x+h) - f(x) = 0 \Longleftrightarrow \lim_{h \to 0} \sigma(h) + l(h) = 0$$

$$\Longleftrightarrow \lim_{h \to 0} \sigma(h) = 0$$

Věta (o derivaci součtu a násobku)
Buďte $f, g : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $x \in U$, $c \in \mathbb{R}$.

① f, g mají derivaci v x, potom i $f+g$ má derivaci v x
$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x);$$

② f má derivaci v x, potom i $c.f$ má derivaci v x
$$(cf)'(x) = c \cdot f'(x).$$

Důkaz:

① Máme dokázat, že $f+g$ má derivaci $f'(x)+g'(x)$
$$\lim_{h\to 0} \frac{\|(f+g)(x+h) - (f+g)(x) - (f'(x)+g'(x))(h)\|}{\|h\|} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|f(x+h) - f(x) - f'(x)(h) + g(x+h) - g(x) - g'(x)(h)\|}{\|h\|} =$$

$$\leq \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{\|f(x+h) - f(x) - f'(x)(h)\|}{\|h\|}}_{=0} + \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{\|g(x+h) - g(x) - g'(x)(h)\|}{\|h\|}}_{=0}$$

② Mám dokázat, že $c \cdot f$ má v x derivaci $c \cdot f'(x)$
$$\lim_{h\to 0} \frac{\|(c\cdot f)(x+h) - (cf)(x) - (c \cdot f'(x))(h)\|}{\|h\|} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\|c \cdot (f(x+h)) - c \cdot f(x) - c \cdot f'(x)(h)\|}{\|h\|} =$$

$$= |c| \lim_{h\to 0} \frac{\|f(x+h) - f(x) - f'(x)(h)\|}{\|h\|} = 0.$$

Věta (o derivaci složené funkce)

Nechť $f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $g: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$; f difer. v $x \in U$ a g je difer. v $f(x) =: y$.

Potom $g \circ f$ je diferencovatelné v x a platí

$$(g \circ f)'(x) = \underbrace{g'(f(x))}_{l_g} \circ \underbrace{f'(x)}_{l_f}.$$

Důkaz:

$$\sigma_f(h) = f(x+h) - f(x) - l_f(h)$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\| g \circ f(x+h) - g \circ f(x) - l_g(l_f(h)) \|}{\|h\|} =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\| g(f(x+h)) - g(f(x)) - l_g(f(x+h) - f(x) - \sigma_f(h)) \|}{\|h\|}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\| g(f(x+h)) - g(f(x)) - l_g(f(x+h)) - l_g(y) - l(\sigma_f(h)) \|}{\|h\|}$$

$$\leq \lim_{h \to 0} \frac{\| g(f(x+h)) - g(f(x)) - l_g(f(x+h) - f(x)) \|}{\|h\|} +$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\| l_g(f(x+h) - f(x) - l_g(y) \|}{\|h\|} +$$

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$