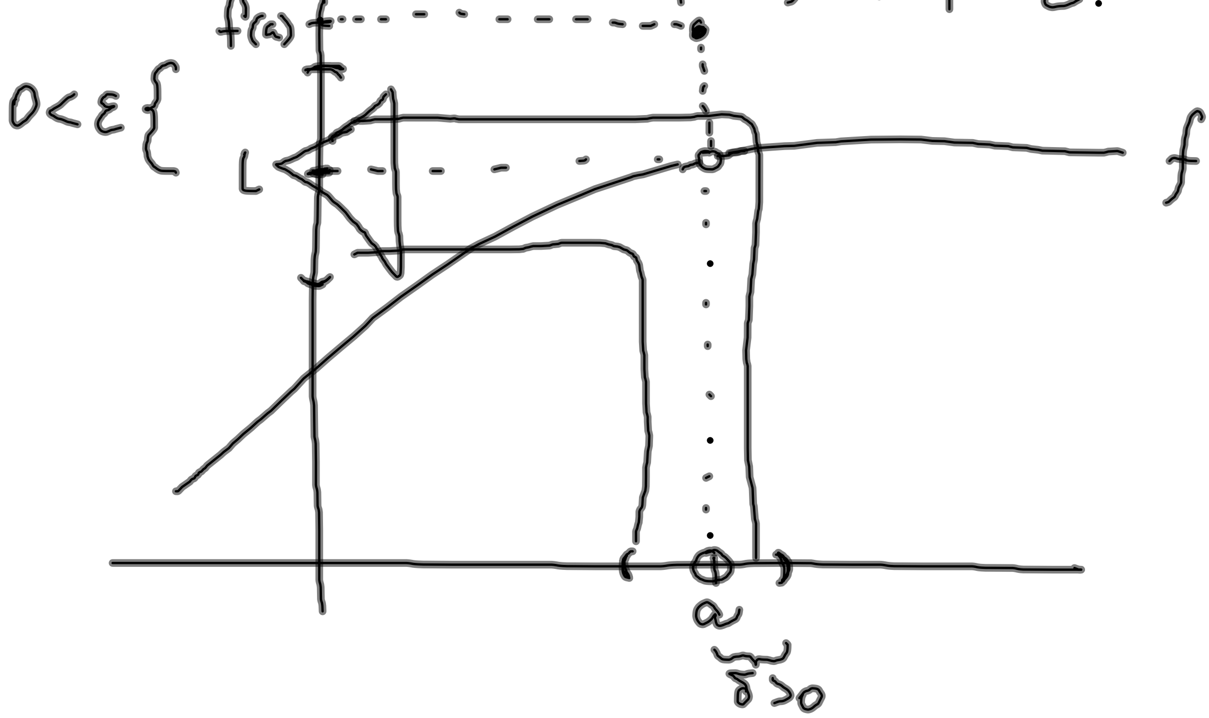
2. přednáška 27. září 2011

Limita

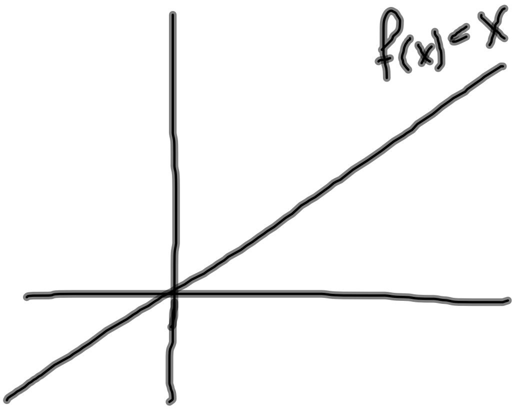
Funkce $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $a \in \mathbb{R}$

$\lim_{x \to a} f(x) = L$ ← číslo L je limitou funkce f v bodě a jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $x \neq a$ $|x - a| < \delta$ potom $|f(x) - L| < \varepsilon$.



Příklady

① $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = x$

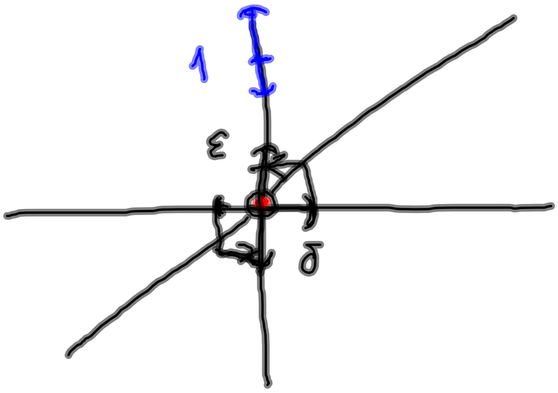


$a = 0$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0$$

② $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \dfrac{x^2}{x}$

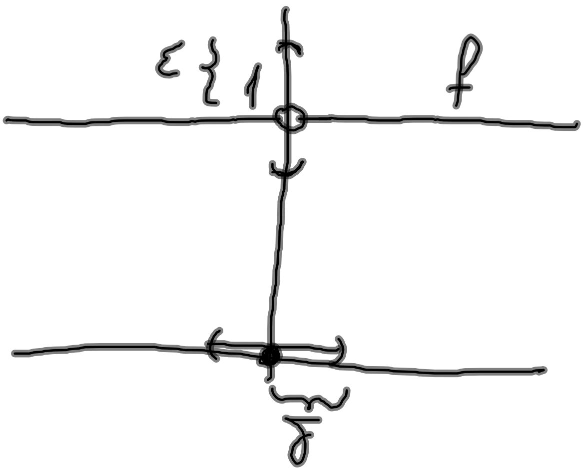
$a = 0$



$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0$$

③ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = |\operatorname{sgn} x|$

$a = 0$



$$\lim_{x \to 0} f(x) = 1$$

Limita $f:\Omega\subset\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$

a – hromadný bod Ω v každém okolí a leží nějaký bod různý od a z Ω

Prvek $L\in\mathbb{R}^m$ je limitou f v bodě a a píšeme

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

když $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0$ takové, že pro každé $x\neq a$ $x\in\delta$-okolí a potom $f(x)\in\varepsilon$-okolí L

$$\underbrace{\|x-a\|_{\mathbb{R}^n}<\delta}_{\text{prstencové okolí } a \text{ poloměru } \delta \ \mathring{U}} \qquad \underbrace{\|f(x)-L\|_{\mathbb{R}^m}<\varepsilon}_{V}$$

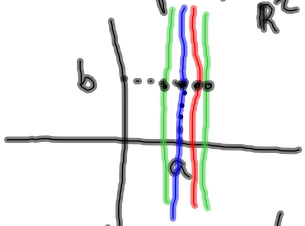
$$f(\mathring{U})\subset V$$

$f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m \qquad f: f^1, f^2, \dots, f^m$

složky funkce f

$f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^1$

Speciální případ $\mathbb{R}^2$ $\quad f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad (a,b) \in \mathbb{R}$



Postupné limity

$$\lim_{x\to a}\left(\lim_{y\to b} f(x,y)\right) = L_1$$

$$\lim_{y\to b}\left(\lim_{x\to a} f(x,y)\right) = L_2$$

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$$

Věta (o postupných limách)
Nechť $f:\Omega\subset\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a - hrom. bod Ω uvažuj limity L_1, L_2, L.
Pokud L_1, L_2, L existují, potom se rovnají.
Na druhou stranu existují funkce kde L_1, L_2 existují a rovnají se ale L neexistuje

Příklady:

$$\lim_{x,y\to 0,0} \frac{2xy}{x^2+y^2}$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} \frac{2xy}{x^2+y^2}\right) = \lim_{y\to 0} 0 = 0$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} \frac{2xy}{x^2+y^2}\right) = \lim_{x\to 0} 0 = 0$$

$$\lim_{x,y\to 0,0} \frac{2xy}{x^2+y^2} = \Big|\, y=kx \,\Big|\, \lim_{x\to 0} \frac{2x\cdot kx}{x^2+k^2x^2} = \lim_{\substack{x\to 0\\ \neq 0}} \frac{2k}{1+k}$$

Věta (o počítání s limitami)

Nechť $f, g : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a - hromadný Ω

- existují-li $L_1 = \lim_{x \to a} f(x)$, $L_2 = \lim_{x \to a} g(x)$ a jsou konečné

  potom exist. $\lim_{x \to a} (f \overset{\pm}{\underset{;}{\cdot}} g)(x) = L_1 \overset{\pm}{\underset{;}{\cdot}} L_2$

- Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ $a \in \mathbb{R}^n$

  jestliže g je spojitá, existuje $L = \lim_{x \to a} f(x)$ potom

  $$\lim_{x \to a} g(f(x)) = g(L) = g(\lim_{x \to a} f(x))$$

- Nechť $f, g, h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $f \leq g \leq h$ $a \in \mathbb{R}^n$

  jestliže existují $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L$

  potom existuje $\lim_{x \to a} g(x) = L$.

Př:
$$\lim_{x,y \to 0,0} \frac{x^3y - xy^3}{x^2 + 2y^2}$$

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \leq & \left| \dfrac{x^3y - xy^3}{x^2 + 2y^2} \right| & \leq & \boxed{} \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ 0 & & & & 0 \end{array}$$

Limita posloupnosti v $\mathbb{R}^n$

$(x_k)_{k=1}^{\infty}$ – posloupnost

$x_1 = (\underline{x_1^1}, x_1^2, \ldots, x_1^n)$, $x_2 = (\underline{x_2^1}, x_2^2, \ldots, x_2^n), \ldots, x_k, \ldots$

$\lim \; x_1^1, \; x_2^1, \; x_3^1, \ldots, x_k^1, \ldots = L_1$

$\lim \; x_1^2 \; x_2^2 \; x_3^2 \ldots = L_2$

$\vdots$

$\lim \; x_1^n \; x_2^n \; x_3^n \ldots = L_n$

Věta posloupnost $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ bodu $\mathbb{R}^n$ má limitu právě když existují limity $L_1, L_2, \ldots, L_n$ a jsou konečné a platí

$$\lim_{k \to \infty} (x_k) = (L_1, L_2, \ldots, L_n)$$

Zpět ke spojitým funkcím

Věta:

Buď $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ spojitá funkce množina $A \subset \mathbb{R}^n$ kompaktní / souvislá

Potom $f(A) \subset \mathbb{R}$ je kompaktní / $\underbrace{\text{souvislá}}_{\text{interval}}$

Důsledek

Spojitá funkce $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ nabývá na kompaktní množině maxima a minima