Totopologie

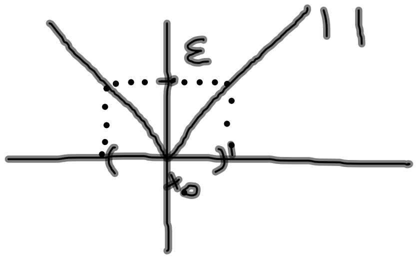
$f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ $x_0\in\mathbb{R}$ f spojitá $x_0$

$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x\ |x-x_0|<\delta$ platí $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$

$x\in\underbrace{(x_0-\delta, x_0+\delta)}_{I}$ $f(x)\in\underbrace{(f(x_0)-\varepsilon, f(x_0)+\varepsilon)}_{J}$

$\forall J$ interval (okolí $f(x_0)$) $\exists I$ interval (okolí $x_0$)

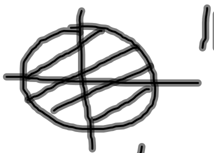
platí $f(J)\subset I$




IX 20-12:56

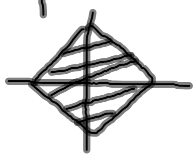
Normy na $\mathbb{R}^2$

$\|(x,y)\|_2 := \sqrt{x^2+y^2}$ . . . . .

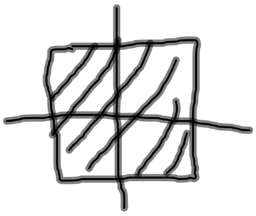


$\|(x,y)\| < 1$

$\|(x,y)\|_1 := |x|+|y|$ . . . . .



$\|(x,y)\|_\infty := \max\{|x|,|y|\}$ . . . . .



IX 20-13:39

# Spojitost

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $x_0 \in \mathbb{R}$ $f$ spojité v $x_0$

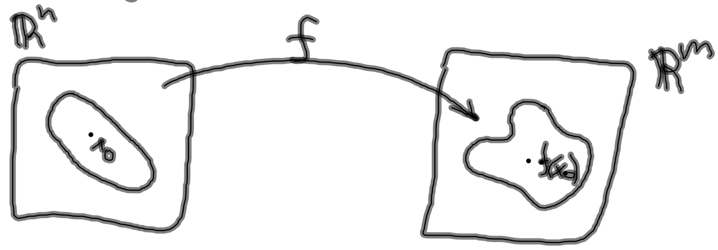
$\underbrace{\forall \varepsilon\text{-okolí } J \text{ bodu } f(x_0)}_{\|y - f(x_0)\| < \varepsilon}$ $\underbrace{\exists \delta\text{-okolí } I \text{ bodu } x_0}_{\|x - x_0\| < \delta}$

tak, že $f(I) \subset f(J)$

Podobně pro $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Věta.

Definice spojitosti $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je nezávislá na volbě normy (tvaru okolí).




IX 20-13:46

Funkce $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$(x_1, x_2, \dots, x_n) \longmapsto (y_1, y_2, \dots, y_m) = f(x_1, \dots, x_n)$

$(f^1(x_1, \dots, x_n), \dots, f^m(x_1, \dots, x_n))$

$f^1, f^2, \dots, f^m: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – složky $f$.

Věta.

funkce $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je spojitá právě když jsou spojité všechny její složky.

---

Příklad

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $(x, y) \longmapsto (x+y, x-y)$

$f^1: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $(x, y) \longmapsto x+y$

$f^2: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $(x, y) \longmapsto x-y$

$f^1$ – spojitá? $(x_0, y_0) \longmapsto x_0 + y_0$ $J$ ε okolí $x_0 + y_0$

budu hledat δ-okolí $I$ bodu $(x_0, y_0)$

$\varepsilon > 0$ $I$: $(x, y)$: $\|(x, y) - (x_0, y_0)\|_1 < \underset{\delta}{\overset{\|}{\varepsilon}}$


$|f(x, y) - x_0 - y_0| < \varepsilon$

$|x + y - x_0 - y_0| = |x - x_0 + y - y_0|$

$\leq |x - x_0| + |y - y_0| < \varepsilon$

$\|(x, y) - (x_0, y_0)\|_1 <$

$\|(x - x_0, y - y_0)\|_1 <$

$|x - x_0| + |y - y_0| <$

IX 20-14:00

Věta o součinu a součtu spojitých funkcí

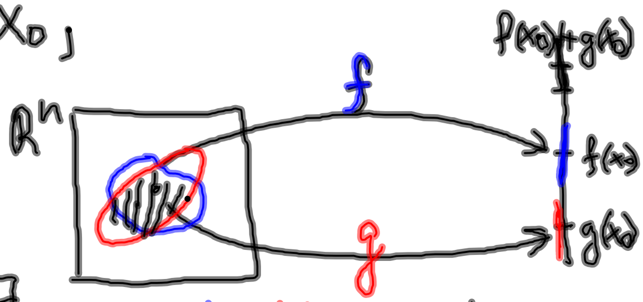
$f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ spojité v $x_0$. Potom

- $f+g$ je spojitá v $x_0$;
- $f \cdot g$ je spojitá v $x_0$;

Důkaz

$f+g$:

volím $\varepsilon > 0$




ze spojitosti $f, g$ k $\frac{\varepsilon}{2}$ $\exists$ okolí $U$ a $V$ tak, že

$f(U) \subset (f(x_0) - \frac{\varepsilon}{2}, f(x_0) + \frac{\varepsilon}{2})$

$|f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$

$|g(x) - g(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$

$$|f(x)+g(x) - f(x_0) - g(x_0)| \leq \underbrace{|f(x) - f(x_0)|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|g(x) - g(x_0)|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon$$

IX 20-14:23

IX 20-14:08

IX 20-13:52