Lokální extrémy

Příklad:

$$f(x,y,z) = x^3 + y^2 + \frac{z^2}{2} - 3xz - 2y + 2z$$

Najít lokální extrémy

Použijeme nutnou podmínku existence lok. extrému, hledáme body s nulovými parciálními derivacemi

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 3x^2 - 3z = 0 \dots\to z = x^2 \qquad z = 1,4$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 2y - 2 = 0 \Rightarrow y = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = z - 3x + 2 = 0 \dots\to x^2 - 3x + 2 = 0 \qquad x = 1,2$$

Nutná podmínka je splněna v bodech

$(1,1,1)$ a $(2,1,4)$

Ověříme postačující podmínku v těchto bodech

$$f''(x,y,z) = \begin{pmatrix} 6x & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad f''(1,1,1) = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} D_1 = 6 \\ D_2 = 12 \\ D_3 = 12 - 18 = -6 \end{array}$$

indefinitní $\to$ není extrém

$$f''(2,1,4) = \begin{pmatrix} 12 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} D_1 = 12 \\ D_2 = 24 \\ D_3 = 24 - 18 = 6 \end{array}$$

pozitivně definitní $\to$ lok. minimum.

Vázané extrémy.

Nechť $f: X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $M \subset X$, $M = \{x \in X \mid g_1(x)=0, \dots, g_m(x)=0\}$

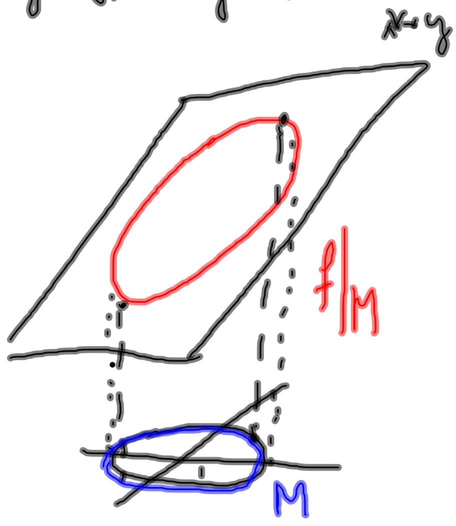
$f, g_1, \dots, g_m$ – spoj. diferencovatelné

Hledáme lok. extrém f na množině M

bod $x_0 \in M$ takový, že $\forall x \in U$ okolí x_0 $f(x) < f(x_0)$ … x_0 lok max na M

bod $x_0 \in M$ takový že $\forall x \in U$ okolí x_0 $f(x) > f(x_0)$ … x_0 lok minimum

Příklad $f(x,y) = x+y$ $\quad M: g(x,y) = x^2+y^2-1 = 0$



Způsoby řešení:

① Vyjádřit $y = h(x)$
a dosadit do f … $f(x, h(x))$

• $y = \sqrt{1-x^2}$

$$f|_{\text{část } M}(x) = x + \sqrt{1-x^2}$$

$$f'|_{\text{část } M}(x) = 1 + \frac{1}{2}\frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$

$$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = +1$$

$$x \geq 0 \qquad x = \sqrt{1-x^2}$$

$$x^2 = 1 - x^2$$

$$2x^2 = 1$$

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2} \dots y = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$f''|_{\text{část } M}(x) = 0 + - \frac{1 \cdot \sqrt{1-x^2} + x \cdot \left(-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)}{1-x^2}$$

$f''\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) < 0$ $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ … lok. max

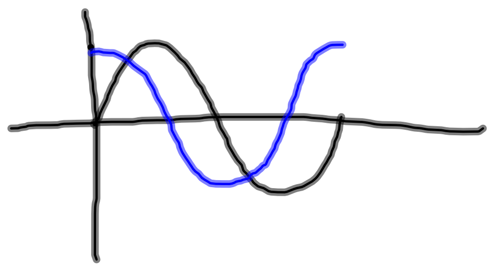
$y = -\sqrt{1-x^2}$ … f ..

. … $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

lok. minimum.

② Druhý způsob – parametrizace M.

$x = \cos t$
$y = \sin t$ $\quad t = 0 \dots 2\pi$



$f|_M(t) = \cos t + \sin t$

$f'|_M(t) = -\sin t + \cos t = 0 \dots \sin t = \cos t \dots \frac{\pi}{4}; \frac{5}{4}\pi$

$t = \frac{\pi}{4}$ $\quad t = \frac{5}{4}\pi$ $\quad \frac{\sin t}{\cos t} = \operatorname{tg} t = 1$

$x = \cos t \dots \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$y = \sin t \dots \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ $\quad -\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$f''|_M(t) = -\cos t - \sin t$

$f''|_M\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2} < 0$ v bodě $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ lokální maxim

$f''|_M\left(\frac{5}{4}\pi\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} > 0$ $\quad \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ lokální minimum.

③ způsob

Lagrangeovy multiplikátory.

Věta (Nutná podmínka pro Lagrangeovy multiplikátory)

Nechť $f: X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $M \subset X$, $M = \{x \in X \mid g_1(x) = 0, \dots, g_m(x) = 0\}$

$f, g_1, \dots, g_m$ – spoj. diferencovatelné matice $\left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}\right)$ má max. hodnost.

Definujme

$$L(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m) = f(x_1, \dots, x_n) + \lambda_1 g_1(x_1, \dots, x_n) + \dots + \lambda_m g_m(x_1, \dots, x_n)$$

Potom

Když $f|_M$ má lokální extrém $(a_1, \dots, a_n)$ tak existují $\bar\lambda_1, \dots, \bar\lambda_m$ tak, že $\left(\frac{\partial L}{\partial x_i \lambda}\right) = 0.$

Věta (nutná podm. Lagrang. multiplikátory pro $\mathbb{R}^2$)

Nechť $f: X \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, M je dána $g(x,y) = 0$, f, g – spoj. difer.

$\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}$ nejsou současně na M rovny nule. definujme

$$L(x, y, \lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y).$$

Potom jestliže $f|_M$ má lok. extrém v (x_0, y_0) pak existuje $\bar\lambda \in$

$$\frac{\partial L}{\partial x}(x_0, y_0, \bar\lambda) = 0; \quad \frac{\partial L}{\partial y}(x_0, y_0, \bar\lambda) = 0; \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda}(x_0, y_0, \bar\lambda) = 0.$$

Př:

$$f(x,y) = x + y, \quad g(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$$

$$L(x, y, \lambda) = x + y + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x}(x,y,\lambda) = 1 + \lambda \cdot 2x = 0 \quad \dots \quad x = -\frac{1}{2\lambda}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y}(x,y,\lambda) = 1 + \lambda \cdot 2y = 0 \quad \dots \quad y = -\frac{1}{2\lambda}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 - 1 = 0$$

$$\frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{4\lambda^2} = 1$$

$$2\lambda^2 = 1 \quad \lambda = \pm$$

Věta (Lagrangeovy multiplikatory - postačujúci podminka)

Nechť $f: X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $M \subset X$, $M = \{x \in X \mid g_1(x) = 0, \dots, g_m(x) = 0\}$ $f, g_1, \dots, g_m$ - spoj. diferencovatelné, $\exists \bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \dots, \bar{\lambda}_m$ takové, že

$$L(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n) + \bar{\lambda}_1 g_1(x_1, \dots, x_n) + \dots + \bar{\lambda}_m g_m(x_1, \dots, x_n)$$

má lokální extrém v $(a_1, \dots, a_n) \in M$

Potom $f|_M$ má lokální vázaný extrém v $(a_1, \dots, a_n)$ stejného druhu.

Věta (Lagrangeovy multip. - postač. podmínka $\mathbb{R}^2$)

Nechť $f: X \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $M: g(x,y) = 0$, f, g - spoj. difer. existuje $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}$: $L(x,y) = f(x,y) + \bar{\lambda} \cdot g(x,y)$ má v $(x_0, y_0) \in M$ lok. extrém.

Potom má $f|_M$ vázaný lok. extrém v (x_0, y_0) stejného druhu.