Zopakování Parciálních derivací vyšších řádů

$\frac{\partial f}{\partial x}$: Okolí bodu (x_0, y_0)

Parciální derivaci 2. řádu jako parciální derivaci

$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x_0, y_0) \dots \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)$

$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x_0, y_0) \dots \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)$

$\dots \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$

$\dots \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)$

Věta

Jsou-li parciální derivace f druhého řádu na okolí bodu (x_0, y_0) spojité potom

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$$

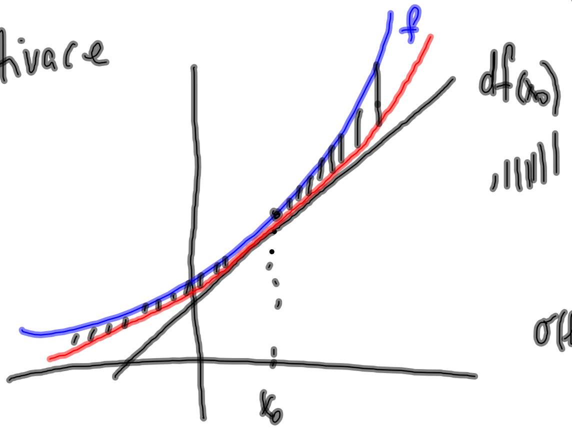
Kvadratické formy

$z = ax^2 + by^2 + cxy$ ..... $\begin{pmatrix} a & c/2 \\ c/2 & b \end{pmatrix}$

$$z = (x,y)\begin{pmatrix} a & c/2 \\ c/2 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (ax + cy/2,\ cx/2 + by)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =$$

$$= ax^2 + cxy/2 + cxy/2 + by^2 = ax^2 + by^2 + cxy$$

Motivace



$\sigma(h) = f(x_0+h) - df(x_0)(h) - \frac{1}{2} d^2f(x_0)(h)$

$\sigma(h) \longrightarrow 0$

hodně rychle

Věta (Taylorova věta funkce více proměnných)

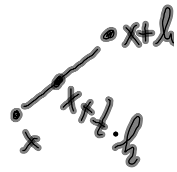
Nechť $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je na okolí U bodu $x \in \mathbb{R}^n$ $n+1$-krát spojitě diferencovatelná, h – takové, že $x + h \in U$

Pak platí

$$f(x+h) = f(x) + df(x)(h) + \frac{1}{2!} d^2f(x)(h) + \ldots + \frac{1}{n!} d^nf(x)(h) + R_n(x,h)$$

kde

$$R_n(x,h) = \frac{1}{(n+1)!} \cdot d^{n+1}(x+th) \qquad t \in (0,1)$$



Důkaz ($\mathbb{R}^2$)

Převedu na případ $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad F = f \circ S$ $\quad S: [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ $\quad t \overset{S}{\longmapsto} \begin{pmatrix} x + t h_1 \\ y + t \cdot h_2 \end{pmatrix}$

teď aplikuji Taylor. věta $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$F(1) = \underset{\sim}{F(0)} + \underset{\sim}{F'(0)} \cdot (1-0)^1 + \frac{1}{2!} \underset{\sim}{F''(0)} \cdot (1-0)^2 + \ldots \ldots + \frac{1}{n!} F^{(n)}(0)$$

Extrémy funkcí více proměnných

$f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

má v bodě $x \in \mathbb{R}^n$ lokální minimum (maximum)
když existuje okolí U bodu x takové, že
$\forall y \in U$ $y \neq x$ platí $f(y) \geq f(x)$

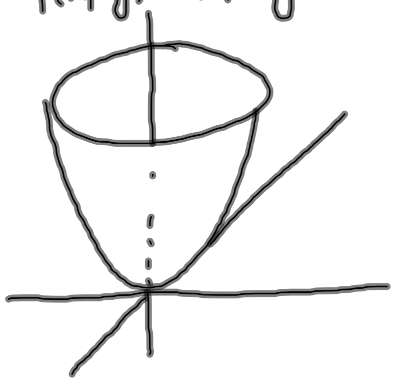
$>$ (ostré)

$\leq$ (maximum)

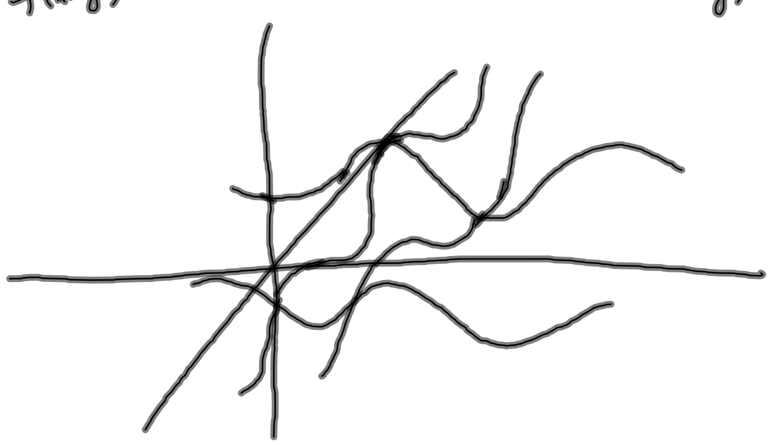
$<$ (ostré maximum)

Příklady

$f(x,y) = x^2 + y^2$ lokální minimum v $(0,0)$



$f(x,y) = \sin(xy)$ $\sin(x) \cdot \sin(y)$



Věta (nutná podmínka existence lok. extrému)
Nechť $f: X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je diferencovatelná a nabývá v bodě $x_0 \in X$ lokálního maxima (resp. minima)
Potom $df(x_0) = 0$.

Důkaz:
Jak vypadá $df(x_0) = ?$ ... matice $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0)\right)$

Sporem; předpokládám, že $\frac{\partial f}{\partial x^k}(x_0) \neq 0$.

$$\frac{\partial f}{\partial x^k}(x_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^k + t, \dots, x_0^n) - f(x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^n)}{t} = a > 0$$

Předp. $\frac{\partial f}{\partial x^k}(x_0) = a > 0$

Existuje okolí $(-\delta, \delta)$ že $\forall t \in (-\delta, \delta)$

$$\frac{f(x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^k + t, \dots, x_0^n) - f(x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^n)}{t} > 0$$

$t \in (0, \delta)$

$$f(x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^k + t, \dots, x_0^n) - f(x_0^1, \dots, x_0^n) > at > 0$$

$\longrightarrow$ v x_0 není maximum

$t \in (-\delta, 0)$

$$f(x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^k + t, \dots, x_0^n) - f(x_0^1, \dots, x_0^n) < at < 0$$

$\longrightarrow$ v x_0 není lok. minimum.

Zopakování - kvadratické formy

Př.: $(a,b) \longmapsto a^2+b^2$ ..... $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Pozitivně definitní

$\forall (a,b) \quad a^2+b^2>0$

Negativně definitní

$\forall (a,b) \quad \boxed{-a^2-b^2} < 0$

$(a,b) \longmapsto -a^2-b^2$

Indefinitní $\lessgtr 0$

$f(ab)=4ab$

Věta (Postačující podmínka existence lokálního extr.)
Buď $f: X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ spojitě diferencovatelná na okolí U bodu $x_0 \in X$, kde $df(x_0) = 0$.
Potom
1. Je-li $d^2f(x_0)$ negativně definitní, pak f má v x_0 lok. max.
2. Je-li $d^2f(x_0)$ pozitivně definitní, pak f má v x_0 lok. minimum
3. Je-li $d^2f(x_0)$ indefinitní, pak f nenabývá v x_0 lok. extrém