1a. Více o normovaných prostorech

1.6. Konečněrozměrné normované prostory. V odstavci 1.2. jsme zavedli různé normy na prostoru $\boldsymbol{R}^n$ a o některých z nich jsme ukázali, že jsou ekvivalentní. Nyní ukážeme, že se jedná o speciální případ obecnějšího tvrzení.

Věta 1.7. *Libovolné dvě normy na konečněrozměrném vektorovém prostoru jsou ekvivalentní.*

D ů k a z . Stačí dokázat, že libovolné dvě normy na $\boldsymbol{R}^n$ jsou ekvivalentní (proč?). Nechť tedy $\|.\|$ je norma na $\boldsymbol{R}^n$. Dokážeme, že je ekvivalentní normě $\|.\|_1$.

Označme $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ kanonickou bázi v $\boldsymbol{R}^n$ a položme $M = \max\{\|e_1\|, \|e_2\|, \ldots, \|e_n\|\}$. Pro libovolný prvek $x \in \boldsymbol{R}^n$ platí

$$\begin{aligned}\|x\| &= \|x^1 e_1 + x^2 e_2 + \ldots + x^n e_n\| \le |x^1| \cdot \|e_1\| + |x^2| \cdot \|e_2\| + \ldots + |x^n| \cdot \|e_n\| \\ &\le |x^1| M + |x^2| M + \ldots + |x^n| M = M\|x\|_1.\end{aligned}$$

Tím je dokázáno, že norma $\|.\|$ je slabší než norma $\|.\|_1$ (Věta 1.1).

Dokažme nyní naopak, že norma $\|.\|$ je silnější než norma $\|.\|_1$. Položme

$$S = \{x \in \boldsymbol{R}^n \mid \|x\|_1 = 1\} \tag{1.6.1}$$

(jednotková sféra vzhledem k normě $\|.\|_1$ se středem v nule). Množina S je vzhledem k normě $\|.\|_1$ ohraničená. V topologii normy $\|.\|_1$ je také uzavřená (jako rozdíl $\overline{B}^1_{\|.\|_1}(0) \setminus B^1_{\|.\|_1}(0)$). Je tedy v této topologii kompaktní, což znamená, že je kompaktní i ve slabší topologii normy $\|.\|$ (proč?). Dále: funkce $\|.\| : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ je vzhledem k normě $\|.\|$ spojitá, nabývá tedy na množině S minimum m. Je jistě $m > 0$ a $\overline{B}^m_{\|.\|}(0) \subset \overline{B}^1_{\|.\|_1}(0)$. Podle Věty 1.1 je tedy norma $\|.\|$ silnější než norma $\|.\|_1$.

Tím je věta dokázána.

1.7. Prostory lineárních zobrazení. V tomto odstavci zavedeme normovanou strukturu na prostoru lineárních zobrazení dvou vektorových prostorů.

Mějme dva konečněrozměrné normované prostory X, Y. Označme $L(X,Y)$ vektorový prostor lineárních zobrazení z X do Y.

Tento vektorový prostor je, jak víme, konečněrozměrný. Jeho dimenze je rovna součinu dimenzí prostorů X a Y.

Pro každé $l \in L(X,Y)$ položme

$$\|l\| = \max_{x \in \overline{B}^1(0)} \|l(x)\| \tag{1.7.1}$$

(množina $\overline{B}^1(0)$ je kompaktní, zobrazení l a $\|.\|$ jsou spojitá; kompozice těchto zobrazení na této množině tedy má maximum).

Předpisem (1.7.1) je definováno zobrazení $\|.\| : L(X,Y) \to \boldsymbol{R}$.

Lemma 1.8. *Zobrazení $\|.\| : L(X,Y) \to \boldsymbol{R}$ je norma.*

D ů k a z . Musíme ověřit podmínky z definice normy.

1. Nechť $l \ne 0$. Pak existuje vektor $x \in X$, pro nějž je $l(x) \ne 0$. Platí $\|x\| \ne 0$ a pro vektor $x_0 = x/\|x\|$ platí $x_0 \in \overline{B}^1(0)$, $\|l(x_0)\| > 0$. Tedy $\|l\| > 0$.

2. Mějme $l \in L(X,Y)$ a $c \in \boldsymbol{R}$. Platí

$$\|c \cdot l\| = \max_{x \in \bar{B}^1(0)} \|c \cdot l(x)\| = \max_{x \in \bar{B}^1(0)} |c| \cdot \|l(x)\| = |c| \cdot \max_{x \in \bar{B}^1(0)} \|l(x)\| = |c| \cdot \|l\|.$$

3. Pro $l_1, l_2 \in L(X,Y)$ dostáváme

$$\begin{aligned} \|l_1 + l_2\| &= \max_{x \in \bar{B}^1(0)} \|(l_1 + l_2)(x)\| = \max_{x \in \bar{B}^1(0)} \|l_1(x) + l_2(x)\| \le \max_{x \in \bar{B}^1(0)} (\|l_1(x)\| + \|l_2(x)\|) \\ &\le \max_{x \in \bar{B}^1(0)} \|l_1(x)\| + \max_{x \in \bar{B}^1(0)} \|l_2(x)\| = \|l_1\| + \|l_2\|. \end{aligned}$$

Věta 1.9. *Pro libovolný vektor $x \in X$ a lineární zobrazení $l \in L(X,Y)$ platí*

$$\|l(x)\| \le \|l\| \cdot \|x\|. \tag{1.7.2}$$

D ů k a z . Pro vektor $x_0 = x/\|x\|$ platí $x_0 \in \bar{B}^1(0)$, což podle (1.7.1) znamená, že $\|l(x_0)\| \le \|l\|$. Nyní dostáváme

$$\|l(x)\| = \|x\| \cdot \|l(x_0)\| \le \|x\| \cdot \|l\|. \tag{1.7.3}$$

V případě $X = \boldsymbol{R}^n$ a $Y = \boldsymbol{R}^m$ můžeme místo prvků prostoru $L(X,Y)$ uvažovat matice typu $m \times n$. Přesněji řečeno, zobrazení z $L(\boldsymbol{R}^n, \boldsymbol{R}^m)$ do $M_{m,n}(\boldsymbol{R})$ (to je prostor matic o m řádcích a n sloupcích s reálnými prvky), které lineárnímu zobrazení l přiřadí jeho matici vzhledem ke kanonickým bazím, je izomorfismus vektorových prostorů.

Na prostoru $L(\boldsymbol{R}^n, \boldsymbol{R}^m)$ můžeme tedy kromě normy (1.7.1) uvažovat i libovolnou jinou normu, kterou umíme zavést na prostoru $M_{m,n}(\boldsymbol{R})$. Tyto normy budou podle Věty 1.7 ekvivalentní. Jelikož prostor $M_{m,n}(\boldsymbol{R})$ je izomorfní s prostorem $\boldsymbol{R}^{mn}$ (matice typu $m \times n$ jsou mn-tice čísel), můžeme použít například libovolnou normu zavedenou v odstavci 1.2. Tedy, pro matici $A = (a^i_j)$ můžeme položit

$$\begin{aligned} \|A\|_1 &= \sum_{i,j} |a^i_j|, \\ \|A\|_2 &= \sqrt{\sum_{i,j} \left(a^i_j\right)^2}, \\ \|A\|_\infty &= \max_{i,j} |a^i_j|. \end{aligned} \tag{1.7.4}$$

Věta 1.10. *Nechť $|.|$ je libovolná norma na prostoru $L(X,Y)$. Pak existuje číslo M takové, že pro každé $l \in L(X,Y)$ a $x \in X$ platí*

$$\|l(x)\| \le M |l| \cdot \|x\|. \tag{1.7.5}$$

D ů k a z . Plyne z vět 1.1, 1.7, a 1.9.