Dělení polynomů se zbytkem

$f(x)$, $g(x)$ existují polynomy $q(x)$, $r(x)$

$$\underline{f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x)}$$

$$\deg r(x) < \deg g(x)$$

Eukleidův algoritmus

Mějme $f(x), g(x)$ - polynomy - nenulové
$\deg f(x) \geq \deg g(x)$. Existuje posloupnost
polynomů $r_0, r_1, r_2, \ldots$ tak, že $r_0(x) = f(x), r_1(x) = g(x)$

$$r_k(x) = r_{k+1}(x) \cdot q_{k+1}(x) + r_{k+2}(x)$$

existuje nejmenší $n \in \mathbb{N}$, že $r_{n+1}(x) = 0$. Potom $r_n(x)$ je
největším společným dělitelem $f(x), g(x)$.

Důkaz: Ověříme, že takové $n \in \mathbb{N}$ existuje.

$\deg r_1 > \deg r_2(x) > \deg r_3(x) > \ldots$

Ověřme, že $r_n(x)$ je dělitelem $f(x), g(x)$

$$r_{n-1}(x) = r_n(x) \cdot q_n(x) \qquad r_n \mid r_{n-1}$$

$$r_{n-2}(x) = r_{n-1}(x) \cdot q_{n-1}(x) + r_n(x) \qquad r_n \mid r_{n-2}$$

$$= r_n(x) q_n(x) \cdot q_{n-1}(x) + r_n(x)$$

$$r_{n-3}(x) = r_{n-2}(x) \cdot q_{n-2}(x) + r_{n-1}(x) \qquad r_n \mid r_{n-3}$$

$\vdots$

$r_n \mid r_1, \; r_n \mid r_0$

r_n je tedy společný dělitel $f(x), g(x)$.

Ověřme, že r_n je $NSD(f(x), g(x))$.

$d(x)$ - spol. dělitel $f(x), g(x)$

$$r_2(x) = r_0(x) - r_1(x) \cdot q_1(x) \qquad d \mid r_2$$

$$r_3(x) = r_1(x) - r_2(x) \cdot q_2(x) \qquad d \mid r_3$$

$\vdots$

$$\rightarrow \; r_n(x) = r_{n-2}(x) - r_{n-1}(x)\, q_{n-1}(x) \qquad d \mid r_n$$

Tedy $r_n(x)$ je $NSD(f(x), g(x))$

Důsledek 3.3 (Bezoutova věta)

$f(x), g(x)$ – nenulové polynomy, pak existují polynomy
$u(x), v(x)$, takové, že

$$f(x) \cdot u(x) + g(x) \cdot v(x) = h(x)$$

kde $h(x)$ – $NSD(f(x), g(x))$.

Pr.: $f(x) = x^4 + x^2 - 2 \qquad g(x) = x^2 + 2x - 3$

Najdeme NSD $(f(x), g(x))$.

$r_0 \qquad r_1$

$$(x^4 + x^2 - 2) : (x^2 + 2x - 3) = x^2 - 2x + 8 + \frac{-22x + 22}{x^2 + 2x - 3}$$

$$\begin{array}{l}
-(x^4 + 2x^3 - 3x^2) \\
\hline
-2x^3 + 4x^2 - 2 \\
-(-2x^3 - 4x^2 + 6x) \\
\hline
8x^2 - 6x - 2 \\
-(8x^2 + 16x - 24) \\
\hline
-22x + 22
\end{array}$$

r_2

$r_1 \qquad r_2$ — NSD $(f(x), g(x))$

$$(x^2 + 2x - 3) : (x - 1) = x + 3$$

$$\begin{array}{l}
-(x^2 - x) \\
\hline
3x - 3 \\
-(3x - 3) \\
\hline
0
\end{array}$$

r_3

3.2 Kořeny polynomů

$f(x)$ - polynom nad P, číslo $c \in P$

nazveme kořenem $f(c) = 0$

Věta 3.4 (Gaussova, Základní věta algebry)

Každý nekonstantní polynom nad $\mathbb{C}$ má v $\mathbb{C}$ alespoň jeden kořen.

Věta 3.5.

Číslo $c \in P$ je kořenem polynom $f(x)$, právě když $f(x)$ je dělitelný polynomem $x - c$.

Důkaz: Předp. c - kořen $f(x)$.

$$f(x) = (x - c)\,q(x) + \underbrace{r(x)}_{\deg r(x) = 0}$$

$x = c$

$$\underbrace{f(c)}_{=0} = \underbrace{(c - c)\,q(c)}_{=0} + r(c) \Rightarrow r(x) = 0$$

Předp. že $f(x)$ je dělitelný $x - c$

$$f(x) = (x - c) \cdot q(x).$$

$$f(c) = (c - c)\,q(c) = 0$$

Důsledek 3.6 (Rozklad na kořenové činitele)
Nekonstantní polynom $f(x)$ stupně n má n kořenů z $\mathbb{C}$ a lze jej psát ve tvaru

$$f(x) = a_n (x-c_1)(x-c_2) \cdot \_\_\_ \cdot (x-c_n).$$

Nechť c je kořenem polynom $f(x)$. Říkáme, že c je k-násobný kořen $f(x)$ jestliže $f(x)$ je dělitelné $(x-c)^k$ ale $f(x)$ není dělitelné $(x-c)^{k+1}$.

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \_\_\_ + a_1 x + a_0$$

derivace polynomu $f(x)$ je $f'(x)$

$$f'(x) = n \cdot a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \_\_\_ + a_1$$

Př.: x^2 deriva. $2x$

$x^2 + 2x + 1$ $\quad$ $2x + 2$

$= (x+1)^2$