V - vektor. prostor nad P $\dim V = n$

$x \in V$ $(e_1, \dots, e_n)$ - báze V

$(x, e_1, \dots, e_n)$ $\alpha, \beta^1, \dots, \beta^n \in P$

$$\alpha x + \beta^1 e_1 + \dots + \beta^n e_n = 0$$

$$x = \underbrace{-\frac{\beta^1}{\alpha}}\, e_1 - \dots - \underbrace{\frac{\beta^n}{\alpha}}\, e_n$$

Věta 5.3. Nechť V dimenze n, $(e_1, \dots, e_n)$ jeho báze. Je-li $x \in V$ pak existuje systém (x^i) jednoznačně takový, že

$$x = x^1 e_1 + \dots + x^n e_n. \qquad (5.2)$$

Důkaz:

Ověříme jednoznačnost. Předp. $(x'^1, \dots x'^2)$

$$x = x'^1 \cdot e_1 + \dots + x'^n e_n \qquad (5.3)$$

Porovnáme (5.2), (5.3)

$$x^1 e_1 + \dots + x^n e_n = x'^1 e_1 + \dots + x'^n e_n$$

$$\underbrace{(x^1 - x'^1)}_{=0} e_1 + \dots + \underbrace{(x^n - x'^n)}_{=0} e_n = 0$$

$(x^i) = \underline{(1, 0, 0)}$

Věta 5.4. Nechť (e_i), $(\bar{e}_i)$ jsou dvě báze vektor. prostoru V $\dim V = n$. Existuje jednoznačně matice T typu n/n takovári, že jsou-li (x^i) složky vektoru $x \in V$ v bázi (e_i) pak

$$\bar{x}^i = \sum_{j=1}^{n} t^i_j x^j . \qquad \bar{x}^i = t^i_j x^j$$

Důkaz: e_i najdu jejich složky v bázi $(\bar{e}_i)$ třeba $e_1 \dots (t^i_1)$ složky e_1 v bázi $(\bar{e}_i)$

$$e_j = t^i_j \bar{e}_i \qquad (5.5)$$

čili pro $x \in V$ platí $x = x^i \cdot e_i$; $x = \bar{x}^i \bar{e}_i$

$$x^i e_i = \underline{\bar{x}^i \bar{e}_i} = x^j e_j = \underline{x^j t^i_j \bar{e}_i}$$

$$(\bar{x}^i - x^j t^i_j)\bar{e}_i = 0$$

$$\bar{x}^i - x^j t^i_j = 0 \qquad \forall i = 1, \dots, n$$

$$\bar{x}^i = x^j t^i_j$$

$$e_i = \delta^j_i \qquad S = (s^i_j)$$

$$\bar{e}_i = s^k_i e_k \longleftarrow$$

$$\delta^k_j e_k = e_j = t^i_j \bar{e}_i = t^i_j s^k_i e_k$$

$$\delta^k_j e_k = t^i_j s^k_i e_k$$

$$t^i_j s^k_i = \delta^k_j$$

$$T \cdot S = E \qquad S = T^{-1} ; \; T = S^{-1}$$

PODPROSTORY VEKT. PROSTORŮ

V - vektor. prostor, $W \subset V$

W - vektorový podprostor jestliže W je vektor. prostor nad P.

V, $\{0\}$ - triviální podprostory.

Lemma 5.5 Množina $W \subset V$ tvoří vektorový podprostor V jestliže 1. $\forall x, y \in W$ platí $x+y \in W$
2. $\forall \alpha \in P \, \forall x \in W$ platí $\alpha x \in W$.

Příklady podprostorů:

$a_1, \ldots, a_n \in V \quad W = [\![a_1, \ldots, a_n]\!]$

W - vektorový podprostor V

$\underline{x = \alpha^1 a_1 + \alpha^2 a_2 + \ldots + \alpha^n a_n}$, $y = \beta^1 a_1 + \beta^2 a_2 + \ldots + \beta^n a_n$

$a_1, \ldots, a_n$ - generátory podprostoru W

Množina řešení homogenní soustavy o n-neznámých tvoří podprostor $\mathbb{R}^n$

Věta 5.6 Průnik podprostorů V je opět podprostor V.

Důkaz: L_1, L_2 – podprostory V

① $L_1 \cap L_2 \ni x, y$

$x, y \in L_1$; $x, y \in L_2$ to znamená, že $x+y \in L_1$

$x+y \in L_2$

$x+y \in L_1 \cap L_2$.

② $x \in L_1 \cap L_2$, $\alpha \in P$

$x \in L_1$, $x \in L_2$, $\alpha x \in L_1$ $\alpha x \in L_2$ .. $\alpha x \in L_1 \cap L_2$.

Průnik podprostorů L_1, L_2 značíme $L_1 \cap L_2$

Součet podprostorů $L_1 + L_2 = [\![L_1 \cup L_2]\!]$

pokud navíc bude $L_1 \cap L_2 = \{o\}$

potom jde o přímý součet podprostorů $L_1 \dotplus L_2$

$L_1 \oplus L_2$

Veta 5.7. Buď V vektorový prostor dim n.
$L \subset V$ jeho vektorový podprostor dimenze k.
Potom existuje vektorový podprostor L' dim $n-k$
Takový, že $L + L' = V$ a $L \cap L' = \{0\}$

Důkaz: L - vektorový prostor $(e_1, \dots, e_k)$ - báze L
$(e_1, \dots, e_k)$ lin nez. systém V
$(e_1, \dots, e_k, \dots, e_n)$ - báze prostoru V.

$$L' = [\![e_{k+1}, \dots, e_n]\!]$$

$L + L' = V \quad x \in V$

$$x = \underbrace{x^1 e_1 + \dots + x^k e_k}_{\in L_1} + \underbrace{x^{k+1} e_{k+1} + \dots + x^n e_n}_{\in L'}$$

$L \cap L' = \{0\}$
$\Downarrow$

$$x = \alpha^1 e_1 + \dots + \alpha^k e_k$$
$$= \beta^{k+1} e_{k+1} + \dots + \beta^n e_n$$
$$\alpha^1 e_1 + \dots + \alpha^k e_k - \beta^{k+1} e_{k+1} - \dots - \beta^n e_n = 0$$
$$\alpha^i, \beta^i = 0$$
$$x = 0$$