ELEMENTÁRNÍ ÚPRAVY

Elementární úpravy – relace ekvivalence
- symetrická $A \sim B \Rightarrow B \sim A$
- reflexivní $A \sim A$
- tranzitivní $A \sim B$, $B \sim C \Rightarrow A \sim C$

$A \sim B \Leftrightarrow B = U \cdot A$ $\quad U = U_1 \cdot U_2 \cdot \ldots \cdot U_n$

LINEÁRNÍ KOMBINACE ŘÁDKŮ

A – matice $\quad f^{i_1}, f^{i_2}, \ldots, f^{i_k}$ – řádky A

$\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_k} \in P$

lineární kombinaci řádků $f^{i_1}, \ldots, f^{i_k}$ s koef $\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_k}$

$$\alpha_{i_1} f^{i_1} + \alpha_{i_2} f^{i_2} + \ldots + \alpha_{i_k} f^{i_k} = \alpha_{i_\ell} f^{i_\ell}$$

Řekneme, že řádky $f^{i_1}, f^{i_2}, \ldots, f^{i_k}$ jsou <u>lineárně nezávislé</u> jestliže

$$\alpha_{i_1} f^{i_1} + \alpha_{i_2} f^{i_2} + \ldots + \alpha_{i_k} f^{i_k} = 0 \quad \Rightarrow \alpha_{i_1} = \alpha_{i_2} = \ldots = \alpha_{i_k} = 0$$

<u>lineárně závislé</u> $\quad \exists \alpha_{i_\ell} \neq 0$

množina řádků $f^{i_1}, f^{i_2}, \ldots, f^{i_k}$ – maximálně lineárně nezávislé jestliže $f^{i_1}, f^{i_2}, \ldots, f^{i_k}$ jsou lin nezávislé a přidáním dalšího řádku se nezávislost poruší

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}\begin{array}{l} f^1 \\ f^2 \\ f^3 \end{array}$$

$\{f^1, f^2\}$ – lineárně nezávislé — maximální $\qquad$ $\{f^1, f^2, f^3\}$ – lin. závislé

$$\alpha_1 f^1 + \alpha_2 f^2 = 0$$

$$\alpha_1 (1\ 2\ 3) + \alpha_2 (4\ 5\ 6) = (0\ 0\ 0)$$

$$\alpha_1 (1\ 2\ 3) = -\alpha_2 (4\ 5\ 6)$$

$$-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}(1\ 2\ 3) = (4\ 5\ 6) \qquad \cancel{-\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{4}{1} \quad -\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{5}{2}}$$

$$\alpha_1 (1\ 2\ 3) + \alpha_2 (4\ 5\ 6) + \alpha_3 (6\ 9\ 12) = 0$$

$$2(1\ 2\ 3) + 1(4\ 5\ 6) - 1(6\ 9\ 12) = 0$$

Hodnost matice je maximální počet lineárně nezávislých řádků.

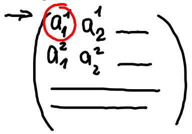
Věta (Gauss)
Elementární úpravy matice nemění její hodnost

Důkaz: ① α-násobek – jasné
② prohození řádků – jasné
③ Přičtení α-násobku řádku k jinému.
.... jasné.

Důsledek: Ekvivalentní matice mají stejnou hodnost

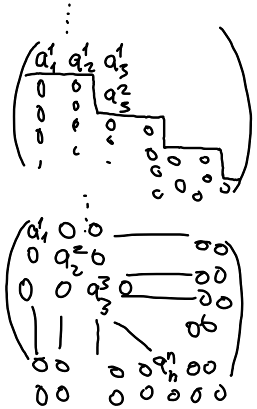
Věta: (Gaussova eliminační metoda)
Každou matici lze konečným počtem elementárních úprav převést na schodovitý tvar (diagonálu).

Důkaz:



a_1^1 – nenulový (jinak prohozením)

$-\frac{a_1^2}{a_1^1}$ násobek 1. řádku ke 2.



Důsledek: Hodnost diagonální matice je rovna počtu nenulových prvků

Důsledek: Hodnost matice získáme z hodnosti k ní ekvivalentní matice ve schodovitém tvaru.

Důsledek $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} A^T$

ČTVERCOVÉ MATICE

A - n/n

Je-li $\operatorname{rank} A = n$ A - regulární

$\operatorname{rank} A < n$ A - singulární

Věta: Každá regulární matice je ekvivalentní jednotkové matici n/n.

Věta: Násobení regulární maticí nemění hodnost

Důkaz: A - regulární

$$A = U_1 \cdot U_2 \cdot \ldots \cdot U_k \cdot E$$

mám jinou matici B násobím ji maticí A

$$A \cdot B = U_1 \cdot U_2 \cdot \ldots \cdot U_k \cdot \cancel{E} \cdot B$$

DETERMINANT

A - čtvercová matice n/n

Levi-Civitův symbol $\{1,2,3,\dots,n\}$

$$\varepsilon^{i_1 i_2 \dots i_n} = \begin{cases} 1 & i_1, i_2, \dots, i_n - \text{sudá permutace} \\ -1 & i_1, i_2, \dots, i_n - \text{lichá permutace} \\ 0 & i_k = i_l \quad k \neq l \end{cases}$$

Příklad $\{1\ 2\ 3\}$

$\varepsilon^{123} = 1$, $\varepsilon^{321} = -1$ $\varepsilon^{221} = 0$

1	2	3	s
1	3	2	l
2	1	3	
2	3	1	
3	1	2	
3	2	1	

determinant matice A je číslo

$$\det A = |A| = \varepsilon^{i_1 i_2 \dots i_n} a^1_{i_1} \cdot a^2_{i_2} \cdots a^n_{i_n}$$

Příklad

$$\begin{pmatrix} a^1_1 & a^1_2 \\ a^2_1 & a^2_2 \end{pmatrix} = A$$

+ −

$\underline{1\,2}$, $2\,1$

$$\det A = +1 \cdot a^1_1 \cdot a^2_2 + (-1)\, a^1_2\, a^2_1 = a^1_1 a^2_2 - a^1_2 a^2_1$$

$$\begin{pmatrix} a^1_1 & a^1_2 & a^1_3 \\ a^2_1 & a^2_2 & a^2_3 \\ a^3_1 & a^3_2 & a^3_3 \end{pmatrix} = A$$

123 213 312

132 231 321

$$\det A = \underline{a^1_1 a^2_2} a^3_3 + \underline{a^1_2 a^2_3 a^3_1} + \underline{a^1_3 a^2_1} a^3_2 - \underline{a^1_1 a^2_3} a^3_2 - \underline{a^1_2 a^2_1} a^3_3 - \underline{a^1_3 a^2_2} a^3_1$$

Title: X 4 - 12:40 (5 of 5)