1. MATICE

1.1 První pohled na pole

Pole je množina na níž je dána operace operace $+, \cdot$

- existence nuly $0+x=x+0=x$
- komutativita sčítání $x+y=y+x$
- existence opačného prvku $x+(-x)=(-x)+x=0$
- existence $\underline{1} \neq 0$ $1\cdot x=x\cdot 1=x$
- komutativita násobení $x\cdot y=y\cdot x$
- existence převrácené hodnoty $x\neq 0$ $x\cdot x^{-1}\cdot x^{-1}\cdot x=1$
- distributivita $x\cdot(y+z)=xy+x\cdot z$

Příklady: množ. reál. čísel $\mathbb{R}$
komplex. $\mathbb{C}$
racionál. $\mathbb{Q}$

1.2 Číselné matice

Číselná matice typu n/m nad polem P

$$\begin{pmatrix} a^1_1 & a^1_2 & \dots & a^1_m \\ a^2_1 & a^2_2 & \dots & a^2_m \\ \hline a^n_1 & a^n_2 & \dots & a^n_m \end{pmatrix}$$

n- počet řádků
m- počet sloupců

a^i_j — prvek matice A $\quad (a^i_j)$

Příklad

typu 2/3

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = A \qquad a^2_1 = 4$$

Matice A pro kterou $a^i_j = 0 \ \forall i j$
nulová matice $\quad 0$

Matice $E = (\delta^i_j)$ $\quad \delta^i_j = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$
jednotková matice

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \end{pmatrix}$$

a^i_i

hlavní diagonála

Matice, která má prvky mimo diagonálu rovny 0
diagonální matice

Řekneme, že matice A je ve schodovitém tvaru

$$\begin{pmatrix}
0 & \cdots & 0 & a^1_{j_1} & \cdot & \cdot & \cdots & & & & \\
0 & \cdots & & \cdots & 0 & \cdots & 0 & a^2_{j_2} & \cdots & & \\
0 & \cdots & & & & \cdots & 0 & \cdots & 0 & a^3_{j_3} & \cdots \\
\vdots & & & & & & & & & & \\
0 & \cdots & & & & & & & \cdots & 0 & a^k_{j_k} \ \cdot \\
0 & \cdots & & & & & & & & \cdots & 0
\end{pmatrix}$$

$$j_1 < j_2 < j_3 \cdots < j_k$$

Př: - E

$$\begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 2 & 3 & 4 & 5 \\
0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 7 & 8 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

A-matice n/m

Opačná matice $-A = (b_j^i)$ $b_j^i = -a_j^i$

$-A$ má typ n/m

Transponovaná matice m/n

$$A^T = (b_j^i) \quad b_j^i = a_i^j$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Algebraické operace s maticemi

A definujeme sčítání

$A - n/m$ $B - n/m$

$$C = A + B \qquad c_j^i = a_j^i + b_j^i$$

A taky skalární násobení

$A - n/m$, $\alpha \in P$

$$B = \alpha \cdot A \qquad b_j^i = \alpha b_j^i$$

Title: IX 27 - 12:11 (4 of 7)

Věta (Základní pravidla pro počítání s maticemi)

- $A + B = B + A$ komutativita
- $(A+B)+C = A+(B+C)$ asociativita
- $A + 0 = 0 + A = A$
- $A + (-A) = -A + A = 0$
- $1 \cdot A = A$
- $0A = 0$
- $(-1)A = -A$
- $(A+B)^T = A^T + B^T$
- $(\alpha A)^T = \alpha \cdot A^T$

Násobení matic

A typu n/m B typu m/p

$C = A \cdot B$

$$c^i_j = a^i_1 b^1_j + a^i_2 b^2_j + \_\_\_ + a^i_m b^m_j = \sum_{k=1}^{m} a^i_k b^k_j = a^i_k b^k_j$$

Př.:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot5+0\cdot0 & 2(-1)+0\cdot1 & 0 \\ 1\cdot5+4\cdot0 & 1\cdot(-1)+4\cdot1 & 4 \end{pmatrix}$$

A - je symetrická n/n

jestliže platí $A = A^T$ $\qquad a^i_j = a^j_i$

A je antisymetrická

$A = -A^T \qquad a^i_j = -a^j_i$

Věta: Každou matici lze psát ve tvaru součtu symetrické a antisymetrické matice

Hodnost matice

Elementární úpravy matice

1. Vynásobení řádku nenulovým číslem
2. Výměna dvou řádků
3. Přičtení α násobku řádku k jinému

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 9 & 12 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Věta: Každou elementární řádkovou (sloupcovou) lze realizovat vynásobením jisté matice zleva (zprava).