Věta 5.8 (o dimenzi podprostorů)

Nechť W_1, W_2 – podprostory konečněrozměr. prostoru V. Potom platí

$$\dim(W_1+W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim W_1 \cap W_2 .$$

Důkaz: $\dim V = n$; $r = \dim W_1$, $s = \dim W_2$

1. Pokud $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ $\dim W_1 \cap W_2 = 0$
   je jasné.

2. Předpokládejme, že $W_1 \cap W_2 \neq \{0\}$ ← podprostor
   $\dim W_1 \cap W_2 = k$

Volíme bázi v $W_1 \cap W_2$ – $(e_1, \dots, e_k)$

doplníme na $(e_1, \dots, e_k, u_{k+1}, \dots, u_r)$ – báze ve W_1

$(e_1, \dots, e_k, v_{k+1}, \dots, v_s)$ – báze ve W_2

Dokážeme, že $(e_1, \dots, e_k, u_{k+1}, \dots, u_r, v_{k+1}, \dots, v_s)$ báze $W_1 + W_2$

Uvažujme lin. kombinaci

$$\alpha^1 e_1 + \dots + \alpha^k e_k + \beta^{k+1} u_{k+1} + \dots + \beta^r u_r + \gamma^{k+1} v_{k+1} + \dots + \gamma^s v_s = 0$$

$$\alpha^1 e_1 + \dots + \alpha^k e_k + \beta^{k+1} u_{k+1} + \dots + \beta^r u_r = -\gamma^{k+1} v_{k+1} - \dots - \gamma^s v_s$$

všechny koef. $\alpha^i, \beta^i, \gamma^i = 0$

$(e \dots u \dots v)$ – nezávislé.

- generují $W_1 + W_2 \ni x$ – libovolné

$\exists x_1 \in W_1, x_2 \in W_2$ $x = x_1 + x_2$

$$x_1 = \alpha^1 e_1 + \dots + \alpha^k e_k + \alpha^{k+1} u_{k+1} + \dots + \alpha^r u_r$$

$$x_2 = \beta^1 e_1 + \dots + \beta^k e_k + \beta^{k+1} v_{k+1} + \dots + \beta^s v_s$$

$$x = x_1 + x_2 = (\alpha^1 + \beta^1)\underline{e_1} + \dots + (\alpha^k + \beta^k)\underline{e_k} + \alpha^{k+1}\underline{u_{k+1}} + \dots + \alpha^r \underline{u_r} + \beta^{k+1}\underline{v_{k+1}} + \dots + \beta^s \underline{v_s}$$

Systém $(e_1, \dots, e_k, u_{k+1}, \dots, u_r, v_{k+1}, \dots, v_s)$ báze $W_1 + W_2$

$\dim W_1 + W_2 = k + (r-k) + (s-k) = r + s - k$

6 LINEÁRNÍ ZOBRAZENÍ

$f: V_n \to V_m$ $\quad V_n, V_m$ - vektor. prostory nad P

$\dim V_n = n$, $\dim V_m = m$

$\forall x, y \in V_n$

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \text{- aditivita}$$

$\forall x \in V_n; \forall \alpha \in P$

$$f(\alpha \cdot x) = \alpha \cdot f(x) \quad \text{— homogenita}$$

$V_n = V_m$ — lineární operátor na V_n

Př.: $V_n = V_m$ $\quad f(x) = 0$

$V_n = V_m$ $\quad f(x) = x$

$V_n = V_m = \mathbb{R}$ $\quad f(x) = k \cdot x$ — lin oper.

$f(x) = x + 1$ — není lin zobrazení

Snadno odvodíme

$\forall x_1, \ldots, x_k \in V_n$, $\alpha^1, \ldots, \alpha_k \in P$

$$f\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha^i x_i\right) = \sum_{i=1}^{k} \alpha^i f(x_i) \quad \ldots\ldots \quad f(\alpha^i x_i) = \alpha^i f(x_i)$$

$$f(-x) = -f(x)$$

$$f(0) = 0$$

Množinu všech lineárních zobrazení z V_n do V_m značíme $L(V_n, V_m)$

$\ker f = \{x \in V_n \mid f(x) = 0\}$ jádro f

$\dim \ker f$ — defekt f $\quad d(f)$

$\operatorname{Im} f = \{f(x) \mid x \in V_n\}$ obraz f.

$\dim \operatorname{Im} f$ ~ hodnost f $\quad h(f)$

Věta 6.1

1. Jádro f je podprostor v V_n.
2. Obraz f je podprostor v V_m.

Důkaz: 1. Podle lemmatu 5.5 ověříme uzavřenost $\ker f$

- sčítání $x, y \in \ker f$ $f(x) = 0$, $f(y) = 0$

$$f(x+y) = f(x) + f(y) = 0 + 0 = 0.$$

- skalární násobení $\alpha \in P$; $x \in \ker f \Rightarrow f(x) = 0$

$$f(\alpha \cdot x) = \alpha \cdot f(x) = \alpha \cdot 0 = 0.$$

2. Obraz ověříme uzavřenost na operace $+, \cdot$

- sčítání $f(x), f(y) \in \operatorname{Im} f$

$$f(x) + f(y) = f(x+y)$$

- skalární násobení $\alpha \in P$, $f(x) \in \operatorname{Im}$

$$\alpha \cdot f(x) = f(\alpha \cdot x).$$

Věta 6.3

Nechť V_n, V_m - konečně rozměrné prostory

$f: V_n \to V_m$ - lin zobrazení

Potom f je jednoznačně určeno hodnotami na libovolné bázi V_n.

Důkaz (e_i) - báze ve V_n. Znám $f(e_i)$

$$f(x) = f(x^i e_i) = x^i f(e_i)$$

Je-li $(\bar{e}_i)$ - báze ve V_m

$$f(x) = x^i \underbrace{f(e_i)^j}_{a^j_i} \bar{e}_j = x^i a^j_i \bar{e}_j$$

$$f(x) = \bar{x}^j \bar{e}_j$$

$$\bar{x}^j \bar{e}_j = x^i a^j_i \bar{e}_j$$

$$\bar{x}^j = a^j_i x^i$$

Matici $A = (a^j_i)$ - matice lin zobrazení v bázích (e_i) a $(\bar{e}_j)$ - m/n