$G_1, \circ$, G_2 $*$ - grupy

$f: G_1 \longrightarrow G_2$ - homomorfismus

$\forall x, y \in G_1 \qquad f(x \circ y) = f(x) * f(y)$

$\ker f = \{ x \in G_1 \mid f(x) = e_2 \}$

jádro homomorfismu f

$\operatorname{Im} f = \{ x' \in G_2 \mid \exists x \in G_1 : f(x) = x' \}$

$= \{ f(x) \mid x \in G_1 \}$

Obraz homomorfismu f.

Je-li f - homomorfismus a f - bijektivní

f - je izomorfismus grup G_1, G_2

Př.: • $\mathcal{M}_2$ - množina matic 2/2 nad $\mathbb{R}$

$\mathbb{R}^4$ s operací sčítání „po složkách"

$f: \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) = (a, b, c, d) \qquad f: \mathcal{M}_2 \longrightarrow \mathbb{R}^4$

• $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ - izomorfismus grup

Věta 4.6 Nechť $G_1, \circ$ i $G_2, *$ - grupy, zobraz $f: G_1 \Rightarrow G_2$ je homomorfismus.

1. Obrazem jednot. prvku v G_1 je jednotkový v G_2.

2. Obraz inverze prvku $x \in G_1$ je inverze obrazu $f(x)$

$$\underline{f(x^{-1})} = \left(f(x)\right)^{-1}$$

Důkaz: Ozn. e_1 - jednot. prvek v G_1, $f(e)$ jeho obraz.

$$\underline{f(e_1)} = f(e_1 \circ e_1) = \underline{f(e_1) * f(e_1)}$$

$x_2 \in G_2$

$$x_2 * f(e_1) = (x_2 * f(e_1)) * e_2 =$$

$$= (x_2 * f(e_1)) * (f(e_1) * f(e_1)^{-1}) =$$

$$= (x_2 * \underbrace{(f(e_1) * f(e_1))}) * f(e_1)^{-1} =$$

$$\underline{= x_2 * (f(e_1)} * f(e_1)^{-1}) = x_2.$$

2. Mám dokázat, že $f(x^{-1})$ je inverze prvku $f(x)$

No ale

$$f(x^{-1}) * f(x) = f(x^{-1} \circ x) = f(e_1) = e_2$$

$$f(x^{-1}) = (f(x))^{-1}$$

Veta 4.7. Jádro homomorfismu $f: G_1 \to G_2$ je podgrupa G_1. Obraz homomorfismu f je podgrupa v G_2

Důkaz: Overíme, že $\ker f$ je uzavřená vzhledem k operacím na G_1 - o $\forall x,y \in \ker f$ ..... $x \circ y \in \ker f$ ✓
..... $x^{-1} \in \ker f$.

$x,y \in \ker f$ $\quad f(x) = e_2,\ f(y) = e_2$

• $x \circ y \in \ker f$?

$$f(x \circ y) = f(x) * f(y) = e_2 * e_2 = e_2$$

• $x^{-1} \in \ker f$

$$f(x^{-1}) \overset{\text{Veta 4.6}}{=} \left(f(x)\right)^{-1} = (e_2)^{-1} = e_2.$$

$\operatorname{Im} f$ - podgrupa v G_2

• $\underset{\Downarrow}{f(x)}, \underset{\Downarrow}{f(y)}$ $\quad x,y \in G_1$ ..... $f(x) * f(y) \in \operatorname{Im} f$

$$f(x) * f(y) = f(x \circ y) \in \operatorname{Im} f$$

• $f(x) \in \operatorname{Im}$ ..... $(f(x))^{-1} \in \operatorname{Im} f$?

$$(f(x))^{-1} \overset{\text{Veta 4.6}}{=} f(x^{-1}) \in \operatorname{Im} f.$$

Věta 4.8. Složení homomorfismů je homomorfismus.

Důkaz: homomor. $f: G_1 \to G_2$ $G_1, \circ; G_2, *$ grupy
homomor. $g: G_2 \to G_3$ $G_3, \cdot$

Dokážeme, že $g \circ f: G_1 \to G_3$

$\forall x, y \in G_1$ platí, že $(g \circ f)(x \circ y) = (g \circ f)(x) \cdot (g \circ f)(y)$

$$(g \circ f)(x \circ y) = g(f(x \circ y)) =$$
$$= g(f(x) * f(y)) = g(f(x)) \cdot g(f(y)) =$$
$$= (g \circ f)(x) \cdot (g \circ f)(y)$$

Důsledek 4.9. Složení izomorfismů je izomorfismus.

Existuje-li mezi grupami G_1 a G_2 izomor. říkáme, že G_1 a G_2 jsou izomorfní.
$G_1 \approx G_2$

Věta 4.10 Relace $\approx$ je relace ekvivalence na množině všech grup.

Důkaz: 1. Reflexivní $G_1 \approx G_1$ – izomorfismus identita na G_1

2. Symetrie $G_1 \approx G_2 \Rightarrow G_2 \approx G_1$
$\exists$ izomorf. $G_1 \to G_2$ ... $f^{-1}: G_2 \to G_1$

3. tranzitivita $G_1 \approx G_2$ a $G_2 \approx G_3$
$\exists$ izomor. $f: G_1 \to G_2$ $\exists$ izomor. $g: G_2 \to G_3$
hledaný izomorfismus je $g \circ f: G_1 \to G_3$

Příklady podgrup.

$\mathbb{Z}, +$ – abelova grupa

$n \in \mathbb{N}$.

$n \cdot \mathbb{Z} = \{ n \cdot k \mid k \in \mathbb{Z} \}$ – podgrupa $\mathbb{Z}$

$\mathbb{Z}_n = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}, +$ – modulo n

$\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$ $+ \pmod 3$

$\cdot \pmod 3$

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

·	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

Podgrupy $GL(n,\mathbb{R})$, $GL(n,\mathbb{C})$

<u>Ortogonální grupa</u>

$$O_n(\mathbb{R}) = \{A \in GL(n,\mathbb{R}) \mid \underbrace{A \cdot A^T = E}\}$$

A - ortogonální $A \cdot A^T = E$

<u>Speciální lineární grupa</u> $SL(n,\mathbb{R})$

$$SL(n,\mathbb{R}) = \{A \in GL(n,\mathbb{R}) \mid \det A = 1\}$$

Podgrupy $GL(n,\mathbb{C}\}$

<u>Unitární grupa</u> $U_n(\mathbb{C})$

$$U_n(\mathbb{C}) = \{A \in GL(n,\mathbb{C}) \mid A \cdot A^{T*} = E\}.$$

A - unitární $\iff A \cdot A^{T*} = E$

Speciální lineární grupa $SL(n,\mathbb{C})$

$$SL(n,\mathbb{C}) = \{A \in GL(n,\mathbb{C} \mid \det A = 1\}.$$

$$\begin{array}{ccccc} SL(n,\mathbb{R}) & \subset & O_n(\mathbb{R}) & \subset & GL(n,\mathbb{R}) \\ \cap & & \cap & & \cap \\ SL(n,\mathbb{C}) & \subset & U_n(\mathbb{C}) & \subset & GL(n,\mathbb{C}) \end{array}$$

zobrazení $\det : GL(n,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\cdot$

homomorfismus

protože $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$

$$\ker \det = SL(n,\mathbb{R})$$