4 GRUPY OKRUHY POLE

X - množina $\circ : X \times X \longrightarrow X$ operace na X

$(x \circ y) \ldots\ldots \circ(x, y)$

komutativní $\forall x, y \in X$

$$x \circ y = y \circ x$$

asociativní $\forall x, y, z \in X$

$$(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$$

$\circ, +$ dvě operace na X $\circ$ - distributivní $\forall x, y, z \in X$

$$x \circ (y + z) = (x \circ y) + (x \circ z)$$

$$(x + y) \circ z = (x \circ z) + (y \circ z)$$

Množina $A \subset X$ uzavřená vzhledem k operaci $\circ$ na X jestliže $\circ|_{A \times A}$ je zobrazení do A

4.1 Grupa

Množina G s operací $\circ$ je grupa jestliže

1) $\circ$ je asociativní
2) $\exists e \in G$ takový, že $\forall x \in G$

$$e \circ x = x \circ e = x$$

e-neutrální prvek

3) $\forall x \in G$ existuje prvek $x^{-1} \in G$ takový, že

$$x \circ x^{-1} = x^{-1} \circ x = e.$$

x^{-1} inverze x

Věta 4.1. 1. V každé grupě existuje jediný neutrální prvek
2. Inverze prvku v G je určena jednoznačně.

Důkaz: 1. předpokládáme, že e_1 e_2 jsou dva neutrální prvky

$$e_1 = e_1 \circ (e_2 \circ e_2) = (e_1 \circ e_2) \circ e_2 = e_2 \circ e_2 = e_2$$

2. Předpokládáme, že y, z jsou dvě inverze prvku $x \in G$

$$y = y \circ e = y \circ (x \circ z) = (y \circ x) \circ z = e \circ z = z$$

Příklady $\mathbb{R}, +$ - grupa, Aditivní grupa reálných čísel
$\mathbb{R}\ \cdot$ není grupa 0 - nemá inverzi.
$\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot$ - grupa, Multiplikativní grupa reálných čísel
$\mathbb{R}^2\ +$, sčítání po složkách $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$

Je-li operace na G komutativní říkáme, že grupa G je komutativní (Abelova).

$GL(n, \mathbb{R})$ - množina regulárních matic n/n s prvky z $\mathbb{R}$.
s operací násobení - grupa: Obecná lineární grupa
$GL(n, \mathbb{C})$

Věta 4.2 Nechť $G, \circ$ - grupa.

1. $e^{-1} = e$.
2. Pro libovolné $x, y \in G$ $(x \circ y)^{-1} = y^{-1} \circ x^{-1}$.
3. $(x^{-1})^{-1} = x$

Důkaz 1. $e^{-1} = e^{-1} \circ e = e$

2. Ukážeme, že $y^{-1} \circ x^{-1}$ je inverze prvku $x \circ y$

$$(x \circ y) \circ (y^{-1} \circ x^{-1}) = (x \circ (y \circ y^{-1})) \circ x^{-1} = (x \circ e) \circ x^{-1} = x \circ x^{-1} = e$$

$$(y^{-1} \circ x^{-1}) \circ (x \circ y) = (y^{-1} \circ (x^{-1} \circ x)) \circ y = (y^{-1} \circ e) \circ y = y^{-1} \circ y = e.$$

3. Mám ukázat, že

$$x \circ x^{-1} = e, \quad x^{-1} \circ x = e.$$

Je-li $G, \circ$ grupa, zavádíme na G novou operaci

$$x, y \longmapsto x \circ y^{-1} \quad \text{- odčítání, dělení}$$

Množina $A, \circ$, $A \subset G$ je podgrupa grupy G, jestliže A je s operací $\circ$ grupa.

Příklad $\mathbb{Z}, +$ podgrupa aditivní grupy reálných čísel

$\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot$ - podgrupa $\mathbb{R}^+, \cdot$

Věta 4.4. Podmnožina $A \overset{\neq \emptyset}{\subset} G$ - grupy s operací $\circ$ je podgrupa G je-li uzavřená vzhledem k operaci $\circ$ a jestliže inverze každého prvku z A leží v A.

Věta 4.5. 1. Je-li G' podgrupou G a G'' podgrupou G' ~~potom~~ je G'' podgrupou G.

2. Průnik libovolného systému podgrup G je podgrupa grupy G.

3. Podgrupa Abelovy grupy je Abelova.

Důkaz 2. S - systém podgrup grupy G.

Dokažme, že $\cap S$ je podgrupa G.

Uzavřenost operace $\circ$.

$x, y \in \cap S \qquad x, y \in G' \qquad \forall G' \in S$

$\qquad\qquad\qquad x \circ y \in G' \qquad \forall G' \in S$

to znamená, že $x \circ y \in \cap S$

Uzavřenost na inverzi

$x \in \cap S$ to znamená, že $x \in G' \quad \forall G' \in S$

$\qquad\qquad\qquad\qquad x^{-1} \in G' \quad \forall G' \in S$

čili $x^{-1} \in \cap S$.

4.2 Homomorfismy

$G_1, \circ$ - grupa, $G_2, *$ - grupa

$f: G_1 \to G_2$ - homomorfismus grup G_1 a G_2

$\forall x, y \in G_1$

$$f(\overbrace{x \circ y}^{G_1}) = \overbrace{f(x) * f(y)}^{G_2}.$$

Příklady ① $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $f(x) = e^x$

$\mathbb{R}, +$ $\quad \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$\forall x, y \in \mathbb{R}$

$f(x \circ y) = f(x) * f(y) \qquad e^{x+y} = e^x \cdot e^y$

② $GL(n, \mathbb{R})$ - reg. mat. determinant:

$\det: GL(n, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$.